Kaplansky fragte mich im Sommer 1966, als wir über Vorlesungen sprachen, die wir planten, und ich ihm sagte, ich wolle im nächsten Semester eine Vorlesung über Graphentheorie halten, was für einen Satz ich denn in dieser Vorlesung beweisen werde. Ich blieb ihm trotz meiner nicht unbeträchtlichen Kenntnis an Graphentheorie die Antwort schuldig und habe bis heute keine Vorlesung über Graphentheorie gehalten.

Was mir damals im Sommer 1966 bewußt wurde und was ich mit der Schilderung diese Episode sagen möchte, ist dies: Bücher, Vorlesungen oder auch Studienbriefe müssen ein Ziel haben, Höhepunkte, für die sich die Mühsal lohnt, der man sich unterziehen muß, um sie zu erreichen. Zwei solcher Höhepunkte enthält dieses Kapitel. Der eine ist der Satz, daß die desarguesschen Ebenen gerade die Ebenen

Heinz Lüneburg,
Die euklidische Ebene
und ihre Verwandten
p. 29

# § 6 Graphen und Gruppen

1. **Def** Ein Graph $\Gamma$ (genauer: ein Serre-Graph) besteht aus zwei disjunkten Mengen $V, E$, der Eckenmenge $V$ (vertices), der Kantenmenge $E$, sowie drei Abbildungen

$e \mapsto \bar{e}$, $E \to E$ (Kanten umorientieren)

$e \mapsto e_0$, $E \to V$ (Anfangspunkt)

$e \mapsto e_1$, $E \to V$ (Endpunkt)

mit $\bar{e} \neq e$, $\bar{\bar{e}} = e$ sowie $\bar{e}_0 = e_1$, $\bar{e}_1 = e_0$.

Eine Orientierung von $\Gamma$ ist eine Teilmenge $E^+ \subseteq E$ mit: $e \in E^+ \Leftrightarrow \bar{e} \notin E^+$, d.h. wir wählen aus jedem Paar $e, \bar{e}$ genau eine Kante aus.

Visualisierung eines (orientierten) Graphen:


$e, f, g \in E^+$

$u, v, w \in V$

$e_0 = u \quad e_1 = v$

Sei $\Gamma' = (V', E')$ ein weiterer Graph. Wenn gilt $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ (mit den entsprechenden drei Abbildungen), so heißt $\Gamma'$ Teilgraph von $\Gamma$, kurz $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Ist $\varphi: \begin{array}{l} V' \to V \\ E' \to E \end{array}$ eine Abbildung mit

$$\overline{\varphi(e)} = \varphi(\bar{e}) \;,\quad \varphi(e_0) = \varphi(e)_0 \;,\quad \varphi(e_1) = \varphi(e)_1$$

für alle $e \in E'$, so heißt $\varphi$ <u>Morphismus</u> von Graphen.

2. <u>Die geometrische Realisierung eines Graphen.</u>

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph, sei $E^+ \subseteq E$ eine Orientierung. Betrachte

$$|\Gamma| = V \,\dot\cup\, (E^+ \times [0,1]) \big/ \sim$$

$\sim$ Äquivalenzrelation mit: $z \sim z$ für alle $z \in V \dot\cup (E \times [0,1])$

$$(e, 0) \sim e_0 \qquad (e, 1) \sim e_1 \qquad \text{für alle } e \in E^+$$

Schreibe $e_t$ für das Bild von $(e,t)$ in $|\Gamma|$.

Wir versehen $|\Gamma|$ mit der <u>Quotiententopologie</u>, bezüglich der diskreten Topologie auf $V$ und auf $E^+$.

<u>Klar</u>: Der Raum $|\Gamma|$ hängt <u>nicht</u> von der Wahl der Orientierung $E^+ \subseteq E$ ab. Wir können nämlich auch schreiben

$$|\Gamma| = V \,\dot\cup\, (E \times [0,1]) \big/ \sim$$

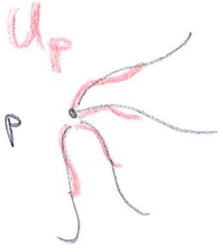
mit zusätzlicher Relation $(e, t) \sim (\bar{e}, 1-t)$

Wie sehen offene Umgebungen in $|\Gamma|$ aus? Sei $p \in |\Gamma|$

(1) $p$ Ecke, es gibt keine Kante $e$ mit $e_0 = p$ ($\rightarrow$ $p$ ist isoliert). Dann ist $U_p = \{p\} \subseteq |\Gamma|$ offen.

(2) $p$ Ecke, es gibt Kanten $e$ mit $e_0 = p$.

$U_p = \{ e_s \mid e \in E, e_0 = p, 0 \le s \le t_e < \frac{1}{2} \} \subseteq |\Gamma|$ offen




(3) $p = e_s$ für eine Kante $e$ und $s \neq 0, 1$

$U_p = \{ e_t \mid 0 < t < 1 \} \subseteq |\Gamma|$ offen

In allen drei Fällen ist $U_p$ kontrahierbar!

**Fakten** (Ü 4)

(a) $|\Gamma|$ ist stets Hausdorffsch
(folgt leicht mit (1), (2), (3))
sogar: $|\Gamma|$ ist normal ($T_4$-Raum), das ist schwieriger!

(b) $|\Gamma|$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ $V$ und $E$ endlich

(c) $\varphi: \Gamma' \to \Gamma$ Morphismus von Graphen, setze $\varphi(e_s) = \varphi(e)_s$ $\rightsquigarrow$ $\varphi: |\Gamma'| \to |\Gamma|$ stetig

(d) $\Gamma' \subseteq \Gamma$ Teilgraph $\Rightarrow$ $|\Gamma'| \subseteq |\Gamma|$ abg.

(e) $|\Gamma|$ ist lokal wegzush., also genau dann zush., wenn wegzush.

3. Für jede Kante $e$ ist $\gamma_e: t \mapsto e_t$ ein Weg in $|\Gamma|$

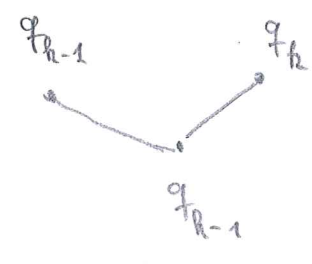
<u>Def</u> Ein <u>Kantenweg</u> in $|\Gamma|$ ist eine Verkettung von Wegen der Form $\gamma_e$. Die Länge des Kantenwegs ist die Anzahl der verwendeten Kanten.

<u>Lemma</u> Seien $u, v \in |\Gamma|$ Ecken, sei $\alpha \in \Omega(|\Gamma|, u, v)$. Dann existiert ein Kantenweg $\gamma \simeq \alpha$ rel $\partial$.

<u>Beweis</u> Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es Zahlen $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_N = 1$ so, dass $\alpha[s_{k-1}, s_k] \subseteq U_{p_k}$ mit $U_{p_k}$ wie in §6.2, $1 \le k \le N$.

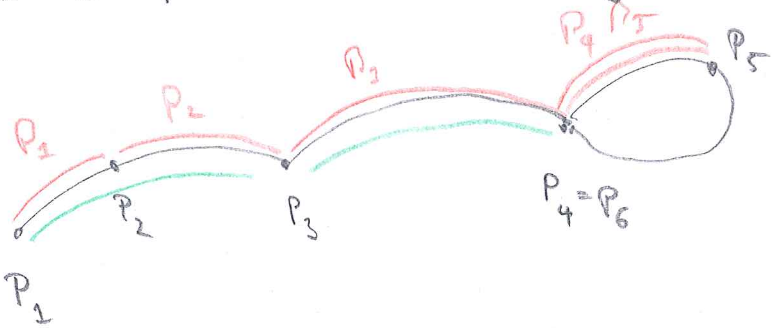
Setze $\alpha_k(t) = \alpha(s_{k-1} + t(s_k - s_{k-1}))$ $\rightsquigarrow$ $\alpha \simeq (\alpha_1 * \alpha_2) \ldots * \alpha_N$ rel $\partial$

Sei $q_k = \alpha(s_k)$, sei $\beta_k$ der "direkte" Weg in $U_{p_k}$ von $q_{k-1}$ nach $p_k$ nach $q_k$. Da $U_{p_k}$ kontrahierbar ist, gilt




$\beta_k \simeq \alpha_k$ rel $\partial$ (*)

Der resultierende Weg $p = ((p_1 * p_2) * p_3 \cdots ) * p_N$ ist homotop zu einem Kantenweg.




$\square$

[ Zu (*): Ist $\pi_1(X, p) = \{[\varepsilon_p]\}$ und $\alpha, \beta \in \Omega(X, p, q)$, so gilt $[\alpha] = [\beta]$. Denn: $\alpha \simeq (\alpha * (\bar\beta * \beta)) \simeq \underbrace{(\alpha * \bar\beta)}_{\simeq \varepsilon_p} * \beta \simeq \beta$ rel $\partial$ ]

Ein Kantenweg $\gamma \in \Omega(|\Gamma|, u, v)$ minimaler Länge heißt minimal. Ein Kantenweg ist reduziert (ohne backtracking), wenn kein Teilstück der Form $\gamma_e * \gamma_{\bar e}$ vorkommt. Klar: Minimal $\Rightarrow$ reduziert. Zwischen zwei Ecken existiert also stets ein reduzierter Kantenweg.

4. Beispiel: die Rose $R_n$. Sei $V = \{p\}$,

$E = \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ $\quad e_0 = p = e_1$ für $e \in E$

$E^+ = \{1, \dots, n\}$

$$E^+ \times [0,1] \to R_n, \quad (j, t) \mapsto (1, \dots, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{\exp(2\pi i t)}, 1, \dots, 1)$$

stetig, surjektiv. Da $E^+ \times [0,1]$ kompakt ist, ist $E^+ \times [0,1] \to R_n$ eine Quotientenabbildung, also

$|\Gamma| \cong R_n$.

# 5. Etwas elementare Homotopietheorie

Sei $X$ ein topologischer Raum, sei $A \subseteq X$.

Erinnerung: eine stetige Abbildung $\rho : X \to A$ heißt Retraktion, wenn für alle $a \in A$ gilt $\rho(a) = a$. Sei $i : A \hookrightarrow X$.

[ Für $p \in A$ folgt: $\pi_1(A,p) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(X,p)$ ist injektiv, ]

denn

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A,p) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[dr, equal] & \pi_1(X,p) \arrow[d, "\rho_\#"] \\ & \pi_1(A,p) \end{tikzcd}$$

Falls zusätzlich gilt: $\rho \simeq id_X$ rel $A$, so heißt $A \subseteq X$ starker Deformationsretrakt. Dann folgt für $p \in A$, dass $i_\# : \pi_1(A,p) \to \pi_1(X,p)$ ein Isomorphismus ist:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A,p) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[dr, equal] & \pi_1(X,p) \arrow[d, "\rho_\#"] \arrow[dr, equal, "i \circ \rho \simeq id_X \text{ rel } A"] & \\ & \pi_1(A,p) \arrow[r, "i_\#"] & \pi_1(X,p) \end{tikzcd}$$

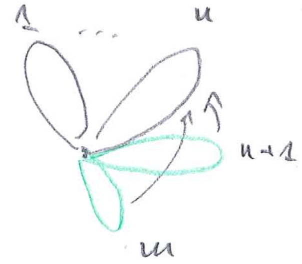
Def Sei $X$ ein top. Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Wenn eine Retraktion $\rho : X \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ existiert, dann hat $i : A \hookrightarrow X$ die Homotopie-Erweiterungseigenschaft HEP (homotopy extension property).

Anderer Name: $i : A \hookrightarrow X$ ist eine Kofaserung.

Zum Namen: $i : A \hookrightarrow X$ hat HEP $\Leftrightarrow$ jede stetige Abbildung $\varphi : X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \to Y$ hat stetige Fortsetzung $\Phi : X \times [0,1] \to Y$ (ÜA)

Umformulierung: Ist $\psi : X \to Y$ beliebige stetige Abbildung und $\varphi : A \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie mit $\varphi_0 = \psi | A$, so gibt es eine Homotopie $\Phi : X \times [0,1] \to Y$, die $\varphi$ fortsetzt, mit $\Phi_0 = \psi$.

**Bsp** $m>n$ $\varrho: R_m \to R_n$ Faltet die letzten $m-n$ Blätter der Rose zusammen




$\varrho$ Retraktion, keine starke Deformationsretraktion, denn:

$$F_n \not\cong F_m$$

#

**Konvention:** Ist $Y$ ein top. Raum und $B \subseteq Y$, so ist

$Y/B = Y/\sim$ mit: $y \sim y$ für alle $y \in Y$
$b \sim c$ für alle $b, c \in B$

$\lambda: Y \to Y/B$ kanon. Abbildung, Quotiententopologie auf $Y/B$

**Satz** Ist $i: A \hookrightarrow X$ mit HEP und ist $A$ kontrahierbar, so ist die Abbildung $\lambda: X \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere gilt für $p \in A$, dass $\lambda_\#: \pi_1(X, p) \to \pi_1(X/A, \lambda(p))$ ein Isomorphismus ist.

**Beweis.** Sei $\Phi: X \times [0,1] \to X$ eine Fortsetzung der Abbildung $\varphi: A \times [0,1] \to A$, die $A$ kontrahiert, mit $\Phi_0 = id_X$, $\Phi_1(A) = a_0 \in A$, $\Phi_s(A) \subseteq A$ für alle $s$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi_s"] \arrow[d, "\lambda"] & X \arrow[d, "\lambda"] \\ X/A \arrow[r, "\bar{\Phi}_s"] & X/A \end{tikzcd}$$

Dann ist $\bar{\Phi}: X/A \times [0,1] \to X/A$ stetig (das muss man beweisen! (Da ist eine Lücke in Hatcher 0.17, benutze Dugundji XII 4.1 oder Hatcher A.17)

Für $s = 1$ erhalten wir mit $\Phi_1(A) = \{a_0\}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[d, "\lambda"'] & X \arrow[d, "\lambda"] \\ X/A \arrow[r, "\bar{\Phi}_1"'] \arrow[ur, "\sigma"] & X/A \end{tikzcd}$$

$\sigma$ stetig, also

$\sigma \circ \lambda = \Phi_1 \simeq \Phi_0 = id_X$

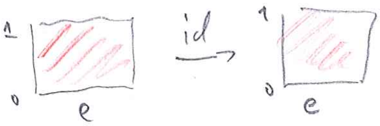
$\lambda \circ \sigma = \bar{\Phi}_1 \simeq \bar{\Phi}_0 = id_{X/A}$ □

**6. Satz** Sei $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein Teilgraph. Dann hat die Inklusion $|\Gamma'| \subset |\Gamma|$ die HEP.

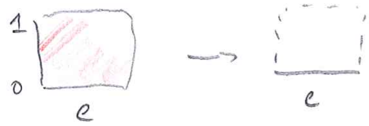
**Beweis** Definiere eine Retraktion

$\rho : |\Gamma| \times [0,1] \to |\Gamma| \times \{0\} \cup |\Gamma'| \times [0,1]$ kantenweise.

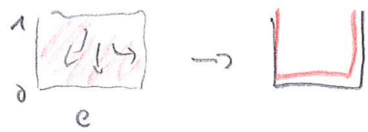
$e \in E'$ ⇝ $\rho(e_s, t) = (e_s, t)$



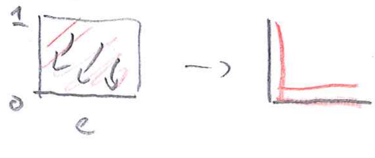
$e \in E - E'$ und $e_0, e_1 \notin V'$ ⇝ $\rho(e_s, t) = (e_s, 0)$



$e \in E - E'$ und $e_0, e_1 \in V'$



$e \in E - E'$ und $e_0 \in V', e_1 \notin V'$



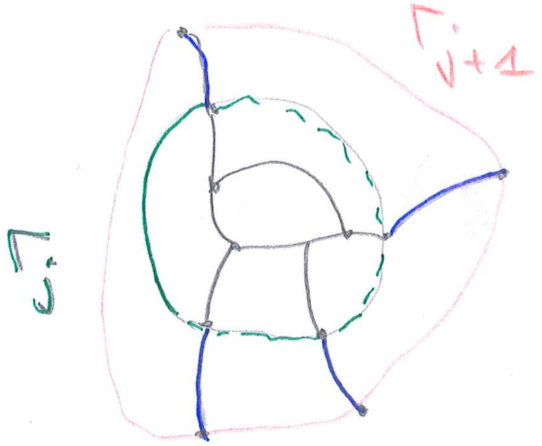
Wir erhalten eine stetige Retraktion

$$\begin{tikzcd} (V \dot\cup E \times [0,1]) \times [0,1] \arrow[r] \arrow[d, "quot"] & (V \dot\cup E \times [0,1]) \times \{0\} \cup (V' \dot\cup E' \times [0,1]) \arrow[d] \\ |\Gamma| \times [0,1] \arrow[r] & |\Gamma| \times \{0\} \cup |\Gamma'| \times [0,1] \end{tikzcd}$$

↑ stetig (wieder mit Dugundji XII 4.1) □

7. **Satz** Sei $\Gamma$ ein zush. Graph (d.h. $|\Gamma|$ ist wegzush.), sei $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein nicht-leerer Teilgraph. Dann existiert ein Teilgraph $\Delta$, $\Gamma' \subseteq \Delta \subseteq \Gamma$, so dass
1. $\Delta$ alle Ecken von $\Gamma$ enthält und
2. $|\Gamma| \subseteq |\Delta|$ starker Deformationsretrakt ist.

**Beweis** Setze $\Gamma_0 = \Gamma$, konstruiere $\Gamma_{j+1}$ aus $\Gamma_j$ wie folgt. Ist $v \in V$ keine Ecke von $\Gamma_j$, aber über eine Kante $e$ mit einer Ecke $w$ von $\Gamma_j$ verbunden (d.h. $e_0 = w, e_1 = v$), so füge $e$ und $v$ zu $\Gamma_j$ hinzu. Gibt es mehrere Kanten von $w$ nach $v$, wähle genau eine solchen Kanten aus. Setze $\Delta = \bigcup_{j \geq 0} \Gamma_j$




Da $\Gamma$ zush ist, folgt: $\Delta$ enthält alle Ecken von $\Gamma$. Weiter gilt: $|\Gamma_j| \subseteq |\Gamma_{j+1}|$ ist starker Deformationsretrakt (Zusammenziehen der "neuen" Kanten)

Sei $s_1 = \frac{1}{2}$ $\quad s_0 = 0$

$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$\vdots$

$s_k = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i}$

Sei $\Phi_j : |\Gamma_{j+1}| \times [0,1] \longrightarrow |\Gamma_{j+1}|$

Deformationsretraktion von $|\Gamma_{j+1}|$ auf $|\Gamma_j|$ so, dass

$\Phi_{j,s} = id$ für $0 \leq s \leq s_j$ und $\Phi_{j,s} = \Phi_{j,1}$

für $s_{j+1} \leq s \leq 1$ (d.h. die Retraktion findet im

Zeitraum $s_j \leq s \leq s_{j-1}$ statt.

$\Psi_{j,s} = \Phi_{0,s} \circ \Phi_{1,s} \circ \ldots \circ \Phi_{j,s} : |\Gamma_j| \to |\Gamma_j|$

deformiert nach $|\Gamma_0|$ und $\Psi_{j,s} \big| |\Gamma_k| = \Psi_{k,s}$

für alle $k \leq j$ $\rightsquigarrow$ wohldefinierte Abbildung

$\Psi_s = \bigcup_{j \geq 1} \Psi_{j,s} : |\Delta| \to |\Delta|$, deformiert

$|\Delta|$ nach $|\Gamma_0|$ und $\Psi : |\Delta| \times [0,1] \to |\Delta|$

ist stetig (prüfe das auf offenen Mengen vom Typ

①, ②, ③ in $\Delta$ wie in §6.2) $\square$

\#

<u>Korollar</u> Ist $\Gamma$ ein zush. Graph, $v \in |\Gamma|$ eine

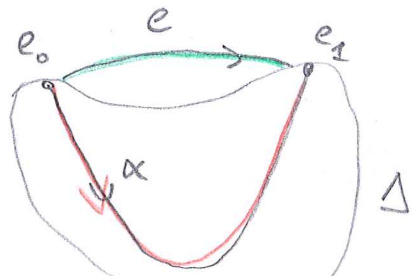
Ecke, so gibt es einen kontrahierbaren Teilgraph

$\Delta \subseteq \Gamma$, der alle Ecken von $\Gamma$ enthält.

<u>Bew.</u> Wende den Satz an mit $\Gamma' = \{v\}$ $\square$

8. <u>Satz</u> Sei $\Gamma$ ein zush. Graph und $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein zush. Teilgraph. Dann existiert eine Retraktion $|\Gamma| \to |\Gamma'|$.

<u>Beweis</u> Konstruiere $\Gamma' \subseteq \Delta \subseteq \Gamma$ wie in §6.7. Dann ist $\Delta$ zush (weil $|\Delta| \simeq |\Gamma'|$) und es gibt eine Retraktion $\rho^{\Delta}_{\Gamma'} : |\Delta| \to |\Gamma'|$. Wir definieren nun eine Retraktion $\rho^{\Gamma}_{\Delta} : |\Gamma| \to |\Delta|$ wie folgt. Auf allen Kanten in $\Delta$ ist $\rho^{\Gamma}_{\Delta}$ die Identität. Ist
Sei $E^+$ Orientierung von $\Gamma$. Wenn $e \in E^+$ nicht in $\Delta$ liegt, so sind $e_0, e_1$ Ecken in $\Delta$ (weil $\Delta$ alle Ecken von $\Gamma$ enthält). Wähle einen Weg $\alpha \in \Omega(|\Delta|, e_0, e_1)$ und definiere $\rho^{\Gamma}_{\Delta}(e_s) = \alpha(s)$,




Damit erhalten wir eine stetige Abbildung $\rho^{\Gamma}_{\Delta} : |\Gamma| \to |\Delta|$ (stetig auf jeder Kante, damit stetig, da $|\Gamma|$ Quotientenraum). □

9. <u>Def</u> Ein <u>Kreis</u> ist ein zu $\Gamma_n$ isomorpher Graph,

$\Gamma_1$ :  $\Gamma_2$ : 

$\Gamma_3$ : 

Formal: $V = \mathbb{Z}/n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

$E^+ = \{(\bar{k}, \overline{k+1}) \mid 0 \leq k \leq n\}$ $\quad \bar{k} = k + n\mathbb{Z}$

$e = (\bar{k}, \overline{k+1}) \quad e_0 = \bar{k} \quad e_1 = \overline{k+1}$

**Bem** Um ein Graph $\Gamma$ anzugeben, genügt es, die Eckenmenge $V$ sowie eine Menge orientierter Kanten $E^+$ anzugeben – setze $E = E^+ \dot\cup E^-$

$E^- = \{\bar e \mid e \in E^+\}$ $\quad \bar e = \bar f \Leftrightarrow e = f$, z.B.

$E^- = E^+ \times \{1\}$ ....

**Lemma** Es gilt $|\Gamma| \cong S^1 \Leftrightarrow \Gamma$ ist Kreis.

**Beweis** "$\Leftarrow$" klar (explizit Homöomorphismus
$(\bar k, \overline{k+1})_s \mapsto \exp(2\pi i \frac{1}{n}(k+s))$)

"$\Rightarrow$" $|\Gamma| \cong S^1 \Rightarrow V, E^+$ endlich, zu jeder Ecke $v$ gibt es eindeutige Kanten $e, f \in E^+$ mit $e_0 = v = f_1$ ... $\square$

10. **Def** Ein zush. Graph, der keinen Kreis (als Teilgraphen) enthält, heißt **Baum**

**Satz** Sei $\Gamma$ ein Graph. Dann sind äquivalent:

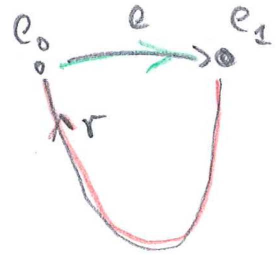
(i) $\Gamma$ ist Baum
(ii) $|\Gamma|$ ist kontrahierbar
(iii) $\Gamma$ ist zush. und für alle Ecken $v$ gilt $\pi_1(|\Gamma|, v) = \{[\varepsilon_v]\}$. (d.h. $|\Gamma|$ ist einfach zush.)

**Beweis** (i) $\Rightarrow$ (ii) Wähle Ecke $v \in |\Gamma|$, konstruiere $\{v\} \subseteq \Delta \subseteq \Gamma$ wie in §6.8. Sei $E^+$ Orientierung von $\Gamma$. Behauptung: $\Delta = \Gamma$.

Sonst gibt es $e \in E^+$, $e$ nicht in $\Delta$.

Wenn $e_0 = e_1$, so enthält $\Gamma$ Kreis ↯ also $e_0 \neq e_1$.

Sei $\gamma \in \Omega(|\Delta|, e_1, e_0)$ minimaler Kantenweg.




Dann kommt die Ecke als Kante zweimal in $\gamma$ vor $\Rightarrow$ Kreis ↯.

Also ist $\Delta = \Gamma$ kontrahierbar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i) zeige $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(iii).

Sei $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein Kreis. Dann existiert eine Retraktion $|\Gamma| \xrightarrow{s} |\Gamma'|$, betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} {|\Gamma'|} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, equal] & {|\Gamma|} \arrow[d, "s"] \\ & {|\Gamma'|} \end{tikzcd}$$

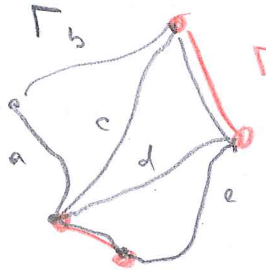
, $v \in \Gamma'$ Ecke

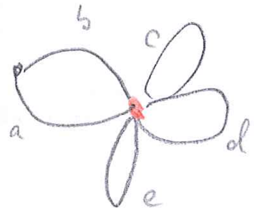
$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \pi_1(|\Gamma'|, v) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[dr, equal] & \pi_1(|\Gamma|, v) \arrow[d, "s_\#"] \\ & \pi_1(|\Gamma'|, v) \cong \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \pi_1(|\Gamma|, v) \neq \{[c_v]\}$ $\square$

Satz §6.7 sagt also: in jedem (zush.) Graph $\Gamma$ gibt es einen Baum $\Delta \subseteq \Gamma$, der alle Ecken enthält. Solch einen Baum nennt man einen *Spannbaum* in $\Gamma$.

**Konstruktion** Ist $\Gamma$ ein Graph, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein Teilgraph (nicht notwendig zush.), so ist $\Delta = \Gamma/\Gamma'$ folgender Graph: die Kanten von $\Delta$ sind alle Kanten von $\Gamma$, die nicht in $\Gamma'$ liegen. Die Ecken sind alle Ecken, die nicht in $\Gamma'$ liegen, sowie eine neue Ecke $v_0$ an der alle Kanten enden, die an Ecken in $\Gamma'$ geendet hatten




Es gilt $|\Gamma/\Gamma'| \cong |\Gamma| / |\Gamma'|$

**Def** Eine Rose ist ein Graph mit genau einer Ecke

Seifert-Van-Kampen: $R$ Rose, $E^+$ Orientierung $\Rightarrow \pi_1(|R|, v) \cong F(E^+)$
$E^+$ Basis

11. Theorem Sei $\Gamma$ ein zush. Graph und sei $\Delta \subseteq \Gamma'$ ein Spannbaum. Sei $E^+$ eine Orientierung von $\Gamma$, sei $X \subseteq E^+$ die Menge aller Kanten, die nicht in $\Delta$ liegen. Sei $v \in \Gamma$ Ecke. Dann gibt es reduzierte Kantenzüge $\{\alpha_x \mid x \in X\}$ so, dass gilt:

(i) $x$ ist Kante in $\alpha_x$

(ii) $\pi_1(|\Gamma|, v) = \langle \alpha_x \mid x \in X \rangle \cong F(X)$ ist freie Gruppe mit Basis $\{\alpha_x \mid x \in X\}$.

Beweis Betrachte $\varphi : |\Gamma| \to |\Gamma/\Delta| \cong |\Gamma| / |\Delta|$

Da $|\Delta| \subseteq |\Gamma|$ kontraktibel ist (§6.7) und die HEP hat (§6.6) ist $\varphi$ eine Homotopieäquivalenz (§6.5)

Das ist die Definition einer Rose!

Weiter ist $\Gamma/\Delta$ ein Graph mit genau einer Ecke, also eine Rose (ev. mit unendlich vielen Blättern...)

Mit Seifert-Van Kampen $\overset{(§5.17)}{\text{folgt}}$ $\pi_1(|\Gamma/\Delta|, \varphi(v)) \cong F(X)$ mit Basis $\{\varphi_\#(\alpha_x) \mid x \in X\}$ $\square$

Korollar Jeder zush. Graph ist homotopieäquivalent zu einer Rose (ev. mit unendlich vielen Blättern...)

Korollar Ist $\Gamma$ zush. Graph, $E^+$ Orientierung, $\Delta \subseteq \Gamma$ Spannbaum, $X = \{e \in E^+ \mid e \text{ nicht in } \Delta\}$ so ist $\# X$ unabhängig von der Wahl des Spannbaums $\Delta \subseteq \Gamma$ ($\to$ §1.13)

#

12. Satz Sei $\Gamma$ ein Graph, seien $u,v \in \Gamma$ Ecken, sei $\alpha \in \Omega(|\Gamma|,u,v)$. Dann gibt es genau einen reduzierten Kantenweg $\gamma$ in $\Gamma$ mit $[\gamma]=[\alpha]$.

Beweis Die Existenz haben wir in §6.3 überlegt, bleibt die Eindeutigkeit. OE ist $\Gamma$ zusammenhängend, die anderen Komponenten von $\Gamma$ spielen keine Rolle. Sei $E^+$ Orientierung von $\Gamma$. Sei $V \subseteq \Gamma$ Menge aller Ecken, sei $\Delta \subseteq \Gamma$ Spannbaum.

Betrachte

$$\begin{tikzcd} {|\Gamma|} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\simeq"'] & {|\Gamma|/V} \arrow[d] & \leftarrow \text{Rose mit } E^+ \text{ als Blättern} \\ & {|\Gamma|/|\Delta|} & \end{tikzcd}$$

Homotopieäquivalenz

Es folgt: $\pi_1(|\Gamma|,v) \xrightarrow{\varphi_\#} \pi_1(|\Gamma|/V, \varphi(v))$ ist injektiv.

Ist $\gamma$ red. Kantenweg mit $[\alpha]=[\gamma]$, so kann man die in $\gamma$ vorkommenden Kanten eindeutig an der reduzierten Darstellung von $\varphi_\#[\gamma] \in \pi_1(|\Gamma|/V, \varphi(v))$

$\cong \langle \underset{\uparrow\,\text{Basis}}{\alpha_e} \mid e \in E^+ \rangle \cong F(E^+)$ ablesen. $\square$

Konvention Sind $a,b,c,d,\dots$ Kanten mit $a_1=b_0$, $b_1=c_0$ usw, so sei $[a,b,c,d,\dots]$ die Homotopieklasse rel $\partial$ des entsprechenden Kantenwegs in $|\Gamma|$.

"Reduziert" bedeutet also: $a \neq \bar b$, $b \neq \bar c$, $c \neq \bar d$, ...

13. **Def** Sei $G$ eine Gruppe, sei $S \subseteq G$. Der (orientierte) **Cayleygraph** $\Gamma = \Gamma(G, S)$ hat als Eckenmenge $V = G$ und als orientierte Kanten

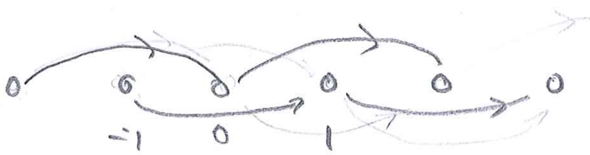
$$E^+ = \{ (g, gs) \mid g \in G,\ s \in S \} \text{ mit}$$

$$(g, gs)_0 = g, \qquad (g, gs)_1 = gs$$

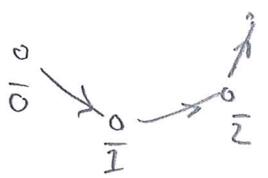
(und $E^-$ fügen wir formal hinzu, $E = E^+ \dot\cup E^-$)

**Bsp** (a) $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1\}$ (additiv)


(b) $G = \mathbb{Z}$ $\quad S = \{2\}$




(c) $G = \mathbb{Z}/n$ $\quad S = \{\bar{1}\}$




Kreis $\Gamma_n$

# 14. Beobachtungen

(1) $G$ wirkt auf $\Gamma(G,S)$ durch

$$g(a) = ga \quad \text{für } a \in V = G$$

$$g(a,as) = (ga, gas) \quad \text{für } (a,as) \in E^+$$

Der Stabilisator jeder Ecke und Kante ist trivial, die Wirkung auf den Ecken ist also transitiv und frei, die Wirkung auf den Kanten ist frei.

(2) $\Gamma(G,S)$ enthält  als Teilgraph

$\Leftrightarrow \quad 1_G \in S$

↑ Neutralelement von $G$

(3) Es gibt eine Kante $a \in E$ mit $a_0 = g$, $a_1 = h$

$\Leftrightarrow \quad g^{-1}h \in S$ oder $h^{-1}g \in S$

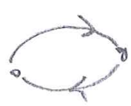
(4) Es gilt $\langle S \rangle = G \Leftrightarrow \Gamma(G,S)$ zush.
(OE $S \neq \emptyset$, sonst klar)

Denn: Sei $g \in G$ beliebig. Es gibt einen Kantenweg von $1$ nach $g$ $\Leftrightarrow$ es gibt

$1_G = g_0, g_1, \ldots, g_m = g \qquad g_{i+1}^{-1} g_i \in S \cup S^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad G = \langle S \rangle$

vgl. §1.10

(5) $\Gamma(G,S)$ enthält  $\Gamma_2$

als Teilgraph $\Leftrightarrow$ es gibt $s \in S$, $s \neq 1$ mit $s^{-1} \in S$

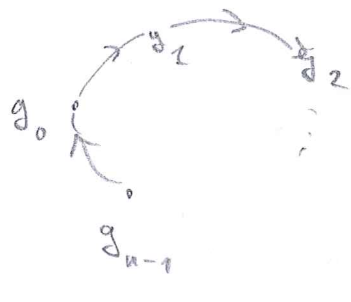
15. **Satz** Sei $G = F(X)$ frei mit Basis $X$. Dann ist $\Gamma(G,X)$ ein Baum. An jeder Ecke $g$ starten genau $\#X$ orientierte Kanten.

**Bew.:** Da $G = \langle X \rangle$ gilt, ist $\Gamma(G,X)$ zush.
An jeder Ecke $g$ starten genau $\#X$ Kanten, nämlich $\{(g, gx) \mid x \in X\}$. Weiter enthält $\Gamma(G,X)$ keinen Teilgraph $\Gamma_1$:  und $\Gamma_2$ , denn für alle $x \in X$ ist $x^{-1} \notin X$.

Angenommen, $\Gamma(G,X)$ enthält einen Kreis $\Gamma_n$, $n \geq 3$.

Dann haben wir $g_0, \dots, g_n = g_0$ sowie $x_j \in X$, $\varepsilon_j = \pm 1$

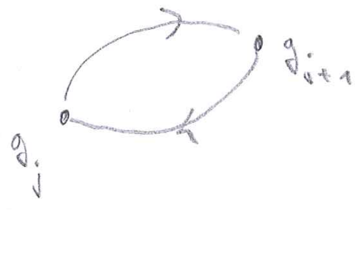
$$g_j = g_0 x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} = g_0$$




$$\Rightarrow x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} = 1$$

Es folgt $x_j = x_{j+1}$ und $\varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}$ für ein $1 \leq j \leq n-1$, sonst hätten wir ein nicht leeres reduziertes Wort in $F(X)$.

Damit aber Teilgraph ↯




□

**16. Def** Sei $X$ ein top. Raum. Eine Wirkung $G \times X \to X$ heißt eigentlich diskontinuierlich, wenn es zu jedem $p \in X$ eine offene Umgebung $U$ gibt, so dass für alle $g \in G - \{1\}$ gilt

$$U \cap g(U) = \emptyset .$$

So eine Wirkung ist also insbesondere frei.

Achtung: die Def. von eigentlich diskontinuierlich ist bei verschiedenen Autoren oft unterschiedlich!

**Satz** Sei ($G \times X \to X$ eigentlich diskont. und sei) ${}_G\backslash X = \{ G(p) \mid p \in X \}$ der Bahnraum, versehen mit der Quotiententopologie bzgl. $\varphi : X \to {}_G\backslash X$, $p \mapsto G(p)$. Dann gilt

(i) $\varphi : X \to {}_G\backslash X$ ist eine Überlagerung

(ii) Wenn $X$ einfach zush. ist (d.h. wegzush. und $\pi_1(X,p) = \{[\varepsilon_p]\}$ für alle $p \in X$), so gilt

$$G \cong \mathrm{Deck}(X \xrightarrow{\varphi} {}_G\backslash X) \cong \pi_1({}_G\backslash X, \varphi(p))$$

#

**Beweis** (i) wurde in ÜA gezeigt.

Zu (ii). Nach § 5.15 gilt

$$\mathrm{Deck}(X \xrightarrow{\varphi} {}_G\backslash X) \cong \pi_1({}_G\backslash X, \varphi(p)),$$

Weiter gilt $G \subseteq \mathrm{Deck}(X \xrightarrow{\varphi} {}_G\backslash X)$ nach Konstruktion, und $G$ wirkt frei und transitiv auf

$$\varphi^{-1}\varphi(p) = G(p)$$

Das gleiche gilt für $\mathrm{Deck}(X \xrightarrow{\varphi} {}_G\backslash X)$ nach § 5.17.

Es folgt $G = \mathrm{Deck}(X \xrightarrow{\varphi} G\backslash X)$ $\square$

17. Sei $\Gamma$ ein Graph, $G \times \Gamma \to \Gamma$ eine Wirkung.
Wir nennen die Wirkung <u>frei</u>, wenn für alle $v \in V, e \in E$ und $g \neq 1$ gilt $g(v) \neq v$ und $g(e) \neq e$.
Wir nennen die Wirkung <u>ohne Inversion</u>, wenn es keine Kante $e$ gibt mit $g(e) = \bar{e}$.

<u>Bsp</u>: $\Gamma = \Gamma(G, S)$ Cayleygraph. Dann wirkt $G$ frei und ohne Inversion auf $\Gamma$.

<u>Lemma</u> Ist $\Gamma$ ein Graph und $G \times \Gamma \to \Gamma$ frei ohne Inversion, so gilt:

(i) $G \times |\Gamma| \to |\Gamma|$ ist eigentlich diskontinuierlich

(ii) $G\backslash\Gamma = (G\backslash V, G\backslash E)$ ist ein Graph, mit Ecken

$G\backslash V = \{G(v) \mid v \in V\}$ Kanten $G\backslash E = \{G(e) \mid e \in E\}$

$G(e)_0 = G(e_0)$ $\quad \overline{G(e)} = G(\bar{e})$

$G(e)_1 = G(e_1)$

und $\quad G\backslash|\Gamma| \cong |G\backslash\Gamma|$

<u>Beweis</u> Sei $p \in |\Gamma|$. Wenn $p = e_s$ für $0 < s < 1$, dann


$U = \{e_t \mid 0 < t < 1\}$

Wenn $p$ Vertex, dann

$$U = \{ e_t \mid e_0 = p,\ 0 \le t < \tfrac{1}{2} \}$$

$U$

Für $g \in G - \{1\}$ gilt dann

$g(U) \cap U = \emptyset$.

(ii) Klar nach Konstruktion. □

18. <u>Theorem</u> Sei $G$ eine Gruppe. Dann sind äquivalent.

(i) $G \cong F(X)$ für eine Menge $X$, $G$ ist frei

(ii) $G$ wirkt frei und ohne Inversion auf einem Baum.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) haben wir mit §6.15 gezeigt:

$\Gamma = \Gamma(F(X), X)$ ist Baum, auf dem $F(X)$ frei und ohne Inversion wirkt.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\Delta$ ein Baum, auf dem $G$ frei und ohne Inversion wirkt. Sei $\Gamma = {}_G\backslash\Delta$. Dann gilt

$$G \cong \underbrace{\pi_1\left({}_G\backslash\Delta, \varphi(p)\right)}_{\text{frei}} \quad \text{für } p \in \Delta \text{ Vertex}$$

mit §6.16 und §6.11. □

<u>Korollar</u> (<u>Satz von Schreier</u>) Untergruppen von freien Gruppen sind frei.

Beweis Sei $H \leq F(X)$ Untergruppe. Dann wirkt $H$ frei und ohne Inversion auf dem Baum $\Gamma = \Gamma(F(X), X)$. $\square$