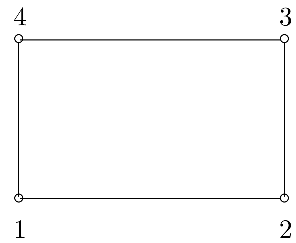
2. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Cora Welsch

Definition: Eine Wirkung von G auf einer Menge X heißt *2-fach transitiv*, wenn G transitiv auf der Menge $\{(x, y) \in X^2 \mid x \neq y\}$ wirkt.

Aufgabe 2.1
Sei G die Symmetriegruppe eines nicht-quadratischen Rechtecks:



a) Bestimme die Ordnung von G.

b) Sei $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(4)$ der durch die Wirkung von G auf der Eckenmenge induzierte Gruppenhomomorphismus. Was ist das Bild von G unter φ? Wirkt G transitiv auf den Ecken? Wirkt G 2-fach transitiv?

Aufgabe 2.2

a) Beweise: Die additive Gruppe der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +)$ ist nicht endlich erzeugt.

b) Seien G, H nicht-triviale Gruppen. Zeige: Das freie Produkt $G * H$ ist unendlich.

Aufgabe 2.3
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und A eine endliche Gruppe. Zeige:

a) Die Menge der Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Hom}(G, A)$ ist endlich.

b) Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Dann hat G nur endlich viele Untergruppen von Index $[G : H] = n$.
Hinweis: Für eine Untergruppe $H \leq G$ mit $[G : H] = n$ betrachte die Wirkung von G auf den Nebenklassen von H in G und verwende Teil a).

Bitte wenden.

Definition: Ein Automorphismus φ einer Gruppe G heißt *innerer Automorphismus*, wenn es $h \in G$ gibt, sodass $\varphi(g) = hgh^{-1}$ für alle $g \in G$ gilt.

Aufgabe 2.4
Zeige: Es gibt keine Gruppe G, deren Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch von ungerader Ordnung $n > 1$ ist.
Hinweis: Beweise zunächst mithilfe der inneren Automorphismen, dass eine solche Gruppe G abelsch sein muss und benutze Aufgabe 1.1.

Definition: Eine *topologische Gruppe* G ist eine Gruppe G versehen mit einer Topologie, sodass die Multiplikation $m : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ (bzgl. der Produkttopologie auf $G \times G$) und die Inversenbildung $i : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ stetige Abbildungen sind.

***-Aufgabe**
Sei G eine topologische Gruppe und $A \leq G$ eine Untergruppe. Zeige:

a) Ist A offen in G, so ist A auch abgeschlossen. Gilt dies auch umgekehrt?

b) Der Abschluss $\bar{A}$ von A in G ist eine Untergruppe von G.
Ist $A \trianglelefteq G$ normal, so ist auch $\bar{A}$ ein Normalteiler von G.

Abgabe bis: Donnerstag, den 5.11.2015, 8 Uhr