§ 1 Die Wortmetrik

In der geometrischen Gruppentheorie betrachtet man Gruppen (unter anderem) mit geometrischen / metrischen Methoden.

1\. Def (Die Wortmetrik) Sei G eine Gruppe, sei $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem, $G = \langle S \rangle$. Für $g \in G - \{1\}$ ist die Wortlänge von g bezüglich S definiert als

$$l_S(g) = \min \{ n \mid g = t_1 \cdots t_n ,\ t_j \in S \cup S^{-1} \}$$

Wir setzen $l_S(1) = 0$. Offensichtlich gilt

$$l_S(g) = l_S(g^{-1}) \geq 0$$

$$l_S(g) = 0 \iff g = 1$$

$$l_S(gh) \leq l_S(g) + l_S(h)$$

Damit wird $d_S(g,h) = l_S(g^{-1}h)$ eine linksinvariante Metrik auf G (d.h. d_S Metrik und

$d_S(ag, ah) = d_S(g,h)$ für alle $a, g, h \in G$),

die Wortmetrik (bzgl. S)

Die Metrik d_S hängt offensichtlich von S ab.

Bsp. $G = \mathbb{Z}$ $S = \{1\}$ $\leadsto$ $d_S(k,l) = |k-l|$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$, aber

$S' = \{2,3\}$ $d_{S'}(0,1) = 2$

~~2. Lemma~~ G beliebig, $S = G$ $\leadsto$ $d_S(g,h) = \begin{cases} 0 & g = h \\ 1 & g \neq h \end{cases}$

2. Lemma Sind S, S' zwei endliche Erzeugendensyst. für G, so ist $id : (G, d_S) \to (G, d_{S'})$ eine bi-Lipschitz abbildung.

Bew. Sei $L = \max\{ l_{S'}(s) \mid s \in S \}$. Ist $l_S(g) = n$, $g = t_1 \cdots t_n$, $t_j \in S \cup S^{-1}$, so folgt

$$l_{S'}(g) \leq l_{S'}(t_1) + \ldots + l_{S'}(t_n) \leq L \cdot n = L\, l_S(g)$$

Genauso die andere Abschätzung. $\square$

Ist also G endlich erzgt, so liefern alle Wortmetrik von endlichen EZS bi-Lipschitz-äquivalente Metriken auf G.

3. Def Eine Abbildung $\varphi: X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X), (Y, d_Y) heißt **grob Lipschitz**, wenn es Konstanten L, C gibt, so dass für alle $u, v \in X$ gilt

$$d_Y(\varphi(u), \varphi(v)) \leq L\, d_X(u,v) + C$$

Solche Abbildungen sind i.a. nicht stetig!

Bsp: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$

φ ist grob Libschitz (bzgl $d(u,v) = |u-v|$) mit $L = C = 1$.

Zwei Abbildungen $\varphi, \psi: X \rightrightarrows Y$ haben **endlichen Abstand**, wenn es eine Konstante D gibt, so dass $d_Y(\varphi(u), \psi(u)) \leq D$ für alle $u \in X$.

Endlicher Abstand ist eine Äquivalenzrelation auf Abbildungen, schreibe

$$[\varphi] = \{\psi: X \to Y \mid \varphi, \psi \text{ haben endlichen Abstand}\}$$

Eine grobe Lipschitz-Abbildung $\varphi: X \to Y$ heißt <u>quasi-Isometrie</u>, wenn es eine grobe Lipschitz-Abbildung $\psi: Y \to X$ gibt mit $[\varphi \circ \psi] = [id_Y]$ und $[\psi \circ \varphi] = [id_X]$.

Dann nennt man X und Y <u>quasi-isometrisch</u>.

Verkettungen von quasi-Isometrien sind wieder quasi-Isometrien (nachrechnen) und

$$QI(X) = \{[\varphi] \mid \varphi: X \to X \text{ ist quasi-Isometrie}\}$$

ist eine Gruppe, die <u>quasi-Isometriegruppe</u> von X.

4. <u>Beispiele</u> a) alle beschränkten metrischen Räume (insbesondere alle kompakten metrischen Räume) sind paarweise quasi-isometrisch, mit trivialer QI-Gruppe.

b) Ist G eine endlich erzeugte Gruppe, so sind alle Wortmetriken auf G bzgl. endlicher EZS paarweise quasi-isometrisch.

c) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ mit $d(u,v) = |u-v|$ sind quasi-isometrisch bzgl. $\varphi(x) = \lfloor x \rfloor$

$\psi(x) = x$ $\qquad \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$

d) Der natürliche Homomorphismus

$$\mathrm{Isom}(X) \to QI(X)$$
$$\varphi \mapsto [\varphi]$$

ist i.a. weder injektiv noch surjektiv.

Bsp. • $X = \mathbb{Z}$, $\tau_m(x) = x + m$ $\quad \tau_m \in \mathrm{Iso}(\mathbb{Z})$

$[\tau_m] = [\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}]$ $\leadsto$ nicht injektiv

• $\mathrm{Iso}(\mathbb{Z}) = \{ x \mapsto ax + m \mid m \in \mathbb{Z},\ a = \pm 1 \}$ ist abzählbar, aber für jedes $a \in \mathbb{R}^*$ ist $s_a(x) = \lfloor ax \rfloor$ ein QI und für $a \neq b$ gilt $[s_a] \neq [s_b]$, also ist $QI(\mathbb{Z})$ überabzählbar.

e) $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{Z}^n$ sind bezüglich der $|.|_1$-Norm

$$d(u,v) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$$

quasi-isometrisch

f) Ist $|.|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$, so ist $|.|$ und $|.|_1$ quasi-isometrisch.

g) Für $n \geq 2$ sind $(\mathbb{Z}, |.|)$ und $(\mathbb{Z}^n, |.|_1)$ nicht quasi-isometrisch (Ü 4).

$\to$ nächste Woche

(Die $|.|_1$-Norm auf $\mathbb{Z}^n$ entspricht der Wortmetrik d_S für $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ ← Standard-Basis.)

5. **Def** Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to X$ heißt Geodätische oder Geodäte, wenn für alle $a \leq s,t \leq b$ gilt $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$.

Wenn alle Punkte in X durch Geodäten verbindbar sind, heißt X geodätischer Raum oder Längenraum.

Bsp
- jeder normierte Vektorraum ist geodätisch:

  Setze $\gamma(s) = v + (u-v)\frac{s}{|u-v|}$
- jede zush. vollst. Riemannsche Mannigfaltigkeit ist geodätisch

Wir schwächen diese Bedingung jetzt ab.

6. **Def** Sei (X,d) ein metrischer Raum, seien $L, C \geq 0$. Eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to X$ heißt (L,C)-quasi-Geodätische, wenn für alle $a \leq s,t \leq b$ gilt

$$\frac{1}{L}\cdot|s-t| - C \leq d(\gamma(s),\gamma(t)) \leq L\cdot|s-t| + C$$

Wir nennen X <u>(L,C)-quasi-geodätisch</u>, wenn sich alle Punkte in X durch (L,C)-quasi-Geodätische verbinden lassen.

<u>Bsp</u>: G Gruppe mit Wortmetrik d_S. Dann ist G nicht geodätisch (wenn $G \neq \{1\}$), aber $(1,1)$-quasi geodätisch

7. <u>Satz</u> (Lemma von Milnor – Švarc)
Sei G eine Gruppe, (X,d) ein metrischer Raum und sei $G \times X \to X$ eine isometrische Wirkung (d.h. für jedes $g \in G$ ist $x \mapsto g(x)$ eine Isometrie). Wir nehmen weiter an:
(a) X ist (L,C)-quasi geodätisch für Konstanten $L \geq 1$, $C > 0$
(b) Es gibt eine beschränkte Menge $K \subseteq X$ mit $X = \bigcup\{g(K) \mid g \in G\}$ (d.h. die Wirkung ist <u>co beschränkt</u>)
(c) Die Menge $S = \{g \in G \mid g(K') \cap K \neq \emptyset\}$ ist endlich, wobei $K' = B_{2C}(K) = \bigcup\{B_{2C}(x) \mid x \in K\}$

Dann gilt $G = \langle X \rangle$ (insbesondere ist G also endlich erzeugt) und für jedes $p \in K$ ist die Abbildung $(G, d_S) \to (X, d)$, $g \mapsto g(p)$ eine quasi-Isometrie.

Beweis ① Sei $g \in G$, $p \in K$ und sei $\gamma : [0, r] \to X$ (L, C)-quasi-Geodätische von $p = \gamma(0)$ und $g(p) = \gamma(r)$. Dann gibt es $s_1, \ldots, s_n \in S$ mit $s_1 \cdots s_n = g$ und $(n-1)\frac{C}{L} \leq r \leq n \cdot \frac{C}{L}$.

Sei $t_j := j\frac{C}{L}$ für $j < \frac{L}{C} r$ sowie $t_n = r$ für n kleinste natürliche Zahl $\geq \frac{L}{C} r$.

Es folgt $(n-1)\frac{C}{L} \leq r \leq n\frac{C}{L}$.

Sei $p_j = \gamma(t_j)$, also $p_0 = p$ $p_n = g(p)$

Da γ ein (L,C)-quasi-Geodätische ist, gilt

$$d(p_j, p_{j+1}) \leq L \cdot d(t_j, t_{j+1}) + C \leq L\frac{C}{L} + C = 2 \cdot C$$

Nach (b) existieren Gruppenelemente $g_j \in G$ mit $p_j \in g_j(K)$. Wir dürfen $g_0 = 1$ und $g_n = g$ wählen.

Weiter folgt $p_{j+1} \in g_{j+1}(K')$, weil $p_j \in g_j(K)$ und $d(p_j, p_{j+1}) \le 2G$ ($\to$ Definition von K'), also $g_{j+1}(K') \cap g_j(K') \neq \emptyset$

$\Rightarrow g_j^{-1} g_{j+1}(K') \cap K' \neq \emptyset \Rightarrow s_j = g_j^{-1} g_{j+1} \in S$

und $g_j s_j = g_{j+1}$, insbesondere

$g_n = g = s_1 \cdots s_n$

Beachte: nach Definition von S gilt $S = S^{-1}$.

(2) Für $p \in K$ ist die Abbildung $(G, d_S) \to (G(p), d)$, $g \mapsto g(p)$ Lipschitz-stetig

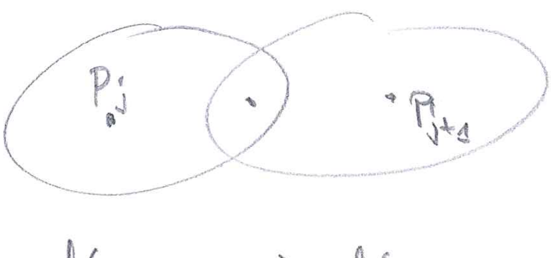
Sei $d_S(g,h) = n$, $g^{-1}h = s_1 \cdots s_n$, $s_i \in S = S^{-1}$

$d(g(p), h(p)) = d(p, g^{-1}h(p))$. Setze $p_j := s_1 \cdots s_j(p)$

$\rightsquigarrow p_0 = p$ und $p_n = g^{-1}h(p)$.

Wegen $K' \cap s_j(K') \neq \emptyset$ folgt

$s_1 \cdots s_j(K') \cap s_1 \cdots s_{j+1}(K') \neq \emptyset$



$\Rightarrow d(p_j, p_{j+1}) \le 2 \cdot \operatorname{diam}(K')$
(und K' ist beschränkt, weil K beschränkt ist!)

$\Rightarrow d(g(p), h(p)) = d(p, s_1 \cdots s_n(p)) \le d(p_0, p_1) + \dots + d(p_{n-1}, p_n)$

$\le n \cdot 2 \operatorname{diam}(K') = d_S(g,h) \cdot 2 \cdot \operatorname{diam}(K')$

(3) <u>Für $p \in K$ ist die Abbildung $G \to G(p)$, $g \mapsto g(p)$ eine quasi-Isometrie</u>

Für jedes $u \in G(p)$ wähle $g_u \in G$ mit $g_u(p) = u$. Sei $u, v \in G(p)$ und $w = g_u^{-1} g_v(p)$.

$\Rightarrow d(u,v) = d(p,w)$. Sei $\gamma : [0,r] \to X$ (L,C)-quasi-Geodätisch mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(r) = w$

$\Rightarrow \frac{1}{L} r - C \leq d(u,v) = d(p,w)$. Nach (1) gilt $l_s(g_u^{-1} g_v) = d_s(g_u, g_w) \leq \frac{L}{c} r + 1$

$$\leq \frac{L}{c}(L\, d(u,v) + LC) + 1$$
$$= \frac{L^2}{c} d(u,v) + (L^2 + 1)$$

Folglich ist $u \mapsto g_u$ grob Lipschitz

$$G(p) \longrightarrow G$$

Weiter gilt $[u \longmapsto g_u \longmapsto g_u(p)] = id_{G(p)}$

sowie $g^{-1} g_u \in S$ für alle $g \in G$ mit $g(p) = u$,

also hat die Abbildung

$$[g \longmapsto g(p) = u \longmapsto g_u]$$

Abstand ≤ 1 von id_G.

(4) Die Inklusion $G(p) \hookrightarrow X$ ist eine quasi-Isometrie.

Für jedes $x \in X$ wähle $r(x) \in G(p)$

so, dass gilt: $x \in G(p) \Rightarrow r(x) = x$

$d(x, r(x)) \leq \mathrm{diam}(K)$.

$[G(p) \hookrightarrow X \xrightarrow{r} G(p)] = id_{G(p)}$

$[X \xrightarrow{r} G(p) \hookrightarrow X]$ hat Abstand $\leq \mathrm{diam}(K)$

von id_X

$G(p) \hookrightarrow X$ ist isometrische Einbettung

$X \xrightarrow{r} G(p)$ ist $(1, 2 \cdot \mathrm{diam}(K))$-grob Lipschitz $\square$

<u>Konvention</u> in der geometrischen Gruppentheorie: Ist G endlich erzeugte Gruppe, so wähle $S \subseteq G$ endliches EZS und betrachte d_S auf G. Die Metrik d_S hängt von S ab, aber nur bis auf bi-Lipschitz-Äquivalenz, vgl §1.2. Alle derartigen Metriken d_S auf G sind also quasi-isometrisch zueinander.

Für G, G' endlich erzeugt bedeutet die Aussage "G und G' sind quasi-isometrisch", dass es eine quasi-Isometrie $\varphi: (G, d_S) \to (G', d_{S'})$ für beliebige endliche EZS $S \subseteq G$ und $S' \subseteq G'$ gibt. Die Wahl von S, S' spielt dafür keine Rolle.

8. <u>Korollar</u> Ist G endlich erzeugt und ist $H \leq G$ Untergruppe von endlichem Index, so ist H endlich erzeugt und $H \hookrightarrow G$ eine quasi-Isometrie.

<u>Beweis</u> Sei $[G:H] = m$, $H\backslash G = \{Hg_1, \dots, Hg_m\}$.

Sei $\{s_1, \dots, s_n\} = S$ EZS von G. Betrachte die H-Wirkung $H \times G \to G$, $(h,g) \mapsto hg$.

Für $K = \{g_1, \dots, g_m\}$ gilt $H(K) = G$.

Weiter ist die H-Wirkung auf G isometrisch bzgl. d_S und (G, d_S) ist $(1,1)$-quasi-geodätisch.

Für jedes $g \in G$ gilt mit

$$B_\ell(g) = \{ g' \in G \mid d_S(g, g') \leq \ell \}$$

$$\# B_\ell(g) \leq (2n)^\ell$$

folglich für $K' = \bigcup_{j=1}^{m} B_2(g_j)$ $\quad \# K' \leq m(2n)^2 < \infty$

Sei $h \in H$ mit $h(K') \cap K' \neq \emptyset$, etwa

$ha = b \qquad a, b \in K'$

$\Rightarrow h = ba^{-1}$

$\Rightarrow \# \{ s \in H \mid s(K') \cap K' \neq \emptyset \} \leq (m(2n)^2)^2 < \infty$.

Jetzt können wir den Satz von Milnor-Švarc anwenden. $\square$

9. <u>Erinnerung:</u> F_m ist die freie Gruppe mit m Basiselementen.

<u>Lemma</u> Für jedes $m \geq 2$ gibt es $H \leq F_2$ mit $[F_2 : H] < \infty$ und $H \cong F_m$

<u>Beweis</u> Betrachte $\pi : F_2 \to (F_2)_{ab} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Setze $H_m = \pi^{-1}\big((m-1)\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \big)$ so

$$[F_2 : H_m] = [\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : (m-1)\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}] = m-1$$

Nach GGTI §7.6 gilt

$$H_m \cong F_h \quad \text{mit} \quad h = (m-1)(2-1) + 1 = m$$

□

<u>Korollar</u> Für alle $m, n \geq 2$ sind F_m und F_n quasi-isometrisch.

<u>Beweis</u> $F_m \underset{qi}{\simeq} F_2 \underset{qi}{\simeq} F_n$ nach obigem Lemma und §1.8 □

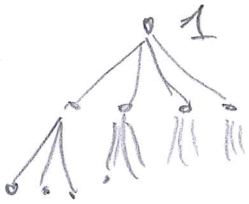
<u>Übungsaufgabe:</u> Die Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und F_2 sind paarweise <u>nicht</u> quasi-isometrisch.

10. **Def** Sei G endlich erzeugte Gruppe und sei $S \subseteq G$ ein endliches EZS.
Sei $B_\ell(1) = B_\ell^G(1) = \{g \in G \mid \ell_S(g) \leq \ell\} \subseteq G$
Man nennt $\beta_{G,S}(\ell) = \# B_\ell^G(1)$ die Wachstumsfunktion von G (bzgl S).

Bsp • $(\mathbb{Z}, \{1\})$

$$\beta_{\mathbb{Z},\{1\}}(\ell) = 2\ell + 1$$

• $F(S)$ freie Gruppe, S endlich, $\# S = m$



$1 \quad (2m)^0 = 1$

$2m$ Elemente in $S \cup S^{-1}$

$2m(2m-1)$

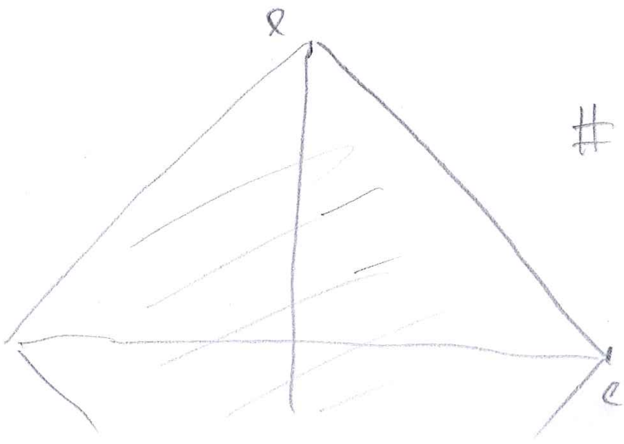
$\vdots$

$2m(2m-1)^{\ell-1}$

$$\beta_{F(S),S}(\ell) = 1 + 2m \sum_{j=0}^{\ell-1} (2m-1)^j = 1 + 2m \frac{(2m-1)^\ell - 1}{(2m-1)-1}$$

• $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $S = \{(1\,0), (0\,1)\}$ Standardbasis

$B_\ell(0)$



$$\# B_\ell(0) = 1 + 4 \frac{(\ell+1)\ell}{2}$$

Def Eine endlich erzeugte Gruppe G hat <u>polynomiales Wachstum vom Grad $\leq d$</u>, wenn es eine Konstante C gibt mit

$$\beta_{G,S}(\ell) \leq C \cdot \ell^d + C$$

#

II. <u>Zum Wachstumsverhalten</u>. Die Funktion $\beta_{G,S}$ ist offensichtlich monoton steigend.

Def Sei $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton, sei $L \geq 1$ und $C \geq 0$. Dann ist auch

$$\sigma_{L,C}(f) = [t \longmapsto L f(L \cdot t + C) + C]$$

monoton steigend und $f \leq \sigma_{L,C}(f)$

Für monotone Funktionen $f, g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightrightarrows \mathbb{R}_{\geq 0}$ schreibe $f \precsim g \iff$ es gibt $L \geq 1$, $C \geq 0$ mit

$$f \leq \sigma_{L,C}(g)$$

Es folgt $f \precsim f$ sowie

$$f \precsim g \precsim h \Rightarrow f \precsim h$$

d.h. $f \sim g \overset{\text{Def}}{\iff} f \precsim g \precsim f$ ist <u>Äquivalenzrelation</u>

und $\preceq$ ist partielle Ordnung auf $\sim$-Äquivalenzklassen.

12. <u>Satz</u> Seien G, H Gruppen mit endlichen EZS $S \subseteq G$, $T \subseteq H$. Sei $\varphi: G \to H$ eine quasi-Isometrie. Dann gilt

$$\beta_{G,S} \sim \beta_{H,T}$$

<u>Beweis</u> Sei $\psi: H \to G$ quasi-Invers zu φ, sei $m \geq 0$ so, dass $d_S(\psi\varphi(g), g) \leq m$ für alle $g \in G$. Es folgt

$$\# \varphi^{-1}(\varphi(g)) \leq (2 \cdot \# S)^m \quad \text{, denn für}$$

alle $a \in \varphi^{-1}(\varphi(g))$ gilt $a \in B_m(\psi\varphi(a)) = B_m(\psi\varphi(g))$.

Aus $d_T(\varphi(g), \varphi(h)) \leq L \cdot d_S(g,h) + C$ folgt

$$\varphi(B_r^G(1)) \subseteq B^H_{L \cdot r + C}(1) \text{, damit}$$

$$\# B_r^G(1) \leq \# B_{L \cdot r + C}(1) \cdot (2 \# S)^m \text{, d.h.}$$

$$\beta_{G,S}(r) \leq \beta_{H,T}(L \cdot r + C) \cdot (2 \# S)^m$$

Sei $K = \max\{L, (2\#S)^n\}$, damit

$$\beta_{G,S}(r) \le \underbrace{K\,\beta_{H,T}(Kr+C) + C}_{= \sigma_{K,C}(\beta_{H,T})}$$

d.h. $\beta_{G,S} \preccurlyeq \beta_{H,T}$.

Genauso $\beta_{H,T} \preccurlyeq \beta_{G,S}$ □

13. Korollar Ist G endlich erzeugte Gruppe und $S,T \subseteq G$ endliche EZS, so gilt

$$\beta_{G,S} \sim \beta_{G,T}$$ □

14. Lemma Sei $m,n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Dann gilt:

(i) $m \le n \iff [t \mapsto t^m] \preccurlyeq [t \mapsto t^n]$

(ii) $[t \mapsto \exp(t)] \sim [t \mapsto \exp(at)]$ für alle $a>0$

(iii) $[t \mapsto t^m] \preccurlyeq [t \mapsto \exp(t)] \not\preccurlyeq [t \mapsto t^n]$

Beweis (i) ($\Rightarrow$) klar

($\Leftarrow$) $t^m \le L(Lt+C)^n + C \Rightarrow t^{m-n} \le L\left(L+\frac{C}{t}\right)^n + \frac{C}{t^n}$

$\overset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \quad m \le n$

(ii) klar: $0 < a \le b \Rightarrow \exp(at) \le \exp(bt)$

sowie $\exp(bt) = \exp(\frac{b}{a} at) \le \frac{b}{a} \exp(\frac{b}{a} at) = \sigma_{\frac{b}{a},0}(\exp(at))$

(iii) $t^m \le \exp(mt) = 1 + mt + \ldots + \underbrace{\frac{1}{m!} m^m}_{\ge 1} t^m + \ldots$

Wäre $[t \mapsto \exp(t)] \preceq [t \mapsto t^n]$, so würde für alle $m \ge 1$ gelten $[t \mapsto t^m] \preceq [t \mapsto t^n]$ ↯ $\square$

15. Beispiele für Wachstum.

(a) $G = \mathbb{Z}^n$, $S = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid |t_j| \le 1\}$

$\rightsquigarrow \beta_{G,S}(\ell) = (2\ell + 1)^n \sim \ell^n$

Polynomiales Wachstum

(b) $G = F_2$ $S = \{a, b\}$

$\beta_{G,S}(\ell) = 2 \cdot 3^\ell - 1 \sim \exp(\ell)$

Nach §1.9 folgt

$\beta_{F_m, S} \sim \exp(\ell)$ für alle $m \ge 2$,

denn $F_m \underset{q.i.}{\simeq} F_2$

<u>Korollar</u> Für $m \neq n$ sind $\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m$ nicht quasi-isometrisch. Für kein $m \geq 2$ und $n \geq 1$ sind F_m und $\mathbb{Z}^n$ quasi-isometrisch.

16. <u>Lemma</u> Seien G, H Gruppen mit endlichen EZS $S \subseteq G$, $T \subseteq H$, sei $\varphi : H \to G$ ein Homomorphismus mit endlichem Kern $N \trianglelefteq H$.

Dann gilt

$$\beta_{H,T} \preccurlyeq \beta_{G,S}$$

<u>Beweis</u> Wegen $\beta_{G,S} \underset{\S 1.13}{\sim} \beta_{G, S \cup \varphi(T)}$ können wir annehmen, dass $\varphi(T) \subseteq S$ gilt. Sei $m = \# N$.

Es folgt $\varphi(B_e^H(1)) \subseteq B_e^G(1)$, also

$$\# B_e^H(1) \leq m \cdot \# B_e^G(1) \qquad \square$$

<u>Korollar</u> Ist G endlich erzeugt und von polynomialem Wachstum, etwa $\beta_{G,S} \precsim [t \mapsto t^m]$, so hat G keine zu F_2 isomorphe Untergruppe. $\square$

<u>Bem</u> Es gibt endlich erzeugte Gruppen, die weder exponentielles noch Polynomiales Wachstum haben (Grigorchuk 1984) - das war lange ein offenes Problem.

17. <u>Def</u> Sei $\mathcal{E}$ eine gruppentheoretische Eigenschaft, etwa "auflösbar" oder "abelsch". Man sagt, eine Gruppe G hat <u>virtuell Eigenschaft $\mathcal{E}$</u>, wenn es eine Untergruppe $H \leq G$ gibt mit $[G:H]$ und wenn H die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat.

<u>Bsp</u>
- G virtuell trivial $\iff$ G endlich (!)
- G virtuell abelsch $\iff$ G hat abelsche Untergruppe von endlichem Index $\overset{!}{\iff}$ G hat abelschen Normalteiler von endlichem Index

- G virtuell frei $\iff$ G hat freie Untergruppe von endlich Index. #