3. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 3.1
Sei I eine Indexmenge und A_α für jedes $\alpha \in I$ eine abelsche Gruppe.
Sei weiter $A = \bigoplus_{\alpha \in I} A_\alpha$ die direkte Summe der A_α, also

$$A = \bigoplus_{\alpha \in I} A_\alpha = \{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} A_\alpha \mid a_\alpha = e \text{ für fast alle } \alpha \in I\}.$$

Zeige: A ist das Koprodukt der Familie $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ in der Kategorie der abelschen Gruppen, d.h. es gibt Homomorphismen $i_\alpha : A_\alpha \to A$, sodass für jede abelsche Gruppe B und Homomorphismen $f_\alpha : A_\alpha \to B$ ein eindeutiger Homomorphismus $f : A \to B$ mit $f \circ i_\alpha = f_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ existiert.

Definition: Sei G eine Gruppe. Ein Gruppenelement $g \in G$ heißt *Torsionselement*, wenn g endliche Ordnung hat. Sei $\mathrm{Tor}(G)$ die Menge der Torsionselemente in G. G heißt *torsionsfrei*, wenn $\mathrm{Tor}(G) = \{e\}$ gilt.

Aufgabe 3.2
Sei A eine abelsche Gruppe. Zeige:

a) $\mathrm{Tor}(A)$ ist eine Untergruppe von A und $A/\mathrm{Tor}(A)$ ist torsionsfrei.

b) Ist G eine beliebige Gruppe, so ist $\mathrm{Tor}(G)$ im Allgemeinen keine Untergruppe von G.

Aufgabe 3.3
Sei X eine Menge und $F = F(X)$ die freie Gruppe über X. Desweiteren sei $H \leq F$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige:

a) F ist torsionsfrei.

b) Ist $G \leq F$ eine Untergruppe mit $G \cap H = \{e\}$, so gilt bereits $G = \{e\}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 3.4
Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $F(X)$ die freie Gruppe über X.
Sei $\varphi : G \to F(X)$ ein Epimorphismus.
Sei $i : X \to G$ ein Schnitt für φ, d.h. $\varphi(i(x)) = x$ für alle $x \in X$. Es bezeichne $X' = i(X)$ und $H = \langle X' \rangle$ die von X' erzeugte Untergruppe von G.
Beweise: $H \cong F(X)$

***-Aufgabe**
Welche der folgenden abelschen Gruppen sind isomorph?

a) $(\mathbb{Z}, +)$	b) $(\mathbb{Z}^2, +)$
c) $(\mathbb{Q}, +)$	d) $(\mathbb{Q}^2, +)$
e) $(\mathbb{R}, +)$	f) $(\mathbb{R}^2, +)$

Abgabe bis: Donnerstag, den 12.11.2015, 8 Uhr