9. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Definition: Sei E ein topologischer Raum, X eine Menge und $f : E \to X$ eine surjektive Abbildung. Die *Quotiententopologie* auf X bzgl. der Quotientenabbildung f ist definiert durch

$$\mathcal{T}_{\text{quot}} := \{U \subseteq X \mid f^{-1}(U) \text{ offen in } E\},$$

d.h. U ist genau dann offen in X, wenn das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in E ist. Beachte, dass f nach Definition stetig bzgl. der Quotiententopologie ist.

Aufgabe 9.1
Sei E ein topologischer Raum und G eine Gruppe, die durch Homöomorphismen auf E wirkt, d.h. für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $x \mapsto g(x)$ ein Homöomorphismus. Weiter gelte die Bedingung:

($*$) Für alle $x \in E$ existiert eine offene Umgebung U_x von x mit $gU_x \cap U_x = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{1\}$.

Sei $X := E/G$ der Quotientenraum von E bzgl. der Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G : g(x) = y$$

und $p : E \to X, x \mapsto [x]$ die Quotientenabbildung.
Zeige, dass p eine Überlagerung ist.

Aufgabe 9.2
Seien E_1, E_2 topologische Räume und G_1, G_2 Gruppen, sodass G_i durch Homöomorphismen auf E_i wirkt ($i = 1, 2$). Weiter erfüllen beide Wirkungen die Bedingung ($*$) aus Aufgabe 9.1. Zeige:

a) Durch $(g_1, g_2)(x_1, x_2) := (g_1(x_1), g_2(x_2))$ für $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, x_1 \in E_1$ und $x_2 \in E_2$ wird eine Wirkung durch Homöomorphismen von $G_1 \times G_2$ auf $E_1 \times E_2$ erklärt, welche die Bedingung ($*$) erfüllt.

b) Der Quotient $(E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2)$ ist homöomorph zum Produktraum $E_1/G_1 \times E_2/G_2$.

Bitte wenden.

Aufgabe 9.3
Seien E, X wegzusammenhängende topologische Räume, $p \in X$ beliebig und $\varphi : E \to X$ eine Überlagerung.
Für $q \in \varphi^{-1}(p)$ und $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$ setzen wir $q^{[\alpha]} := \tilde{\alpha}_q(1)$, wobei $\tilde{\alpha}_q : [0, 1] \to E$ der eindeutige Lift von α mit $\tilde{\alpha}_q(0) = q$ ist. (Dieser eindeutige Lift $\tilde{\alpha}_q$ existiert nach Korollar A zu Satz 10 in Kapitel 5 der Vorlesung.)
Zeige, dass diese Konstruktion von $q^{[\alpha]}$ eine wohldefinierte, transitive Rechtswirkung von $\pi_1(X, p)$ auf $\varphi^{-1}(p)$ erklärt.

Definition: Eine Gruppe G heißt *divisibel*, wenn es für jedes $g \in G$ und jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ein $h \in G$ mit $h^n = g$ gibt.

Aufgabe 9.4
Sei G eine abzählbare Gruppe. Zeige: Es gibt eine divisible Gruppe G^*, welche G als Untergruppe enthält.

Hinweis: Bette G in eine abzählbare Gruppe ein, in welcher Elemente jeder Ordnung existieren, und benutze daraufhin Aufgabe 8.4.

Definition: Ein topologischer Raum E heißt *einfach-zusammenhängend*, wenn E wegzusammenhängend ist und $\pi_1(E, x) = \{[\varepsilon_x]\}$ für ein (und damit jedes) $x \in E$ gilt.

***-Aufgabe**
Seien E, X, φ und $p \in X$ wie in Aufgabe 9.3. Zeige:

a) Die in 9.3 definierte Wirkung von $\pi_1(X, p)$ auf $\varphi^{-1}(p)$ ist genau dann frei, wenn E einfach-zusammenhängend ist.

b) Sei $\psi : E \to E$ eine Decktransformation für die Überlagerung $\varphi : E \to X$ (d.h. $\varphi \circ \psi = \varphi$) und $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$. Dann gilt $\psi(q^{[\alpha]}) = \psi(q)^{[\alpha]}$ für alle $q \in \varphi^{-1}(p)$.
Die in Aufgabe 9.3 konstruierte Rechtswirkung von $\pi_1(X, p)$ kommutiert also mit der Linkswirkung durch Decktransformationen.

Abgabe bis: Donnerstag, den 14.1.2016, 8 Uhr