8. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Definition: Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum.
Eine stetige Abbildung $r : X \to X$ heißt *Retraktion* von X auf A, wenn $r(X) = A$ und $r(a) = a$ für alle $a \in A$ gilt.
Eine Homotopie $F : X \times [0,1] \to X, (x,s) \mapsto F_s(x)$ zwischen $F_0 = \mathrm{id_X}$ und einer Retraktion F_1 von X auf A heißt *Deformationsretraktion* von X auf A, wenn $F_s(a) = a$ für alle $a \in A$ und alle $s \in [0,1]$ gilt.

Aufgabe 8.1
Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum und $a \in A$ beliebig. Weiter bezeichne $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Zeige:

a) Existiert eine Retraktion r von X auf A, so ist der induzierte Homomorphismus $i_\# : \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ injektiv.

b) Existiert eine Deformationsretraktion von X auf A, so ist der induzierte Homomorphismus $i_\# : \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 8.2
Berechne $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (1,0))$.
Hinweis: Zeige, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homotopieäquivalent zur 1-dimensionalen Sphäre S^1 ist.

Aufgabe 8.3
Im Folgenden bezeichne $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ den abgeschlossenen n-dimensionalen Einheitsball und $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} = \partial D^{n+1}$ die n-dimensionale Sphäre (wobei $\|.\|$ die 2-Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ sei).
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine Retraktion $r_1 : \mathbb{R}^3 \to A$ auf einen Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^3$, der homöomorph zu S^1 ist.

b) Es gibt eine Retraktion $r_2 : \mathbb{R}^2 \to \{(t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

c) Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $Y \subseteq X$ ein wegzusammenhängender Teilraum und $y \in Y$ so, dass $\pi_1(X,y)$ frei und $\pi_1(Y,y) \neq \{1\}$ endlich ist, so gibt es keine Retraktion $r_3 : X \to Y$.

d) Es gibt eine Retraktion $r_4 : S^1 \times D^2 \to S^1 \times S^1$, wobei $S^1 \times S^1 = \partial(S^1 \times D^2)$ der Randtorus von $S^1 \times D^2$ sei.

Bitte wenden.

Aufgabe 8.4
Sei G eine abzählbare Gruppe. Zeige, dass es eine Gruppe G^* gibt, welche G als Untergruppe enthält und in welcher alle Elemente der gleichen Ordnung zueinander konjugiert sind.

***-Aufgabe**
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) G enthält überabzählbar viele Normalteiler.

ii) G hat überabzählbar viele, paarweise nicht-isomorphe Quotienten.

Abgabe bis: Donnerstag, den 17.12.2015, 8 Uhr