6. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 6.1
Sei F_2 die freie Gruppe von Rang 2 mit Basis $\{x, y\}$.

a) Beweise: Die Menge $\{xyx^{-1}, xy\}$ ist eine Basis von F_2.

b) Bestimme ein Element $w \in F_2, w \neq e$, sodass es keine Basis von F_2 gibt, welche w enthält.

Lösung:

a) Nach dem Satz (unter der Definition des Begriffs „Basis“) in Kapitel 3 der Vorlesung genügt es zu zeigen, dass $\{xyx^{-1}, xy\}$ die Gruppe F_2 erzeugt. Dafür weisen wir nach, dass die „Standarderzeuger“ x und y in der von $\{xyx^{-1}, xy\}$ erzeugten Untergruppe liegen. Es gilt:

$$x = xy^{-1}x^{-1}xy = (xyx^{-1})^{-1} \cdot (xy) \in \langle xyx^{-1}, xy\rangle$$

Aus $x \in \langle xyx^{-1}, xy\rangle$ erhalten wir nun:

$$y = x^{-1}(xy) \in \langle xyx^{-1}, xy\rangle$$

Da die Erzeuger x und y in $\langle xyx^{-1}, xy\rangle$ enthalten sind, erzeugt die Menge $\{xyx^{-1}, xy\}$ die Gruppe F_2. Da $\#\{xyx^{-1}, xy\} = 2$ gilt, ist $\{xyx^{-1}, xy\}$ damit eine Basis von F_2.

b) Setze $w := x^2$.
Per Widerspruch: Angenommen, w sei Teil einer Basis $B = \{w, w'\}$ von F_2, also $F_2 \cong F(B)$. Insbesondere erfüllt F_2 die universelle Eigenschaft bzgl. B, d.h. für jede Gruppe G und jede Abbildung $\alpha : B \to G$ existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $F(\alpha) : F_2 \to G$ mit $F(\alpha)|_B = \alpha$. Definiere nun $\alpha : B \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch $w \mapsto 1 + 2\mathbb{Z}, w' \mapsto 0 + 2\mathbb{Z}$. Betrachte den von α induzierten Homomorphismus $F(\alpha)$. Es gilt:

$$1 + 2\mathbb{Z} = \alpha(w) = F(\alpha)(w) = F(\alpha)(x^2) = 2 \cdot F(\alpha)(x) = 0 + 2\mathbb{Z} \quad \lightning$$

Somit war die Annahme falsch und w ist nicht Teil einer Basis von F_2.
Alternativ: Wir können den Beweis analog für $\tilde{w} = [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ führen, indem wir ausnutzen, dass $\tilde{w}$ im Kern eines jeden Homomorphismus von F_2 in eine abelsche Gruppe liegt.

Aufgabe 6.2
Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler in G. Zeige:

a) Sind N und G/N endlich erzeugt, so ist G endlich erzeugt.

b) Schreibe Themen auf, welche du in der Vorlesung nicht gut verstanden hast und in der Übung genauer besprechen möchtest.

Lösung: a) Seien N und G/N endlich erzeugt. Seien $n_1, \ldots, n_k$ Erzeuger von N und $x_1, \ldots, x_l$ Erzeuger von G/N. Wähle $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l \in G$ mit $x_i = \tilde{x}_i N$ für $i = 1, \ldots, l$.
Behauptung: Die Menge $\{n_1, \ldots, n_k, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l\}$ erzeugt die Gruppe G.
Sei $g \in G$ beliebig. Da die x_i die Gruppe G/N erzeugen, gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $i_1, \ldots, i_m \in \{1, ..., l\}$ sowie $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, -1\}$ mit

$$gN = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}^{\varepsilon_m} = \tilde{x}_{i_1}^{\varepsilon_1} N \cdot \ldots \cdot \tilde{x}_{i_m}^{\varepsilon_m} N = (\tilde{x}_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \tilde{x}_{i_m}^{\varepsilon_m})N.$$

Dies bedeutet $(\tilde{x}_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \tilde{x}_{i_m}^{\varepsilon_m})^{-1} g \in N$. Da die n_j die Gruppe N erzeugen, gibt es $r \in \mathbb{N}$ und $j_1, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, k\}$ sowie $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \{1, -1\}$ mit

$$\begin{aligned} & (\tilde{x}_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \tilde{x}_{i_m}^{\varepsilon_m})^{-1} g = n_{j_1}^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot n_{j_r}^{\mu_r} \\ \Rightarrow \;\; & g = \tilde{x}_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \tilde{x}_{i_m}^{\varepsilon_m} \cdot n_{j_1}^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot n_{j_r}^{\mu_r} \end{aligned}$$

Folglich gilt $g \in \langle n_1, \ldots, n_k, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l \rangle$. Da $g \in G$ beliebig war, wird G also von $\{n_1, \ldots, n_k, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l\}$ erzeugt. Da diese Menge endlich ist, ist G endlich erzeugt.

Aufgabe 6.3
Zeige, dass die Gruppe G mit der Präsentierung

$$G = \langle x_n, n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid x_{n-1}^{-1} x_n^n \; \forall n > 1 \rangle$$

isomorph zu der additiven Gruppe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist.

Lösung: Wir definieren eine Abbildung $\alpha : \{x_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \to \mathbb{Q}$ durch $\alpha(x_n) = \frac{1}{n!}$. Sei $F(\alpha) : F(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}) \to \mathbb{Q}$ der von α durch die universelle Eigenschaft induzierte Homomorphismus. Es gilt für alle $n > 1$:

$$\begin{aligned} F(\alpha)(x_{n-1}^{-1} x_n^n) &= -F(\alpha)(x_{n-1}) + n \cdot F(\alpha)(x_n) \\ &= -\frac{1}{(n-1)!} + n \cdot \frac{1}{n!} = -\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = 0 \end{aligned}$$

Damit liegen die Relationen von G im Kern von $F(\alpha)$ und nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $G = \langle x_n, n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid x_{n-1}^{-1} x_n^n \; \forall n > 1 \rangle$ existiert ein Homomorphismus $\varphi : G \to \mathbb{Q}$ mit $\varphi \circ \pi = F(\alpha)$, wobei

$$\pi : F(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}) \to \langle x_n, n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid x_{n-1}^{-1} x_n^n \; \forall n > 1 \rangle = G$$

die kanonische Projektion ist.
Für $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ gilt $\frac{k}{n} = k \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{n!}$, d.h. die Gruppe $\mathbb{Q}$ wird von der Menge $\{\frac{1}{n!} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ erzeugt. Da diese nach Konstruktion im Bild von φ

liegt, ist φ surjektiv.
Es bleibt noch zu zeigen: φ ist injektiv.
Dafür weisen wir nach, dass $\ker(\varphi) = \{1\}$ gilt.
Sei $g \in G$ mit $\varphi(g) = 0$. Für $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $n > m$ ist x_m eine Potenz von x_n.
Denn: Aus der Präsentierung von G folgt $x_{n-1} = x_n^n$ und induktiv erhält man $x_m = x_n^{\frac{n!}{m!}}$. Insbesondere kommutieren x_n und x_m (und G ist damit abelsch).
Da die $x_m, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Gruppe G erzeugen und paarweise miteinander kommutieren, gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ mit $g = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$. Dann gilt:

$$0 = \varphi(g) = \varphi(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \varphi(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{i!}$$

Mit der Identität $x_i = x_n^{\frac{n!}{i!}}$ für $n > i$ erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} g = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} &= x_n^{k_1 n!} x_n^{k_2 \frac{n!}{2!}} \ldots x_n^{k_{n-1} \frac{n!}{(n-1)!}} x_n^{k_n} \\ &= x_n^{\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \frac{n!}{i!}} = x_n^{n! \cdot (\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{i!})} = x_n^{n! \cdot 0} = x_n^0 = 1 \end{aligned}$$

Es gilt somit $\ker(\varphi) = \{1\}$ und φ ist injektiv.
Insgesamt ist φ ein bijektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus und es gilt $G \cong \mathbb{Q}$.

Aufgabe 6.4
Beweise folgende Isomorphien:

a)
$$\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \{1\},$$
wobei der Kolimes bzgl. der kanonischen Projektionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gebildet werde.

b)
$$\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$
wobei der Kolimes bzgl. der Abbildungen $\varepsilon_1 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $a + 4\mathbb{Z} \mapsto a + 2\mathbb{Z}$ und $\varepsilon_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ gebildet werde.

Lösung:

a) Seien $p_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $p_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die kanonischen Projektionen. Wir setzen $s := p_2(1) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $t := p_3(1) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Es gilt also $\langle s \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\langle t \rangle = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Damit wird das freie Produkt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ von $\{s, t\}$ erzeugt.
Da der Kolimes $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ nach Konstruktion in der Vorlesung ein Quotient von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist, wird $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ von (den Äquivalenzklassen von) s und t erzeugt.
Es genügt somit zu zeigen, dass s und t im Quotienten trivial sind.
Da der Kolimes bzgl. der Projektionen p_2 und p_3 gebildet wird, gilt

$st^{-1} = p_2(1)p_3(-1) = 1$, also $s = t$. Aus $s^2 = 1$ und $s^3 = t^3 = 1$ folgt damit $t = s = s^3 \cdot s^{-2} = 1 \cdot 1 = 1$.
Damit sind die Erzeuger s und t von $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ trivial, d.h.

$$\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \{1\}.$$

b) Wir zeigen zunächst, dass der Kolimes $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ eine zyklische Gruppe ist.
Betrachte die Präsentierungen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle x \mid x^2 \rangle$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle y \mid y^4 \rangle$. Nach Aufgabe 4.4 a) hat das freie Produkt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dann die Präsentierung

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle x, y \mid x^2, y^4 \rangle.$$

Nun ist der Kolimes $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ der Quotient $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/N$, wobei $N = \langle\langle \iota_1\varepsilon_1(g)\iota_2\varepsilon_2(g^{-1}) \mid g \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rangle\rangle$ ist. (Dabei sind $\iota_1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\iota_2 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ die Inklusionen in das freie Produkt.)
Insbesondere gilt in diesem Quotienten:

$$1 = \iota_1\varepsilon_1(y)\iota_2\varepsilon_2(y^{-1}) = xy^{-1} \Rightarrow x = y$$

Da (die Klassen von) x und y den Kolimes erzeugen und $x = y$ gilt, ist der Kolimes eine zyklische Gruppe und wird von x erzeugt. Wegen $x^2 = 1$ hat $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ höchstens 2 Elemente.
Betrachte nun die Homomorphismen $\varphi_1 = \mathrm{id} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\varphi_2 = \varepsilon_1 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\varphi_1 \circ \varepsilon_1 = \mathrm{id} \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \varphi_2 = \varphi_2 \circ \mathrm{id} = \varphi_2 \circ \varepsilon_2$$

Nach der universellen Eigenschaft des Kolimes existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\varphi : \varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $\varphi \circ \tau_i = \varphi_i$ für $i = 1, 2$, wobei $\tau_1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ und $\tau_2 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ die kanonischen Abbildungen aus der Vorlesung sind.
Da $\varphi_1 = \mathrm{id}$ surjektiv ist, ist φ surjektiv und $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ enthält mindestens 2 Elemente.
Insgesamt hat $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ somit genau 2 Elemente und $\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

***-Aufgabe**
Seien X, Y endliche Mengen und $R \subseteq F(X), S \subseteq F(Y)$ endliche Teilmengen. Sei weiter G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeige:
Sind $N = \langle X \mid R \rangle$ und $G/N = \langle Y \mid S \rangle$ endlich präsentiert, so ist auch G endlich präsentiert.

Lösung: Wähle für jedes $y \in Y$ ein $\tilde{y} \in G$ mit $\tilde{y}N = y$ und setze $\tilde{Y} = \{\tilde{y} \mid y \in Y\}$. Ist $w \in F(Y)$ ein Wort über Y, so bezeichne $\tilde{w}$ das Wort in $F(\tilde{Y})$, das man erhält, indem man jeden Buchstaben y durch $\tilde{y}$ ersetzt. Für jedes $s \in S$ gilt

$\tilde{s}N = 1_{G/N} = N$, d.h. $\tilde{s} \in N$. Also können wir $\tilde{s}$ als Wort w_s über X schreiben. Sei $V = \{\tilde{s}w_s^{-1} \mid s \in S\}$.
Da N in G normal ist, gilt $\tilde{y}x\tilde{y}^{-1} \in N$ für alle $x \in X, \tilde{y} \in \tilde{Y}$. Somit können wir $\tilde{y}x\tilde{y}^{-1}$ als Wort $w_{x,\tilde{y}}$ über X schreiben. Sei $T = \{\tilde{y}x\tilde{y}^{-1}w_{x,\tilde{y}}^{-1} \mid x \in X, \tilde{y} \in \tilde{Y}\}$.
Behauptung: $G \cong \langle X \cup \tilde{Y} \mid R \cup V \cup T\rangle$
Betrachte die Abbildung $\alpha : X \cup \tilde{Y} \to G, x \mapsto x, \tilde{y} \mapsto \tilde{y}$ und den induzierten Homomorphismus $F(\alpha) : F(X \cup \tilde{Y}) \to G$.
Da $N \leq G$ eine Untergruppe ist, gilt $r = 1$ in G für alle $r \in R$. Die Elemente aus V und T sind nach Konstruktion trivial in G. Nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $G' := \langle X \cup \tilde{Y} \mid R \cup V \cup T\rangle$ existiert ein Homomorphismus $\varphi : G' \to G$ mit $\varphi \circ \pi = F(\alpha)$, wobei $\pi : F(X \cup \tilde{Y}) \to \langle X \cup \tilde{Y} \mid R \cup V \cup T\rangle = G'$ die kanonische Projektion ist.
In der Lösung von Aufgabe 6.2 a) haben wir gesehen, dass $X \cup \tilde{Y}$ die Gruppe G erzeugt. Wegen $X \cup \tilde{Y} \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ ist φ damit surjektiv.
Sei $K = \langle X\rangle$ die von X erzeugte Untergruppe von G'. Da die Elemente $r \in R$ nach Definition in G' trivial sind, induziert die Abbildung $X \to G', x \mapsto x$ einen Homomorphismus $\psi : N \to K$ und es gilt für alle $x \in X$:

$$(\varphi|_K \circ \psi)(x) = \varphi(x) = x, \qquad (\psi \circ \varphi|_K)(x) = \psi(x) = x$$

Da K in G' und N in G von X erzeugt werden, sind die Abbildungen $\varphi|_K$ und ψ invers zueinander. Also ist $\varphi|_K$ ein Isomorphismus und es gilt $K \cong N$.
Die Relationen T zeigen weiter, dass K ein Normalteiler in G' ist.
Seien $p_N : G \to G/N$ und $p_K : G \to G'/K$ die kanonischen Projektionen.
Wegen $\varphi(K) = N \subseteq \ker(p_N \circ \varphi : G' \to G \to G/N)$ existiert nach dem Homomorphiesatz ein Homomorphismus $\tilde{\varphi} : G'/K \to G/N$ mit $\tilde{\varphi} \circ p_K = p_N \circ \varphi$. Insbesondere gilt also für $\tilde{y} \in \tilde{Y}$:

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y}K) = \varphi(\tilde{y})N = \tilde{y}N = y$$

Wegen den Relationen V ist für jedes $s \in S$ das Element $\tilde{s} \in K$, also $\tilde{s}K = 1_{G'/K}$ trivial. Dies zeigt, dass die Abbildung $Y \to G'/K, y \mapsto \tilde{y}K$ einen wohldefinierten Homomorphismus $\tilde{\psi} : G/N = \langle Y \mid S\rangle \to G'/K,\ \tilde{\psi}(w) = \tilde{w}K$ induziert.
Nach Konstruktion gilt für alle $y \in Y$:

$$(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{y}K) = \tilde{\psi}(y) = \tilde{y}K$$
$$(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})(y) = \tilde{\varphi}(\tilde{y}K) = y$$

Da G'/K von den $\tilde{y}K$ für $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ bzw. G/N von Y erzeugt wird, sind $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ zueinander inverse Isomorphismen und es gilt $G'/K \cong G/K$.
Nun können wir schließlich zeigen, dass φ injektiv ist. Dafür beweisen wir $\ker(\varphi) = \{1\}$.
Sei $g' \in G'$ mit $\varphi(g') = 1$. Dann gilt: $\tilde{\varphi}(g'K) = \varphi(g')N = N = 1_{G/N}$
Da $\tilde{\varphi}$ als Isomorphismus injektiv ist, gilt also $g'K = 1_{G'/K} = K$, d.h. $g' \in K$. Nun ist aber $\varphi|_K$ ein Isomorphismus und damit injektiv. Daher folgt $g' = 1$.
Insgesamt ist φ ein bijektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus und es gilt $G \cong G'$.
Da $X \cup \tilde{Y}$ und $R \cup V \cup T$ endliche Mengen sind, ist G daher endlich präsentiert.