8. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 8.1
Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum und $a \in A$ beliebig. Weiter bezeichne $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Zeige:

a) Existiert eine Retraktion r von X auf A, so ist der induzierte Homomorphismus $i_\# : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv.

b) Existiert eine Deformationsretraktion von X auf A, so ist der induzierte Homomorphismus $i_\# : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ ein Isomorphismus.

Lösung:

a) Sei $r : X \to X$ eine Retraktion von X auf A. Da $r(X) = A$ gilt, können wir r als Abbildung $r : X \to A$ auffassen. Weiter gilt für alle $a \in A$:

$$r \circ i(a) = r(i(a)) = r(a) = a$$

Dies bedeutet $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Da die in π_1 induzierten Homomorphismen nach Vorlesung funktoriell sind, gilt $r_\# \circ i_\# = (r \circ i)_\# = (\mathrm{id_A})_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)}$. Somit ist die Komposition $r_\# \circ i_\#$ injektiv und daher $i_\#$ injektiv.

b) Sei $F : X \times [0, 1] \to X, (x, s) \mapsto F_s(x)$ eine Deformationsretraktion von X auf A. Dann ist insbesondere F_1 eine Retraktion von X auf A und $i_\#$ ist injektiv nach Teil a).
Es bleibt zu zeigen, dass $i_\#$ auch surjektiv ist.
Sei $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$ beliebig. Betrachte die Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \to X$, $h(s, t) := F_s(\alpha(t))$. Da F und α stetig sind, ist F als Komposition stetiger Abbildungen stetig. Desweiteren gilt für alle $s, t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
h(0, t) &= F_0(\alpha(t)) = \mathrm{id}_X(\alpha(t)) = \alpha(t) \\
h(1, t) &= F_1(\alpha(t)) \in A \\
h(s, 0) &= F_s(\alpha(0)) = F_s(a) = a \\
h(s, 1) &= F_s(\alpha(1)) = F_s(a) = a
\end{aligned}$$

Also ist h eine Homotopie *rel* ∂ zwischen α und $F_1 \circ \alpha$, wobei $F_1 \circ \alpha$ ein Weg in A mit $F_1 \circ \alpha(0) = a = F_1 \circ \alpha(1)$ ist. Nun gilt:

$$i_\#([F_1 \circ \alpha]) = [i \circ F_1 \circ \alpha] = [F_1 \circ \alpha] = [\alpha]$$

Somit liegt $[\alpha]$ im Bild von $i_\#$ und da $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$ beliebig war, ist $i_\#$ surjektiv.
Insgesamt ist $i_\#$ ein bijektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus.

Aufgabe 8.2
Berechne $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (1,0))$.

Lösung: Wir zeigen, dass $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$ gilt, indem wir nachweisen, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homotopieäquivalent zu S^1 ist.
Sei $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Inklusion und $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1, x \mapsto \frac{1}{\|x\|} \cdot x$. Da die Abbildungen $x \mapsto \|x\|,\ t \mapsto t^{-1}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind, ist r stetig.
Wir zeigen nun, dass i und r zueinander homotopieinvers sind.
Für $z \in S^1$ gilt nach Definition $\|z\| = 1$, also $r(z) = z$. Folglich gilt $r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$.
Es bleibt zu zeigen, dass $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ gilt. Betrachte die Abbildung
$h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (x,s) \mapsto h_s(x) := (1-s) \cdot x + s \cdot \frac{1}{\|x\|} \cdot x$. Diese Abbildung ist stetig. Wir müssen aber noch nachprüfen, dass h wohldefiniert ist, d.h. dass $h_s(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, s \in [0,1]$ gilt.
Per Widerspruch: Seien $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $s \in [0,1]$ mit $h_s(x) = 0$. Dann gilt:

$$0 = (1-s) \cdot x + s \cdot \frac{1}{\|x\|} \cdot x = (1 - s + s \cdot \frac{1}{\|x\|}) \cdot x$$

Da $x \neq 0$ gilt, folgt:

$$0 = (1 - s + s \cdot \frac{1}{\|x\|}) \Rightarrow 1 = s - \frac{s}{\|x\|} = (1 - \frac{1}{\|x\|}) \cdot s$$

Es gilt aber $0 \leq s \leq 1$ und $(1 - \frac{1}{\|x\|}) < 1$ wegen $\|x\| \neq 0$, also $(1 - \frac{1}{\|x\|}) \cdot s < 1$. ↯
Somit gilt $h_s(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, s \in [0,1]$ und h ist eine wohldefinierte stetige Abbildung.
Für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} h_0(x) &= (1-0) \cdot x + 0 \cdot \frac{1}{\|x\|} \cdot x = x \\ h_1(x) &= (1-1) \cdot x + 1 \cdot \frac{1}{\|x\|} \cdot x = \frac{1}{\|x\|} \cdot x = r(x) = i \circ r(x) \end{aligned}$$

Somit ist h eine Homotopie zwischen $h_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ und $h_1 = i \circ r$ und es gilt $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$. Damit sind i und r zueinander homotopieinvers und r ist eine Homotopieäquivalenz.
Nach einem Satz aus Kapitel 5 der Vorlesung ist der induzierte Homomorphismus $r_\#$ damit ein Isomorphismus. Also gilt:

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (1,0)) \cong \pi_1(S^1, r(1,0)) = \pi_1(S^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$$

Aufgabe 8.3
Im Folgenden bezeichne $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ den abgeschlossenen n-dimensionalen Einheitsball und $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} = \partial D^{n+1}$ die n-dimensionale Sphäre (wobei $\|.\|$ die 2-Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ sei).
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine Retraktion $r_1 : \mathbb{R}^3 \to A$ auf einen Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^3$, der homöomorph zu S^1 ist.

b) Es gibt eine Retraktion $r_2 : \mathbb{R}^2 \to \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

c) Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $Y \subseteq X$ ein wegzusammenhängender Teilraum und $y \in Y$ so, dass $\pi_1(X, y)$ frei und $\pi_1(Y, y) \neq \{1\}$ endlich ist, so gibt es keine Retraktion $r_3 : X \to Y$.

d) Es gibt eine Retraktion $r_4 : S^1 \times D^2 \to S^1 \times S^1$, wobei $S^1 \times S^1 = \partial(S^1 \times D^2)$ der Randtorus von $S^1 \times D^2$ sei.

Lösung:

a) Behauptung: Es gibt keine Retraktion $r_1 : \mathbb{R}^3 \to A$ mit $A \cong S^1$.
Per Widerspruch: Angenommen, es gibt eine solche Retraktion r_1. Dann ist der durch die Inklusion $i_1 : A \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ in π_1 induzierte Homomorphismus $(i_1)_\#$ nach Aufgabe 8.1 a) injektiv.
Da $\mathbb{R}^3$ kontrahierbar ist, gilt $\pi_1(\mathbb{R}^3, x) = \{1\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Sei $a \in A$ beliebig. Da A homöomorph zu S^1 ist, gilt $\pi_1(A, a) \cong \pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$.
Dann ist $(i_1)_\# : \mathbb{Z} \cong \pi_1(A, a) \to \pi_1(\mathbb{R}^3, a) = \{1\}$ ein injektiver Homomorphismus. ↯
Somit kann keine solche Retraktion r_1 existieren.

b) Behauptung: Es gibt eine Retraktion $r_2 : \mathbb{R}^2 \to \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Definiere $r_2 : \mathbb{R}^2 \to \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ durch die lineare Projektion $(x, y) \mapsto (x, 0)$.
Dann ist r_2 stetig, $r_2(\mathbb{R}^2) = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $r_2(t, 0) = (t, 0)$, also $r_2(x) = x$ für alle $x \in \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$. r ist damit eine Retraktion von $\mathbb{R}^2$ auf $\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

c) Behauptung: Es gibt keine Retraktion $r_3 : X \to Y$.
Gäbe es eine solche Retraktion r_3, so wäre der durch die Inklusion $i_3 : Y \hookrightarrow X$ induzierte Homomorphismus $(i_3)_\# : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, y)$ nach 8.1 a) injektiv. Da $\pi_1(X, y)$ frei und damit nach Aufgabe 3.3 a) torsionsfrei ist, enthält $\pi_1(X, y)$ keine nicht-triviale endliche Untergruppe. Folglich kann $(i_3)_\#$ nicht injektiv sein und es gibt keine Retraktion von X auf Y.

d) Behauptung: Es gibt keine Retraktion $r_4 : S^1 \times D^2 \to S^1 \times S^1$.
Seien $x, y \in S^1$ beliebig. Nach Satz 5 in Kapitel 5 der Vorlesung gilt:

$$\pi_1(S^1 \times S^1, (x, y)) \cong \pi_1(S^1, x) \times \pi_1(S^1, y) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

Da D^2 kontrahierbar ist, gilt zudem $\pi_1(D^2, y) = \{1\}$. Also:

$$\pi_1(S^1 \times D^2, (x, y)) \cong \pi_1(S^1, x) \times \pi_1(D^2, y) \cong \mathbb{Z} \times \{1\} \cong \mathbb{Z}$$

Angenommen, es gäbe eine Retraktion $r_4 : S^1 \times D^2 \to S^1 \times S^1$. Dann würde die Inklusion $S^1 \times S^1 \hookrightarrow S^1 \times D^2$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ induzieren. Da $\mathbb{Z}^2$ nicht zyklisch ist, existiert kein solcher injektive Homomorphismus.

Aufgabe 8.4
Sei G eine abzählbare Gruppe. Zeige, dass es eine Gruppe G^* gibt, welche G als

Untergruppe enthält und in welcher alle Elemente der gleichen Ordnung zueinander konjugiert sind.

Lösung: Die folgende Argumentation orientiert sich am Beweis von Satz 7 in Kapitel 5 der Vorlesung:
Wähle eine Abzählung $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ von G mit $g_i \neq g_j$ für $i \neq j$. (Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass G abzählbar unendlich ist. Für eine endliche Gruppe kann der Beweis analog geführt werden.)
Zunächst konstruieren wir eine Gruppe $G^\dagger$, die G als Untergruppe enthält, sodass alle Elemente der selben Ordnung aus G in $G^\dagger$ zueinander konjugiert sind. Induktiv bilden wir dazu eine aufsteigende Folge von Gruppen $G_k, k \geq 1$, sodass alle Elemente der selben Ordnung aus $\{g_1, \ldots, g_k\}$ in G_k zueinander konjugiert sind.
Setze $G_1 := G$. Ist für ein $k \geq 1$ die Gruppe G_k konstruiert, definieren wir G_{k+1} wie folgt: Gibt es kein $1 \leq i \leq k$ mit $\operatorname{ord}(g_{k+1}) = \operatorname{ord}(g_i)$, so setze $G_{k+1} := G_k$. Andernfalls wähle das minimale $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\operatorname{ord}(g_{k+1}) = \operatorname{ord}(g_i)$. Die Abbildung $\alpha : \langle g_i \rangle \to \langle g_{k+1} \rangle, \alpha(g_i^s) = g_{k+1}^s$ definiert einen Isomorphismus zwischen den Erzeugnissen $\langle g_i \rangle$ und $\langle g_{k+1} \rangle$. Definiere G_{k+1} als die HNN-Erweiterung $G_{k+1} = G_k *_\alpha$.
Seien $m, n \in \{1, \ldots, k+1\}$ in G_{k+1} mit $\operatorname{ord}(g_m) = \operatorname{ord}(g_n)$ beliebig. Gilt $n, m < k+1$, so sind g_m und g_n nach Voraussetzung schon in G_k zueinander konjugiert. Gilt hingegen $m < k+1$ und $n = k+1$, so ist $g_n = g_{k+1}$ nach Konstruktion in $G_{k+1} = G_k *_\alpha$ konjugiert zu g_i. Da g_i nach Voraussetzung in G_k zu g_m konjugiert ist, sind auch g_n und g_m in G_{k+1} konjugiert.
Somit sind alle Elemente der selben Ordnung aus $\{g_1, \ldots, g_{k+1}\}$ in G_{k+1} zueinander konjugiert.
Setze nun $G^\dagger := \bigcup\limits_{k \geq 1} G_k$. Dann ist $G^\dagger$ eine abzählbare Gruppe, die G als Untergruppe enthält, sodass alle Elemente der selben Ordnung aus G in $G^\dagger$ konjugiert sind.
Wir iterieren diesen Prozess, indem wir $\tilde{G}_1 := G^\dagger$ und $\tilde{G}_{k+1} = (\tilde{G}_k)^\dagger$ für $k \geq 1$ definieren. Nach Konstruktion sind somit alle Elemente der selben Ordnung aus $\tilde{G}_k$ in $\tilde{G}_{k+1}$ zueinander konjugiert.
Schließlich ist $G^* := \bigcup\limits_{k \geq 1} \tilde{G}_k$ die gesuchte Gruppe. $G^* \geq G^\dagger \geq G$ enthält G als Untergruppe. Sind $g, h \in G^*$ mit $\operatorname{ord}(g) = \operatorname{ord}(h)$, so gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $g, h \in \tilde{G}_k$. In $\tilde{G}_{k+1} \leq G^*$ sind g und h damit konjugiert.

***-Aufgabe**
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) G enthält überabzählbar viele Normalteiler.

ii) G hat überabzählbar viele, paarweise nicht-isomorphe Quotienten.

Lösung: „*ii*) $\Rightarrow$ *i*)“ Diese Implikation folgt direkt: Sind $f_1 : G \to Q_1$ und $f_2 : G \to Q_2$ Epimorphismen mit $Q_1 \not\cong Q_2$, so sind $N_1 = \ker(f_1)$ und $N_2 = \ker(f_2)$ verschiedene Normalteiler in G. Hat G also überabzählbar viele, paarweise nicht-isomorphe Quotienten, so enthält G auch überabzählbar viele Normateiler.
„*i*) $\Rightarrow$ *ii*)“ Wir nehmen an, dass G überabzählbar viele Normateiler enthält.

Um zu zeigen, dass G überabzählbar viele, paarweise nicht-isomorphe Quotienten besitzt, argumentieren wir per Widerspruch.
Angenommen, G habe nur abzählbar viele, paarweise nicht-isomorphe Quotienten. Dann gibt es einen Quotienten Q von G und eine überabzählbare Familie $\mathcal{N}$ von Normalteilern in G, sodass $G/N \cong Q$ für alle $N \in \mathcal{N}$ gilt.
Jeder Normalteiler $N \in \mathcal{N}$ gibt uns einen Homomorphismus $\alpha_N : G \to Q$ mit $\ker(\alpha_N) = N$. Insbesondere ist die Menge der Homomorphismen $\mathrm{Hom}(G, Q)$ überabzählbar.
Andererseits ist G endlich erzeugt. Seien also $g_1, \dots, g_n$ Erzeuger von G. Da ein Homomorphismus $f : G \to Q$ eindeutig durch die Bilder $f(g_1), \dots, f(g_n)$ festgelegt ist, ist die Mächtigkeit $\#\mathrm{Hom}(G, Q)$ durch $\#\mathrm{Abb}(\{g_1, \dots, g_n\}, Q) = \#Q^n$ beschränkt.
Da G endlich erzeugt ist, ist Q endlich erzeugt und damit abzählbar. Folglich ist auch Q^n abzählbar und damit $\#\mathrm{Hom}(G, Q)$ ebenfalls abzählbar. $\lightning$
$\#\mathrm{Hom}(G, Q)$ kann nicht gleichzeitig überabzählbar und abzählbar sein und wir erhalten einen Widerspruch. G besitzt also überabzählbar viele, paarweise nicht-isomorphe Quotienten.