§1 Gruppen und Wirkungen

1. <u>Erinnerung</u> Sei X eine nicht leere Menge. Dann ist(*) $Sym(X) = \{\alpha : X \to X \mid \alpha \text{ bijektiv}\}$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen, mit id_X als Neutralelement. Wenn X endlich ist, $\#X = n$, so gilt $\#Sym(X) = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$.

(*) die symmetrische Gruppe

Sei G eine Gruppe. Eine <u>(Links-) Wirkung</u> von G auf X ist eine Abbildung $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g(x)$ mit

(W1) $1(x) = x$ für alle $x \in X$

(W2) $(gh)(x) = g(h(x))$ für alle $g,h \in G$, $x \in X$

Umformulierung: definiere $W : G \to Sym(X)$ durch $W(g)(x) = g(x)$, dann folgt aus (W1) und (W2), dass W ein Homomorphismus ist, denn:

$$\underset{\substack{\| \\ W(g \circ g^{-1})(x)}}{(g^{-1} \circ g)(x)} \overset{W1}{\underset{W2}{=}} x \quad \Rightarrow \quad W(g) \text{ bijektiv}$$

$$W(gh)(x) = (gh)(x) = g(h(x)) = W(g)(W(h)(x))$$

$\Rightarrow W$ Homomorphismus $\square$

2. <u>Bsp</u> (a) $Sym(X) \times X \to X$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha(x)$ ist eine Wirkung

(b) G Gruppe, $H \le G$ Untergruppe,
$X = G/H = \{aH \mid a \in G\}$ Menge der Linksnebenklassen
$G \times G/H \to G/H$, $(g, aH) \mapsto gaH$
ist Wirkung

(c) G Gruppe, $X = G$, $g(x) = gxg^{-1}$
ist Wirkung von G auf sich, die Konjugationswirkung.
Hier gilt zusätzlich $g(xy) = g(x) \cdot g(y)$,
d.h. $W: G \to \mathrm{Aut}(G) \le \mathrm{Sym}(G)$
$\mathrm{Aut}(G) = \{\alpha: G \to G \mid \alpha \text{ Automorphismus von } G\}$

3. Def Sei $G \times X \to G$ eine Wirkung, sei $x \in X$.
Der Stabilisator von x ist die Untergruppe
$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\} \le G$$
Die Bahn von x ist die Teilmenge
$$G(x) = \{g(x) \mid g \in G\} \subseteq X$$

Lemma A Die Abbildung
$$G/G_x \to G(x), \quad gG_x \mapsto g(x)$$
ist wohldefiniert und bijektiv

Beweis Für (alle) $h \in G_x$ gilt $gh(x) = g(x)$, also ist die Abbildung wohldefiniert. Sie ist offensichtlich surjektiv. Ist $g(x) = \tilde{g}(x)$, so folgt $g^{-1}\tilde{g}(x) = x$

also $g^{-1}\tilde{g} \in G_x \Rightarrow gG_x = \tilde{g}G_x$, folglich ist die Abbildung injektiv.

<u>Lemma B</u> Ist $y = g(x)$, so gilt $G_y = gG_xg^{-1}$

<u>Beweis</u> $h(g(x)) = g(x) \Leftrightarrow (g^{-1}hg)(x) = x \Leftrightarrow$
$g^{-1}hg \in G_x \Leftrightarrow h \in gG_xg^{-1}$

<u>Folgerung C</u> Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler mit $N \subseteq G_x$, so gilt $N \subseteq G_y$ für alle $y \in G(x)$.

4\. <u>Satz</u> Sei $G \times X \to X$ eine Wirkung, seien $x, y \in X$. Dann gilt entweder $G(x) = G(y)$ oder $G(x) \cap G(y) = \emptyset$ (Bahnen sind gleich oder disjunkt).

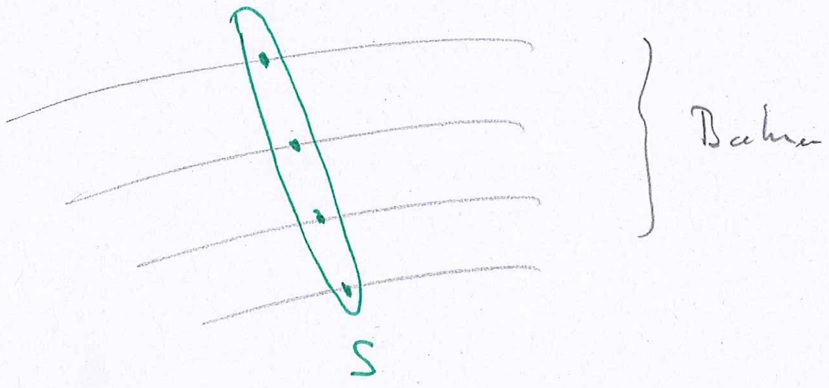
<u>Beweis</u> Angenommen, es gilt $z \in G(x) \cap G(y)$, also $z = a(x) = b(y)$ für $a, b \in G$. Es folgt
$b^{-1}a(x) = y \Rightarrow y \in G(x) \Rightarrow G(y) \subseteq G(x)$
genauso $G(x) \subseteq G(y)$ □.

<u>Definition</u> Man schreibt

$$G\backslash X = \{ G(x) \mid x \in X \}$$

<u>Menge der Bahnen</u>, <u>Bahnenraum</u>

Eine Teilmenge $S \subseteq X$ heißt Schnitt (der Wirkung), wenn gilt: zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $s \in S$ mit $x \in G(s)$



Es folgt $\# X = \sum_{s \in S} \# G(s)$ (wenn X endlich ist)

(Bahnengleichung)

5. Definition Eine Wirkung $G \times X \to X$ heißt transitiv, wenn sie eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(i) Für alle $x, y \in X$ gibt es $g \in G$ mit $g(x) = y$

(ii) Für alle $x \in X$ gilt $G(x) = X$

(iii) Für ein $z \in X$ gilt $G(z) = X$

Beweis der Äquivalenzen:

(i) $\Rightarrow$ (ii) klar (ii) $\Rightarrow$ (iii) klar

(iii) $\Rightarrow$ (i) Schreibe $x = a(z)$, $y = b(z)$ $\Rightarrow$ $y = \underbrace{ba^{-1}}_{=g}(x)$ $\square$

<u>Bsp</u> (a) $\mathrm{Sym}(X)\times X \to X$ ist transitiv

(b) $G \times G/H \to G/H$ ist transitiv

(c) $G\times G \to G$, $g(x) = gxg^{-1}$ ist <u>nicht</u> transitiv, wenn $G \neq \{1\}$, denn die Bahn von 1 ist $\{1\}$.

6. Sei $G \times X \to X$ eine Wirkung, sei

$$K = \bigcap_{x\in X} G_x \le G. \text{ Dann gilt } K \trianglelefteq G,$$

man nennt K den <u>Kern</u> der Wirkung.

Die Wirkung heißt <u>treu</u>, wenn gilt $K = \{1\}$.

Denn: sei $W : G \to \mathrm{Sym}(X)$, $g \mapsto [x \mapsto g(x)]$ der zugehörige Homomorphismus. Dann gilt

$$\ker(W) = \{g\in G \mid g(x) = x \text{ für alle } x\in X\} = K.$$

<u>Lemma</u> Mit diesen Bezeichnungen gilt:

G/K wirkt treu auf X durch

$$G/K \times X \to X, \quad (gK, x) \mapsto g(x)$$

<u>Beweis</u>: Homomorphiesatz

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "W"] \arrow[dr] & & \mathrm{Sym}(X) \\ & G/K \arrow[ur, "\text{injektiv}"'] & \end{tikzcd}$$

$\square$

Bsp (a) $\mathrm{Sym}(X)$ wirkt treu auf X

(b) $G \times G/H \to G/H$ hat Kern

$$K = \bigcap \{ gHg^{-1} \mid g \in G \},$$ die

Wirkung ist treu genau dann, wenn H kein echten Normalteiler $N \neq \{1\}$ von G enthält

(c) $G \times G \to G$, $g(x) = gxg^{-1}$ $\rightsquigarrow$

$$K = \mathrm{Cen}(G),$$

das Zentrum von G ist dabei

$$\mathrm{Cen}(G) = \{ g \in G \mid ga = ag \text{ für alle } a \in G \}$$
$$= \{ g \in G \mid gag^{-1} = a \text{ für alle } a \in G \}.$$

7. Links vs. Rechts Eine Rechtswirkung einer Gruppe G auf eine nicht leere Menge X ist eine Abbildung $X \times G \to X$, $(x,g) \longmapsto x^g$ mit

(RW1) $x^1 = x$ für alle $x \in X$

(RW2) $x^{(gh)} = (x^g)^h$ für alle $x \in X$, $g,h \in G$

Aus jeder Rechtswirkung erhält man eine Linkswirkung durch $g(x) = x^{(g^{-1})}$ und umgekehrt.

Rechts- und Linkswirkungen sind nicht dasselbe, lassen sich aber 1-1 ineinander übersetzen!

Bsp G Gruppe, $H \leq G$ Untergruppe $\leadsto$

Rechtswirkung $G \times H \to G$
$(g,h) \longmapsto gh$

Die Bahnen dieser Rechtswirkung sind genau die Linksnebenklassen $aH \subseteq G$!

Alles, was wir über Linkswirkungen beweisen, gilt entsprechend für Rechtswirkungen.

8. Erinnerung: Index einer Untergruppe

Sei $H \leq G$ Untergruppe. Der <u>Index</u> von H in G ist
$$[G:H] = \# G/H = \#\{aH \mid a \in G\}$$

Der <u>Satz von Lagrange</u> besagt: es gilt
$$\# G = [G:H] \cdot \# H$$

<u>Beweis</u> Die Linksnebenklasse aH ist genau die Bahn von a unter der Rechtswirkung
$$G \times H \to G, \quad (a,h) \mapsto ah$$

Der Stabilisator von a ist $H_a = \{1\}$, denn $ah = a \Leftrightarrow h = 1$. Also $\# aH = \# H$, die Bahnen = Nebenklassen sind disjunkt (§ 1.3), also $\# G = [G:H] \cdot \# H$.

<u>Bem</u> Die obige Gleichung besagt insbesondere: sind zwei der Mengen $G, H, G/H$ endlich, so ist es die dritte Menge auch. $\square$

<u>Bsp</u> $G = (\mathbb{Z}, +)$ $\quad H = 3 \cdot \mathbb{Z} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\}$

$[G:H] = 3$, aber G und H sind unendlich

9. <u>Satz (Poincarés Theorem)</u>

Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit $[G:H] = n < \infty$. Dann gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq H \subseteq G$ und $[G:N] \leq n!$

<u>Beweis</u> Betrachte die Wirkung von G auf $X = G/H$. Sei $W: G \to \mathrm{Sym}(X)$ der entsprechende Homomorphismus, vgl. §1.1, sei $N = \ker(W)$. Nach dem Homomorphiesatz ist $G/N \longrightarrow \mathrm{Sym}(X)$ injektiv und $\#\mathrm{Sym}(X) = n!$, also $[G:N] \leq n!$ Da H der Stabilisator von $H \in X$ ist, folgt $N \subseteq H$ □

10. <u>Erzeugendensysteme</u> Sei G eine Gruppe und sei $A \subseteq G$ eine beliebige Teilmenge. Das <u>Erzeugnis</u> von A ist die Untergruppe

$$\langle A \rangle = \bigcap \{ H \subseteq G \mid H \text{ Untergruppe mit } A \subseteq H \}$$

<u>Bsp</u> $\langle G \rangle = G$, $\langle \emptyset \rangle = \{1\}$

Andere Beschreibung: sei $A^* = A \cup \{1\} \cup A^{-1}$, wobei $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$. Dann gilt

$$\langle A \rangle = \{ g \in G \mid \text{es gibt } a_1, \dots, a_n \in A^* \text{ mit } g = a_1 \cdots a_n,\ n \geq 1 \}$$

Denn: die rechte Seite ist eine Untergruppe, enthält A, also "$\subseteq$". Jede Untergruppe $H \subseteq G$, die A enthält, enthält auch A^* und damit die rechte Seite, also "$\supseteq$" □

Wenn gilt $\langle A \rangle = G$, so heißt A Erzeugendensystem von G.

Eine Gruppe G heißt endlich erzeugt (besser: endlich erzeugbar), wenn es eine endliche Menge $A \subseteq G$ gibt mit $\langle A \rangle = G$.

Bsp • Jede endliche Gruppe G ist endlich erzeugt, setze $A = G$

• $(\mathbb{Z}, +)$ ist endlich erzeugt, setze $A = \{1\}$
$\leadsto A^* = \{1, 0, -1\}$

• $(\mathbb{Q}, +)$ ist nicht endlich erzeugt (ÜA)

Klar: jede endlich erzeugte Gruppe ist abzählbar.

Lemma Sei G endlich erzeugt, sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann ist $\varphi(G)$ endlich erzeugt.

Beweis ~~Sei~~ Sei $A \subseteq G$ endliches Erzeugendensystem, dann ist $\varphi(A) \subseteq \varphi(G)$ endlich und erzeugt $\varphi(G)$, denn:

$g \in G$, $g = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ $\quad a_i \in A^*$
$\Rightarrow \varphi(g) = \varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n)$ $\square$

Achtung: wir werden sehen: Untergruppen von endlich erzeugten Gruppen sind nicht notwendig endlich erzeugt! Beispiele folgen später.

11. Theorem Sei G eine Gruppe, sei $H \leq G$ eine Untergruppe mit $[G:H] = n < \infty$. Dann sind äquivalent: (i) G ist endlich erzeugt (ii) H ist endlich erzeugt.

Beweis Schreibe $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_n$ mit $g_1 = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\{h_1, \dots, h_m\} \subseteq H$ ein Erzeugendensystem. Dann ist $\{h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_n\}$ ein Erzeugendensystem für G.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Definiere eine Abbildung $G \to G$, $g \mapsto \bar{g}$ durch $Hg = H\bar{g}$, $\bar{g} = g_i$. Für die Abbildung gilt dann: $\bar{\bar{g}} = \bar{g}$ (klar), $g\bar{g}^{-1} \in H$ (weil $g = h\bar{g}$ für ein $h \in H$), $\overline{\bar{g}f} = \overline{gf}$ (weil $H\overline{\bar{g}f} = H\bar{g}f = Hgf = H\overline{gf}$) und $\bar{h} = 1$ für $h \in H$ (weil $g_1 = 1$).

Sei $A \subseteq G$ ein endliches Erzeugendensystem, sei $A^* = A \cup \{1\} \cup A^{-1}$.

Beh: $B = \{ g_i a \overline{g_i a}^{-1} \mid i = 1, \dots, n,\ a \in A^* \}$ ist ein Erzeugendensystem für H.

Denn: Sei $h \in H$. Dann gibt es $a_1, \dots, a_r \in A^*$ mit

$$h = a_1 \cdots a_r = \underbrace{a_1 \bar{a}_1^{-1}}_{= b_1 \in B} \bar{a}_1 a_2 \cdots a_r$$

$$= b_1 \underbrace{\bar{a}_1 a_2 \overline{\bar{a}_1 a_2}^{-1}}_{= b_2 \in B} \overline{\bar{a}_1 a_2}\, a_3 \cdots a_r$$

$$= b_1 b_2 \underbrace{\left(\overline{\overline{a_1}a_2}a_3\right) \overline{\overline{\overline{a_1}a_2}a_3}^{-1}}_{= b_3 \in B} \overline{\overline{\overline{a_1}a_2}a_3}\, a_4 \cdots a_r$$

$$= \vdots$$

$$= b_1 \cdots b_{r-1} \overline{\overline{\overline{\overline{a_1}a_2}a_3} \cdots a_{r-1}}\, a_r$$

$$\overset{(!)}{=} b_1 \cdots b_{r-1} \underbrace{\left(\overline{\overline{\overline{\overline{a_1}a_2}a_3} \cdots a_{r-1}}\, a_r\right)\left(\overline{\overline{\overline{a_1}a_2} \cdots a_r}\right)^{-1}}_{= b_r \in B}$$

weil

$$\overline{\overline{\overline{\overline{a_1}a_2}a_3} \cdots a_r} = \overline{\underbrace{a_1 \cdots a_r}_{\in H}} = 1 \qquad \square$$

#

12. Def Eine Gruppe G heißt <u>noethersch</u>, wenn jede abzählbar unendliche aufsteigende Kette von Untergruppen

$H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq G$

nach endlich vielen Schritten konstant wird, d.h.

$H_{m+j} = H_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, alle $j \geq 0$.

Klar: endliche Gruppen sind noethersch.

<u>Lemma</u> Eine Gruppe ist genau dann noethersch, wenn jede Untergruppe $H \leq G$ (insbesondere auch G selbst) endlich erzeugt ist.

<u>Bew.</u>: (i) Angenommen, G ist noethersch, $H \leq G$ ist Untergruppe und angenommen, H ist nicht endlich erzeugt. Zu jeder endlichen Teilmenge $\{h_0, \dots, h_k\} \subseteq H$ gibt es also $h_{k+1} \in H - \langle\{h_0, \dots, h_k\}\rangle$. Setze $h_0 = 1$, wähle $h_{k+1} \in H - \langle\{h_0, \dots, h_k\}\rangle$, setze $H_k = \langle\{h_0, \dots, h_k\}\rangle \Rightarrow$

$H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \dots$ ist unendlich echt aufsteigende Kette ↯

Angenommen, G ist nicht noethersch. Dann gibt es eine unendliche echt aufsteigende Kette

$H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \dots$ in G. Setze

$H_\infty = \bigcup_{j \geq 0} H_j$, dann ist $H_\infty \subseteq G$ eine Untergruppe (warum?). Ist $\{h_0, \dots, h_r\} \subseteq H_\infty$, so gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $h_0, \dots, h_r \in H_m \Rightarrow$ $\langle \{h_0, \dots, h_r\} \rangle \subseteq H_m \subsetneq H_\infty$, also ist H_∞ nicht endlich erzeugt.

13. Satz (i) Bilder und Untergruppen von noetherschen Gruppen sind noethersch.

(ii) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler und sind N und G/N noethersch, so ist G noethersch.

Beweis Sei G noethersch, $H \subseteq G$ Untergruppe. Dann ist jede Untergruppe $K \subseteq H$ endlich erzeugt, also ist H noethersch.

Sei $\varphi: G \to K$ ein (surjektiver) Homomorphismus. Ist $K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots$ eine echt aufsteigende Kette von Untergruppen in K, so ist $\varphi^{-1}(K_0) \subsetneq \varphi^{-1}(K_1) \subsetneq \dots$ eine echt aufsteigende Kette von Untergruppen in G (warum?)

Wenn also K nicht noethersch ist, so ist G ebenfalls nicht noethersch.

(ii) Sei $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette in G.

Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass gilt

$$H_{m+j} \cap N = H_m \cap N \qquad \text{für alle } j \geq m$$

$$H_{m+j} N = H_m N \qquad \text{für alle } j \geq m$$

Angenommen, $H_{m+j+1} \neq H_{m+j}$ für ein $j \geq 0$. Sei

$h \in H_{m+j+1} - H_{m+j}$. Es folgt $hn = \tilde{h}$ mit $n \in N$, $\tilde{h} \in H_{m+j}$ (denn $hN = \tilde{h}N$ für ein $\tilde{h} \in H_{m+j}$)

$\Rightarrow n \in H_{m+j+1} \cap N = H_{m+j} \cap N \Rightarrow h \in H_{m+j}$ ↯ $\square$

14 <u>Korollar</u> Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist noethersch.

<u>Beweis</u> Induktion nach der kleinsten Zahl n an Erzeugern.

<u>$n=1$</u> $G = \langle g \rangle$ z.z.: jede Untergruppe $H \leq G$ ist endlich erzeugt. Wir zeigen: jede Untergruppe $H \leq G$ ist zyklisch, vgl. Einf. Algebra. OE $H \neq \{1\}$.

Sei $k = \min \{ l \geq 1 \mid g^l \in H \}$

(Da $H \neq \{1\}$ gibt es $l \neq 0$ mit $g^l \in H \Rightarrow g^{\pm l} \in H$)

Sei $h \in H$ beliebig $\Rightarrow$ $h = g^{rk+s}$ mit $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq s < k$

Es folgt $g^s \in H \Rightarrow s = 0$, also $H = \langle g^k \rangle$.

Jetzt $n \geq 2$ $G = \langle \{g_1, \dots, g_n\} \rangle$, setze $K = \langle \{g_2, \dots, g_n\} \rangle$

$L = \langle g_1 \rangle$, $\pi : G \to G/L$ kanonische Projektion.

Dann folgt $\langle \pi(\{g_2, \dots, g_n\}) \rangle = G/L$, mit

Induktion und § 1.13 (ii) folgt, dass G noethersch ist. $\square$

15. Definition Eine Gruppe G heißt
hopfsch (H. Hopf), wenn jeder Epimorphismus
$\varphi : G \to G$ injektiv ist.

Klar: endliche Gruppen sind hopfsch.

Satz Jede noethersche Gruppe ist hopfsch.

Beweis Angenommen, G ist nicht hopfsch. Wir zeigen, dass G nicht noethersch ist.

Es gibt also $\varphi : G \to G$ Epimorphismus mit
$N = \ker(\varphi) \neq \{1\}$. Setze $N_j = \ker(\varphi^j)$
für $j = 0, 1, \dots$ $\Rightarrow$ $N_j \subseteq N_{j+1}$ und $N_j \trianglelefteq G$,

$N_0 = \{1\}$, $N_1 = N$

Allgemein gilt $\varphi(N_{j+1}) = N_j$ und

$\varphi^{-1}(N_j) = N_{j+1}$. Betrachte für $j \geq 1$

$$N_{j+1} \xrightarrow{\varphi} N_j \longrightarrow N_j/N_{j-1}$$

$$\underbrace{N_{j+1} \longrightarrow N_j/N_{j-1}}_{\text{Epimorphismus}} \quad (\psi)$$

$\psi^{-1}(N_{j-1}) = \varphi^{-1}(N_{j-1}) = N_j$, mit Homomorphiesatz

$$N_{j+1}/N_j \cong N_j/N_{j-1}, \text{ also } N_{j+1}/N_j \cong N \neq \{1\}$$

$\square$

16. <u>Def</u> Eine Wirkung $G \times X \to X$ heißt <u>frei</u>, wenn für alle $x \in X$ gilt $G_x = \{1\}$.
Jede freie Wirkung ist also treu.

<u>Bsp</u> a) $\mathrm{Sym}(X) \times X \to X$ ist für $\# X \geq 3$ treu, aber nicht frei

b) $G \times G \to G$, $(g,x) \mapsto gx$ ist frei

Allgemein ist $G \times G/H \to G/H$, $(g, aH) \mapsto gaH$ frei genau dann, wenn $H = \{1\}$