§4 Kolimiten und Amalgame

1. <u>Konstruktion</u> Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Sei H eine weitere Gruppe und sei $\varepsilon_i : H \to G_i$ eine Familie von Homomorphismen. Angenommen, K ist eine weitere Gruppe und wir haben Homomorphismen $\varphi_i : G_i \to K$ so, dass jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ H \arrow[ur, "\varepsilon_j"] \arrow[dr, "\varepsilon_k"'] & & K \\ & G_k \arrow[ur, "\varphi_k"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es gilt also für alle $h \in H$, dass

$$\varphi_j \circ \varepsilon_j(h) = \varphi_k \circ \varepsilon_k(h).$$

iota

Wir setzen wieder $\iota_j : G_j \to \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i$

$$\iota_j(g) = (g, j) \quad \text{für } g \neq 1$$
$$\iota_j(1) = ()$$

vgl. § 2.3. Sei

$$Z = \{\, \iota_j \varepsilon_j(h)\, \iota_k \varepsilon_k(h^{-1}) \mid h \in H,\ j, k \in I \,\} \subseteq \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i$$

und $N = \langle\langle Z \rangle\rangle$

und wir nennen

$$\underset{i\in I}{\ast} G_i \Big/ N = \varinjlim \left(H \xrightarrow{\varepsilon_i} G_i\right)_{i\in I}$$

den <u>Kolimes</u> der Familie $(H \xrightarrow{\varepsilon_i} G_i)$. #

Wir schreiben $\bar{\varepsilon}_j : G_j \to \underset{i\in I}{\ast} G_i / N$ für die kanonische Abbildung.

<u>Satz</u> (<u>Universelle Eigenschaft des Kolimes</u>)

Gegeben sei eine Familie von Gruppen und Homomorphismen

$$\left(H \xrightarrow{\varepsilon_i} G_i\right)_{i\in I}$$

Sei K eine Gruppe, sei $G_i \xrightarrow{\varphi_i} K$ eine Familie von Homomorphismen mit $\varphi_j \circ \varepsilon_j = \varphi_k \circ \varepsilon_k$ für alle $j, k \in I$

$$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[dr] & \\ H \arrow[ur, "\varepsilon_j"] \arrow[dr, "\varepsilon_k"'] & & K \\ & G_k \arrow[ur, "\varphi_k"'] & \end{tikzcd}$$

Dann gibt es genau einen Homomorphismus

$$\varphi : \varinjlim (H \to G_i) \longrightarrow K$$

so, dass $\varphi \circ \bar{\varepsilon}_j = \varphi_j \circ \varepsilon_j$ für alle $j \in I$ gilt.

Das kennzeichnet den Kolimes.

<u>Beweis</u> Zunächst haben wir $\mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i \xrightarrow{\varphi} K$ mit

$\varphi \circ \iota_j(g) = \varphi_j(g)$ für alle $g \in G_j$, $j \in I$.

Wegen $\varphi_j \circ \varepsilon_j(h) = \varphi_k \circ \varepsilon_k(h)$ folgt $N \subseteq \ker(\varphi)$, damit erhalten wir $\bar{\varphi} : \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i / N \to K$ nach dem Homomorphiesatz, und $\bar{\varphi}$ ist eindeutig bestimmt durch φ. ⊛

Ist L eine weitere Gruppe mit dieser universellen Eigenschaft, betrachte, aus der jeweiligen universellen Eigenschaft folgt die Existenz von $\rightarrow$ und $\rightarrow$ sowie $\rightarrow \rightarrow = id_L$, $\rightarrow \rightarrow = id_{\varinjlim(H \to G_i)}$

$$\begin{tikzcd} & & L \arrow[d, shift left] \\ H \arrow[r] & G_i \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\bar{\iota}_i"'] & \\ & & \varinjlim(H \to G_i) \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

□

<u>Beachte</u>: Ist $H = \{1\}$ die triviale Gruppe, so gilt

$$\varinjlim(\{1\} \to G_i) = \ast\, G_i,$$

der Kolimes verallgemeinert das Koprodukt.

⊛ und $\bar{\varphi}$ ist eindeutig bestimmt durch die φ_i. Ist nämlich $\varphi' : \varinjlim(H \to G_i)_{i\in I} \to K$ eine weitere Abbildung mit $\varphi' \circ \bar{\iota}_j = \varphi_j$ für alle $j \in I$, so gilt $\varphi' \circ \pi = \varphi$ $\left(\pi : \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i \to \varinjlim(H \to G_i)\right)$ und damit $\bar{\varphi} = \varphi'$ nach Homomorphiesatz.

2. Transversalen Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe. Eine (Links-)Transversale ist eine Abbildung $G \to G$, die zu jedem $a \in G$ einen Repräsentanten $\bar{a} \in aH$ auswählt, so dass $\bar{a} = \bar{b}$ für alle $a, b \in aH$ gilt. Mit anderen Worten:

(LT$_1$) $\bar{a} H = aH$ für alle $a \in G$

(LT$_2$) $\bar{a} = \bar{b} \iff aH = bH$ für alle $a, b \in G$.

Klar: Transversalen existieren immer (→ Auswahlaxiom, wir wählen in jeder Nebenklasse $aH \subseteq G$ ein Element $\bar{a}$ aus)

Wir dürfen zusätzlich annehmen, dass gilt

(LT$_3$) $\bar{1} = 1$

Es folgt: $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$, $\bar{a}^{-1} a \in H$, $\overline{a\bar{b}} = \overline{ab}$ vgl §1.11, dort wurden Rechtstransversalen betrachtet)

Im Folgenden sei $(H \xrightarrow{\varepsilon_i} G_i)$ eine Familie von Homomorphismen.

$W = \ast_{i \in I} G_i$ das Koprodukt = Menge aller reduzierten Wörter,

$Z = \{ \iota_j \varepsilon_j(h)\, \iota_k \varepsilon_k(h^{-1}) \mid h \in H, j, k \in I \}$, $N = \langle\langle Z \rangle\rangle \trianglelefteq W$.

3. <u>Theorem</u> Sei $(H \xrightarrow{\varepsilon_i} G_i)$ eine Familie von Homomorphismen. Sei $H_i = \varepsilon_i(H) \subseteq G_i$. In jeder G_i wählen wir eine Linkstransversale zu $H_i \subseteq G_i$ mit $\bar{1} = 1$. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$ folgende Menge von reduzierten Wörtern.

$$w = (\bar{a}_1, i_1, \ldots, \bar{a}_{r-1}, i_r, a_r, i_r)$$

Falls $\bar{a}_r = 1$ (d.h. $a_r \in H_{i_r}$) verlangen wir zusätzlich, dass $i_r = 0 \in I$, wobei 0 fest gewählt ist.

Dann gilt:

Jedes Element $g \in \varinjlim (H \xrightarrow{\varepsilon_i} G_i)$ hat einen Repräsentanten $w \in \mathcal{A}$, $g = wN$.

Falls alle ε_i injektiv sind, ist der Repräsentant eindeutig bestimmt.

<u>Beweis</u> <u>Vorüberlegung</u> ist $h \in H_j$, so gibt es für jedes $k \in I$ ein Element $\tilde{h} \in H_k$ mit

$$\iota_j(h) N = \iota_k(\tilde{h}) N$$

Nämlich: wähle $h' \in H$ mit $\varepsilon_j(h') = h$, setze $\tilde{h} = \varepsilon_k(h')$

Beachte: wenn alle ε_j injektiv sind, so ist h' durch h eindeutig bestimmt und $h \mapsto \tilde{h}$ ist ein Isomorphismus $H_j \xrightarrow{\cong} H_k$.

Existenz Sei $g \in \varinjlim (H \to G_i)_{i \in I}$. Wähle $v \in g \subseteq W$ mit $|v| = r$ minimal, $v = (x_1, i_1, \ldots, x_r, i_r)$ red. Wort. Nun umschreiben:

$$vN = \underbrace{(x_1, i_1)}_{(\bar{x}_1 h_1, i_1)} \cdots (x_r, i_r) N$$

$$= (\bar{x}_1, i_1)(h_1, i_1)(x_2, i_2) \cdots N$$

$$= (\bar{x}_1, i_1)(\tilde{h}_1 x_2, i_2) \cdots N$$

Vorüberlegung: $(h_1 i_1)N = (\tilde{h}_1 i_2)N$

ev. $h_1 = 1$, das macht nichts

⌜ Beachte: $\bar{x}_1 \neq 1$ wegen Minimalität! ⌟

$$= (\bar{x}_1, i_1)(\overline{\tilde{h}_1 x_2}, i_2)(\tilde{h}_2 x_3, i_3) \cdots N$$

$$\vdots$$

$$(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{r-1}, i_{r-1}, a_r, i_r) N$$ fertig, wenn $\bar{a}_r \neq 1$

$$\shortparallel$$

$$= (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{r-1}, i_{r-1}, \tilde{h}, 0) N$$ wenn $a_r = h \in H_{i_r}$

□

Eindeutigkeit Dazu konstruieren wir (ähnlich wie in §2.3 bei den Koprodukten) eine Wirkung

$$W \times A \to A \quad , \quad (v,w) \longmapsto L_v(w) \quad , \quad L_v \in Sym(A)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) $L_w() = w$ für jedes $w \in A$, insbesondere ist die Wirkung transitiv

(2) $v \in N \Rightarrow L_v = id_A$, also erhalten wir eine induzierte Wirkung $\varinjlim (H \to G_i) \longrightarrow Sym(A)$

(3) $L_v(w) N = v * w N$ für jedes $v \in W$, $w \in A$

Multiplikation in W

Ist nun $v \in W$ und $g = vN$, so gibt es nach dem Existenzbeweis ein $w \in A$ mit $g = wN$. Es folgt $v^{-1} w \in N$, also

$$L_{v^{-1}w} = id_A = L_v^{-1} \circ L_w \Rightarrow L_v = L_w \overset{(1)}{\Rightarrow} L_v() = v = L_w() .$$

Folglich ist $L_v()$ der eindeutige Repräsentant von g in A.

Konstruktion dieser Wirkung

Sei $j \in I$ beliebig. Wir konstruieren eine Wirkung

$$G_j \times A \to A$$

wie folgt. Für $g \in G_j$ sei $L_g \in Sym(A)$ folgendermaßen definiert.

Sei $w = (\overline{a}_1, i_1, \ldots, a_r, i_r) \in A$

Falls $j \neq i_1$ betracht

$$(g,j)(\bar{a}_1, \dots a_r, i_r)N$$

$$\shortparallel$$

$$(\bar{g}\,\bar{g}^{-1}g, j)(\bar{a}_1, \dots, i_r)N = (\bar{g}, j)(\overline{\bar{g}^{-1}g}\,\bar{a}_1, \dots, i_r)N$$

$$= (\bar{g}, j)(\overline{\bar{g}^{-1}g\,a_1}, i_1)(\overline{\overline{\bar{g}^{-1}g\,a_1}^{-1}\,\bar{g}^{-1}g\,a_1\,\bar{a}_2}, i_2)\dots \quad N$$

$$= (\bar{g}, j)(\bar{b}_1, i_1)(\bar{b}_2, i_2)\dots N$$

Beachte: $\bar{b}_s \neq 1$ weil $\bar{a}_s \neq 1$, multipliziert wird stets mit einem Element aus H_{i_s} (von links).

Setze $L_g(\bar{a}_1, \dots, a_r, i_r) = \begin{cases} (\bar{g}, j, \bar{b}_1, \dots i_r) & \text{wenn } \bar{g} \neq 1 \\ (\bar{b}_1, \dots, i_r) & \text{wenn } \bar{g} = 1 \end{cases}$

Es gelten ① ② ③ (klar nach Konstruktion)

Wenn $j = i_1$ betrachte

$$(g,j)(\bar{a}_1, i_1)\dots(a_r, i_r)N$$

$$= (g a_1, i_1)\dots(a_r, i_r)N = (\overline{g a_1}, i_1)\dots(\ )N \stackrel{\text{ähnlich}}{=}$$

$$= (\overline{g a_1}, i_1, \bar{b}_2, \dots b_r, i_r)$$

Setze $L_g(\bar{a}_1, \dots a_r, i_r) = \begin{cases} (\overline{g a_1}, i_1, \bar{b}_2, \dots\ ) & \text{wenn } \overline{g a_1} \neq 1 \\ (\bar{b}_2, \dots b_r, i_r) & \text{wenn } \overline{g a_1} = 1 \end{cases}$

Nun muss man prüfen, dass das eine Wirkung ist!

Im Falle $j \neq i_1$, $p, q \in G_j$, $\bar p, \bar q, \overline{pq} \neq 1$ beginnt die Rechnung folgendermassen

$$L_{pq}(w) = L_{pq}(\bar a_1, \ldots, i_r).$$

$$= (\overline{pq}, j, \overline{\widetilde{\overline{pq}^{-1} pq\, \bar a_1}}, i_1, \ldots\ldots)$$

$$L_p L_q(w) = L_p(\bar q, j, \overline{\bar q^{-1} q\, \bar a_1}, i_1, \ldots$$

$$= L(\overline{p\bar q}, j, \overline{\widetilde{\overline{p\bar q}^{-1} p \bar q}\ \widetilde{\bar q^{-1} q\, \bar a_1}}, \ldots)$$

$$= L(\overline{pq}, j, \overline{\overline{pq}^{-1} p \underbrace{\bar q \bar q^{-1}} q\, \bar a_1}, i_1, \ldots)$$

usw, viele Fallunterscheidungen. $\square$

Vgl. auch Robinson, Abschnitt "Generalized free products".

<u>Konvention</u> Jedes $w \in A$ lässt sich eindeutig repräsentieren durch ein Tupel (wenn alle ε_i injektiv sind)

$$(\bar a_1, i_1, \ldots, \bar a_r, i_r, h)$$

mit $a_s \in G_{i_s}$, $\bar a_s \neq 1$, $i_s \neq i_{s+1}$

$h \in H$

nämlich $(\bar a_1, i_1, \ldots, i_r, h) \leftrightarrow (\bar a_1, i_1, \ldots, \bar a_{r-1}, i_{r-1}, \bar a_r\, \varepsilon_{i_r}(h), i_r)$

Man nennt das die <u>Normalform</u> (bezüglich der Transversalen).

4. <u>Def+Satz</u> Angenommen, $H \xrightarrow{\varepsilon_i} G_i$ ist eine Familie von injektiven Homomorphismen. Dann schreibt man

$$\varinjlim (H \to G_i)_{i\in I} = \mathop{\ast_H}_{i\in I} G_i$$

und nennt dies das <u>amalgamierte Produkt</u> der G_i über H.

Sei $\bar\iota_j : G_j \to \mathop{\ast_H}_{i\in I} G_i$ die kanonische Abbildung

$g \longmapsto \iota_j(g)N$. Für alle $h \in H$, $j,k \in I$ gilt dann

$\bar\iota_j \circ \varepsilon_j(h) = \bar\iota_k \circ \varepsilon_k(h)$.

Wir setzen $\hat G_j = \bar\iota_j(G_j)$, $\hat H = \bar\iota_j\,\varepsilon_j(H)$

<u>Satz</u> Die Abbildung $\bar\iota_j : G_j \to \hat G_j$ ist ein Isomorphismus, ebenso die Abbildung $\bar\iota_j \circ \varepsilon_j : H \to \hat H$ (für jedes j).

Es gilt $\mathop{\ast_H}_{i\in I} G_i = \left\langle \bigcup_{i\in I} \hat G_i \right\rangle$

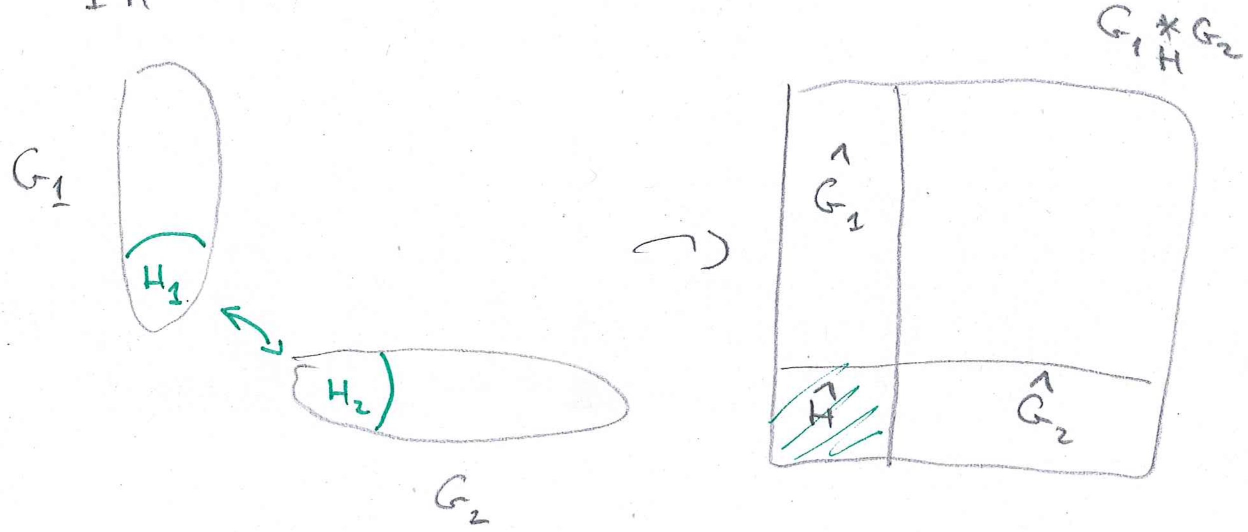
sowie $\hat G_k \cap \left\langle \bigcup_{j\neq k} \hat G_k \right\rangle = \hat H$

<u>Beweis</u> Das folgt direkt aus der Eindeutigkeit der Normalform:

$$\hat G_j \cong \{ (\bar g, j, h) \mid g \in G_j,\ \bar g \neq 1 \} \cup \{ (h) \mid h \in H \}$$

Idee Die Gruppen G_j werden längs der Untergruppen $H_j \cong H_k$ "verklebt" und das Ganze zu einer Gruppe erweitert. Für $I = \{1,2\}$ schreib

$$G_1 \underset{H}{*} G_2 = \varinjlim \left(G_1 \hookleftarrow H \hookrightarrow G_2 \right)$$



Die folgenden Sätze beweisen wir mit Hilfe der Normalform für Amalgame.

5. Satz Sei $(H \xrightarrow{\Sigma_i} G_i)_{i \in I}$ eine Familie von injektiven Homomorphismen. Wir wählen Transversalen.

(i) Ist $g \in \ast_{H,\, i \in I}\, G_i$ mit Normalform $(\bar{a}_1, i_1, \dots, \bar{a}_r, i_r, h)$ und gilt $i_1 \neq i_r$, so hat g unendliche Ordnung.

(ii) Gilt für mindestens zwei verschiedene Indizes $j, k \in I$, dass $H_j \neq G_j$, $H_k \neq G_k$, so ist $\ast_{H,\, i \in I}\, G_i$ unendlich.

(iii) Wenn $g \in \ast_{H,\, i \in I}\, G_i$ endliche Ordnung hat, so ist g konjugiert zu einem Element $g' \in \hat{G}_j$ für ein $j \in I$.

Beweis (i) Für $m \geq 1$ erhält man die Normalform von g^m als

$(\bar{a}_1, i_1, \dots, \bar{a}_r, i_r, \overline{h_1 a_1}, i_1, \dots\dots)$

wegen $i_r \neq i_1$

(ii) Folgt aus (i): wähle $a \in G_j - H_j$, $b \in G_k - H_k$

$\rightsquigarrow (\bar{a}, j, \bar{b}, k, 1)$ hat unendliche Ordnung nach (i).

(iii) Mit Induktion nach der Anzahl der Buchstaben r in der Normalform.

$r = 0 \rightsquigarrow (h) \in \hat{H} \subseteq \hat{G}_j$ (✓)

$r = 1 \rightsquigarrow (\bar{a}, j, h) \in \hat{G}_j$ (✓)

Allgemeiner Fall: $g = (\bar{a}_1, i_1, \dots, \bar{a}_r, i_r, h)$ und $i_1 = i_r$ nach (i). Konjugieren mit $(\bar{a}_1, i_1)^{-1}$, erhalten wir Element $(\bar{a}_2, i_2, \dots, \bar{a}_{r-1}, i_{r-1}, h')$ $\uparrow$ Induktionsschritt. □

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{a}_r h \bar{a}_1 = \bar{b} h' \\ \text{wegen } i_2 \neq i_r \quad \bar{b} = 1 \end{array}}$$

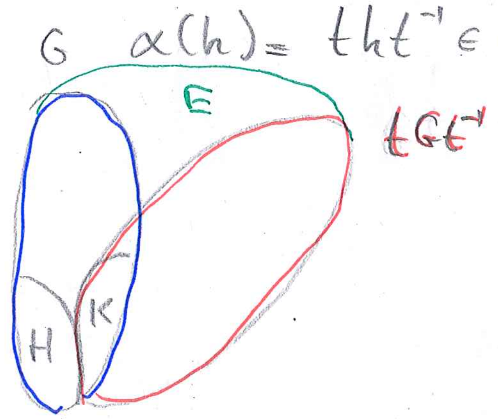
<u>Korollar</u> Wenn alle G_j torsionsfrei sind (keine nicht trivialen Elemente endliche Ordnung haben), so ist auch $\ast_{H,\, i \in I} G_i$ torsionsfrei.

6. <u>Konstruktion:</u> HNN-Erweiterungen

(G. Higman, B. Neumann, H. Neumann)

Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $K, H \leq G$. Angenommen, $\alpha : H \to K$ ist ein Isomorphismus. Wir konstruieren eine neue Gruppe E, die G enthält sowie ein Element t, so dass für alle $h \in H$ gilt

$$\alpha(h) = tht^{-1} \in K.$$



Sei $u, v \notin G$ mit $u \neq v$, sei $U = F(\{u\}) \cong \mathbb{Z}$
$V = F(\{v\}) \cong \mathbb{Z}$

Sei $X = G * U$, $Y = G * V$. Wir erhalten Homomorphismen $G \hookrightarrow X$ $G \hookrightarrow Y$ sowie

$\xi : H \to X$, $h \mapsto uhu^{-1}$

$\eta : K \to Y$, $k \mapsto vkv^{-1}$

und damit Homomorphismen

$\hat{\xi} : G * H \to X$, $g \mapsto g$, $h \mapsto uhu^{-1}$

$\hat{\eta} : G * K \to Y$, $g \mapsto g$, $k \mapsto vkv^{-1}$

Ein reduziertes Wort wird von $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ auf ein reduziertes Wort abgebildet, also sind $\hat{\xi}$ und $\hat{\eta}$ injektiv.

Setze $L = \hat{\xi}(G * H) \leq X$
$M = \hat{\eta}(G * K) \leq Y$

Wir erhalten einen Isomorphismus $\varphi : L \xrightarrow{\cong} M$ mit $\varphi(g) = g$ für $g \in G$

$$\varphi(uhu^{-1}) = v\alpha(h)v^{-1}.$$

Betrachte das amalgamierte Produkt $X \underset{L}{*} Y$

$$X \hookleftarrow L \xrightarrow[\cong]{\varphi} M \leq Y$$

Die Abbildung $G \to X \to X \underset{L}{*} Y$ ist injektiv nach §4.4. Im Amalgam gilt

$$uhu^{-1} = v\alpha(h)v^{-1}, \text{ also mit } t = v^{-1}u$$

$$tht^{-1} = \alpha(h)$$

Wir setzen $E = \langle G \cup \{t\} \rangle$, die in $X \underset{L}{*} Y$ von G und t erzeugte Untergruppe.

Man schreibt auch

$$E = G*_{\alpha} = \langle G, t \mid \alpha(h) = tht^{-1} \text{ für alle } h \in H \rangle$$

und nennt das die <u>HNN-Erweiterung</u> von G (bezüglich α). Beachte: ist G torsionsfrei, so auch $G*_\alpha$ und t hat unendliche Ordnung nach §4.5 $\square$

7. <u>Satz</u> (H.-N.-N.) Sei G eine abzählbare torsionsfreie Gruppe. Dann ist G in einer Gruppe $U \supseteq G$ enthalten, so dass es für alle $u, v \in U - \{1\}$ ein $w \in U$ gibt mit $u = wvw^{-1}$: alle nichttrivialen Elemente in U sind konjugiert zueinander.

<u>Beweis</u> Schreibe $G - \{1\} = \{g_0, g_1, g_2, \dots\}$ sowie $G_0 = G$. Wir konstruieren eine Folge von torsionsfreien Gruppen $G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \dots$ so, dass $g_0, \dots, g_k$ in G_k konjugiert sind. $G_0 = G$ (✓)

Wenn G_k konstruiert ist, gilt $\langle g_{k+1} \rangle \cong \mathbb{Z} \cong \langle g_k \rangle$ (weil G torsionsfrei) $\alpha(g_k^m) = g_{k+1}^m$

setze $G_{k+1} = G_k *_\alpha$

Setze $G^+ = \bigcup_{k\geq 0} G_k$ ⇝ alle g_k sind in G^+ konjugiert zueinander, G^+ ist abzählbar und torsionsfrei.

Setze nun $U_0 = G^+$ und $U_{k+1} = U_k^{+}$ sowie

$U = \bigcup_{k\geq 0} U_k$. □

<u>Bem</u> Die Bedingung "abzählbar" ist überflüssig, dann muss man transfinite Induktion benutzen (oder Zorns Lemma). #

8. <u>Theorem</u> (H.-N.-N.) Sei G eine abzählbare Gruppe. Dann gibt es eine Gruppe U, die G enthält sowie Elemente $u, t \in G$ mit $U = \langle \{u,t\} \rangle$, $o(u) = o(t) = \infty$.

<u>Bew</u> Sei $a, b \notin G$, $a \neq b$, sei $F = F(\{a,b\})$.

Schreibe $G = \{1 = g_0, g_1, \ldots\}$

Sei $A = \langle \{a, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, b^3ab^{-3}, \ldots\} \rangle \leq F \leq G * F$

⇝ A ist frei mit Basis $\{a, bab, b^2ab^{-2}, \ldots\}$

Sei $B = \langle \{bg_0, aba^{-1}g_1, a^2ba^{-2}g_2, \ldots\} \rangle \leq G * F$

⇝ B frei mit Basis $\{bg_0, abag_1, \ldots\}$

Denn: ein reduziertes Wort in diesen Elementen wird niemals trivial (zwischen den a steht immer noch b ...)

Es gibt also ein Isomorphismus $\alpha : A \longrightarrow B$ mit $\alpha(b^n a b^{-n}) = a^m b a^{-n} g_n$. In $(G*F)*_\alpha = E$

betrachte das Erzeugnis von a und t,

$$U = \langle \{a,t\} \rangle \subseteq (G*F)*_\alpha$$

Wegen $b g_0 = b = t a t^{-1} \in U$ Folgt $g_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und $U = (G*F)*_\alpha$) $\square$

9. Theorem (B. Neumann) Es gibt $2^{\aleph_0}$ nicht-isomorphe Gruppen mit zwei Erzeugern.

Beweis Sei $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}$. Für $S \subseteq \mathbb{P}$ sei $A_S = \bigoplus_{p \in S} \mathbb{Z}/p$ ~~~~ A_S abzählbare abelsche Gruppe.

A_S enthält Element der Ordnung $p \Leftrightarrow p \in S$.

Betrachte die Konstruktion aus Thm 8. Nach §4.5 enthält $A_S * F$ Elemente endlicher Ordnung p genau dann, wenn $p \in S$. Die HNN Erweiterung $(\underbrace{A_S * F}_{= K_S})*_\alpha$ ist ein Untergruppe von

$$(K_S * \mathbb{Z}) \underset{L}{*} (K_S * \mathbb{Z})$$

enthält also nach §4.5 ebenfalls Elemente endlicher Ordnung p genau für $p \in S$, das gilt auch für die Gruppe $U = \langle \{a,t\} \rangle$. Also:

$$S = \{p \in \mathbb{P} \mid U \text{ enthält Element der Ordnung } p\}.$$

Nun gilt $\# 2^{\mathbb{P}} = 2^{\aleph_0}$ $\square$