5. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 5.1
Sei G eine Gruppe und seien $A, B \leq G$ Untergruppen von G mit $[G : B] < \infty$. Zeige:

a) Gilt $A \subseteq B$ und $[B : A] < \infty$, so gilt $[G : A] = [G : B] \cdot [B : A]$.

b) Gilt $[G : A] < \infty$, so gilt $[G : (A \cap B)] \leq [G : A] \cdot [G : B]$.

Aufgabe 5.2
Beweise die folgenden beiden Isomorphien:

a) $\langle x, y \mid x^{-1}yx^{-2} \rangle \cong \mathbb{Z}$

b) $\langle a, b \mid a^5, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

Aufgabe 5.3
Sei G eine Gruppe. Beweise, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) G ist residuell endlich.

ii) Zu jedem $g \in G \setminus \{1\}$ existiert ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $g \notin N$ und $[G : N] < \infty$.

iii) G ist isomorph zu einer Untergruppe eines Produkts von endlichen Gruppen.

Aufgabe 5.4
Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Zeige:

a) Ist G residuell endlich, so ist auch H residuell endlich.

b) Ist G_i residuell endlich für jedes $i \in I$, so ist auch das direkte Produkt $\prod_{i \in I} G_i$ residuell endlich.

Bitte wenden.

***-Aufgabe**
Sei G eine Gruppe und $\mathcal{B}$ die folgende Menge von Teilmengen von G:

$$\mathcal{B} = \{gH \mid g \in G, H \leq G \text{ Untergruppe mit } [G : H] < \infty\}$$

a) Zeige, dass $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie auf G bildet. Diese wird die *profinite Topologie* genannt. Beweise weiter, dass G versehen mit der profiniten Topologie eine topologische Gruppe ist.

b) Zeige: G ist genau dann residuell endlich, wenn $\{1\} \subseteq G$ abgeschlossen bzgl. der profiniten Topologie ist.

Abgabe bis: Donnerstag, den 26.11.2015, 8 Uhr