8. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 8.1
Seien R, S Ringe, $x \in R^*$ eine Einheit und $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. (Anmerkung: f bildet damit 1_R auf 1_S ab.) Beweise oder widerlege:

a) $f(x)$ ist eine Einheit in S und die Einschränkung $f|_{R^*} : R^* \to S^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

b) Ist f ein surjektiver Ringhomomorphismus, so induziert f einen surjektiven Homomorphismus zwischen den Einheitengruppen.

Aufgabe 8.2
Bestimme, welche der folgenden komplexen Zahlen ganz über $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ sind.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\sqrt[3]{13}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$

d) $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$

Aufgabe 8.3
Sei A ein kommutativer Ring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Jedes Ideal $I \trianglelefteq A$ ist endlich erzeugt.

ii) Jede aufsteigende Kette von Idealen $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ in A wird stationär, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $I_k = I_N$ für alle $k \geq N$.

iii) Zu jeder aufsteigenden Kette von Idealen $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ in A gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $I_k = I_{k+1}$.

Bemerkung: Erfüllt A die äquivalenten Bedingungen *i*), *ii*) und *iii*), so heißt A *noethersch*.

Bitte wenden.

Aufgabe 8.4
Sei A ein kommutativer Ring und $I \trianglelefteq A$ ein Ideal. Zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

i) A ist noethersch.

ii) Jedes Ideal $J \trianglelefteq A$ mit $J \subseteq I$ ist endlich erzeugt und A/I ist noethersch.

Hinweis: Sei R ein beliebiger (nicht notwendig kommutativer) Ring mit 1. Ein *beidseitiges Ideal* $I \trianglelefteq R$ ist eine Untergruppe von $(R, +)$ so, dass für alle $r \in R$ und $x \in I$ gilt $r \cdot x \in I$ und $x \cdot r \in I$.

***-Aufgabe**
Sei A ein kommutativer Ring, $I \trianglelefteq A$ ein Ideal und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Sei $I^{n\times n} \subseteq A^{n\times n}$ die Teilmenge der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in I. Zeige: $I^{n\times n}$ ist ein beidseitiges Ideal in $A^{n\times n}$ und es gilt $A^{n\times n}/I^{n\times n} \cong (A/I)^{n\times n}$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 16.6.2016, 8 Uhr