§ 2 Satz von Cartan-Hadamard (lokal $\rightsquigarrow$ global Aussage)

Motivation:

Sei X ein CAT(0)-Raum.

Wir haben gesehen, dass CAT(0)-Räume viele "schöne" Eigenschaften haben:

(i) eindeutig geodätisch
$\rightsquigarrow$ die Mittelpunkte sind eindeutig

(ii) Für $C \subseteq X$ konvex und vollständig haben wir

$$\pi_C : X \to C$$
$$x \mapsto \pi_C(x) \text{ mit } d(x, \pi_C(x)) = d(x, C).$$

$\rightsquigarrow$ X ist kontrahierbar

(iii) Für $A \subseteq X$ (vollst.) beschränkt $\exists!\, c_A \in X$ mit

$$A \subseteq \overline{B_{rad(A)}(c_A)}$$

$\rightsquigarrow$ $G \overset{isom}{\curvearrowright} X$ (vollst.) $|G| < \infty \Rightarrow Fix(G) \neq \emptyset$.

(iv) die metrische Vervollständigung von X ist CAT(0)

Die CAT(0)-Bedingung ist eine <u>globale</u> Bedingung und ist deshalb schwer zu erfüllen.
Einfacher ist es zu zeigen, dass ein metrischer Raum <u>lokal</u> CAT(0) ist.

Sei X ein vollst. metrischer Raum. Dann

$$X \text{ lokal CAT}(0) + \underbrace{???}_{} \Leftrightarrow X \text{ ist CAT}(0)$$

brauchen eine "schwache" globale Bedingung, die einfacher überprüfbar ist als die globale CAT(0) Bedingung

1. Satz (Cartan-Hadamard)

Sei X ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0) Raum. Sei $\tilde{X}$ seine universelle überlagerung. Dann ist $\tilde{X}$ ein CAT(0)-Raum.

2. Korollar

Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Dann

$$X \text{ lokal CAT(0)} + \text{einfach zusammenhängend} \iff X \text{ ist CAT(0)}.$$

Um den Satz zu beweisen, brauchen wir <u>viel</u> Vorarbeit.

Ziel:

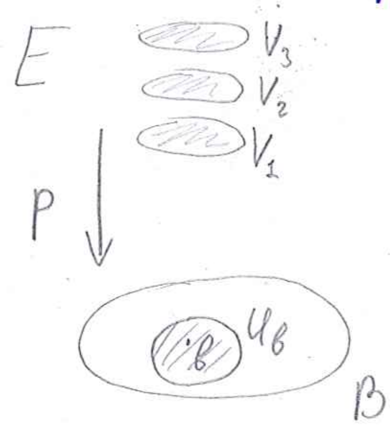
Satz (Cartan-Hadamard):
Sei X ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum. Sei $\tilde{X}$ seine universelle Überlagerung. Dann ist $\tilde{X}$ ein CAT(0)-Raum.

Erinnerung: (siehe Grundlagen ATG von Kramer SS15 Kapitel 3)
Seien E, B topologische Räume. Sei weiter $p: E \to B$ eine stetige surjektive Abbildung. Wir nennen p eine <u>Überlagerung von B</u>, wenn jeder Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung $U_b \subseteq B$ von b hat, mit folgender Eigenschaft:

- es gibt eine Indexmenge $I \neq \emptyset$ mit

$$p^{-1}(U_b) = \dot{\bigcup} \{V_i \mid i \in I\}, \quad V_i \subseteq E \text{ offen}$$
$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j$$

und $p|_{V_i}: V_i \to U_b$ ist für jedes $i \in I$ ein Homöomorphismus.

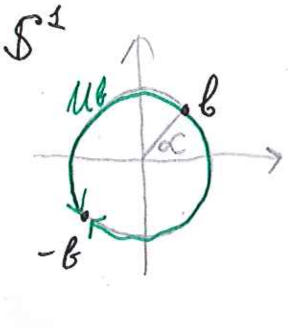


Triviales Beispiel: $p = id: B \to B$ ist eine Überlagerung von B.

Wichtiges Beispiel: $E = \mathbb{R}$, $B = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$$p: E \to B$$
$$t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Das ist eine Überlagerung, denn:



$b = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\alpha = 2\pi r$

$0 \leq r \leq 1$

Für $b = (\cos\alpha, \sin\alpha) \in S^1$ und $U_b = S^1 - \{-b\}$

ist $p^{-1}(U_b) = \bigcup \{(k + r - \frac{1}{2}, k + r + \frac{1}{2}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Fakt: $p: \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ ist eine Überlagerung mit $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend.

Definition:
Eine Überlagerung $p: E \to B$ heißt <u>universelle Überlagerung</u>, wenn E einfach zusammenhängend ist.

Frage: Für welche Räume existiert die universelle Überlagerung?

Satz: Jeder zusammenhängende top. Raum X welcher lokal wegzusammenhängend ist und semilokal einfach zusammenhängend ist, hat eine universelle Überlagerung.
– ohne Beweis –

X heißt <u>semilokal einfach zusammenhängend</u> $\Leftrightarrow \forall x \in X$ $\exists U_x$ offene Umgebung von x s.d.

$$id_* : \pi_1(U_x, x) \to \pi_1(X, x)$$
trivial ist.

Bemerkungen:

(i) Wenn X lokal CAT(0) ist, dann ist X semilokal einfach zusammenhängend: Denn für $x \in X$ $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(x)$ CAT(0) ist. CAT(0)-Räume sind kontrahierbar, folglich ist $\pi_1(B_\varepsilon(x), x) \cong \{0\}$ und damit ist

$$id_* : \pi_1(B_\varepsilon(x), x) \to \pi_1(X, x) \text{ trivial.}$$

(ii) Jeder zusammenhängende lokaler CAT(0) Raum hat also eine universelle Überlagerung.

2. Korollar:
Sei X ein vollst. metr. Raum. Dann:

$$X \text{ lokal CAT(0)} + \text{einfach zusammenhängend} \Longleftrightarrow X \text{ ist CAT(0)}$$

Beweis:

„$\Leftarrow$"

[ÜA: Sei X ein $CAT(0)$ Raum. Dann ist $B_\varepsilon(x)$ für alle $\varepsilon > 0, x \in X$ konvex]

Sei $x \in X$ bel. Dann ist $B_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon > 0$ bel. konvex, folglich ist $B_\varepsilon(x)$ ein $CAT(0)$-Raum.

In § 1.19 haben wir bewiesen, dass X kontrahierbar ist, folglich ist $\pi_1(X, \{x\}) \cong \{0\}$.

Da X wegzusammenhängend ist, folgt insgesamt:

X ist einfach zusammenhängend.

„$\Rightarrow$" Die $id: X \to X$ ist die universelle Überlagerung, da X nach Annahme zusammenhängend ist.

$\overset{C.-H.}{\Longrightarrow}$ X ist $CAT(0)$ $\square$

Satz von Cartan-Hadamard

lokal-global Aussage (Korollar 2)

gibt uns eine Möglichkeit viele $CAT(0)$-Räume zu erhalten

aus topologischer Sicht: Werkzeug um zu zeigen, dass die universelle Überlagerung kontrahierbar ist.

Um den Satz von Cartan-Hadamard zu beweisen, brauchen wir <u>viel</u> Vorarbeit.

Wir machen zuerst ein paar Vorüberlegungen:

Wir haben:

$$\begin{array}{c} \tilde{X} \\ p \big\downarrow \\ X \end{array}$$

$\tilde{X}$ ← wir werden eine Metrik auf $\tilde{X}$ definieren, sodass p eine lokale Isometrie ist, d.h.: Für $\tilde{x} \in \tilde{X}$ $\exists\, \varepsilon > 0$, s.d.

$$p : B_\varepsilon(\tilde{x}) \to B_\varepsilon(p(\tilde{x}))$$

eine Isometrie ist.

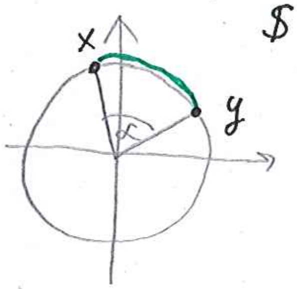
X vollst. metr. zus. lokaler CAT(0) Raum

⇝ Längenmetrik

⇝ Längenräume

§2.1 Längenräume

Motivation:



$\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{E}^2$

⇝ die induzierte Metrik von $\mathbb{E}^2$ auf $\mathbb{S}^1$ ist keine "gute" Metrik um Geometrie zu machen.

"Gute" Metrik: $d_L(x,y)$ = "Bogenlänge zwischen x und y"
$= \arccos(\langle x,y \rangle)$

Allgemeiner Konzept: ⇝ betrachte Wege von x nach y

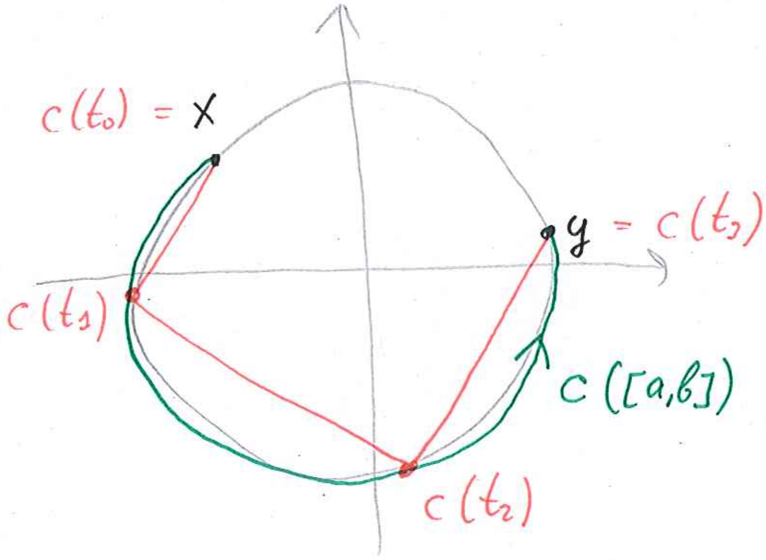
3. Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $c : [a,b] \to X$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung c heißt <u>Weg von $c(a)$ nach $c(b)$</u>.

Wir definieren die <u>Länge von c</u> folgendermaßen:

$$\ell(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(c(t_{i-1}), c(t_i)) \;\middle|\; a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,\ n \in \mathbb{N} \right\} \in [0,\infty]$$

Falls $\ell(c) < \infty$, heißt c <u>rektifizierbar</u>.



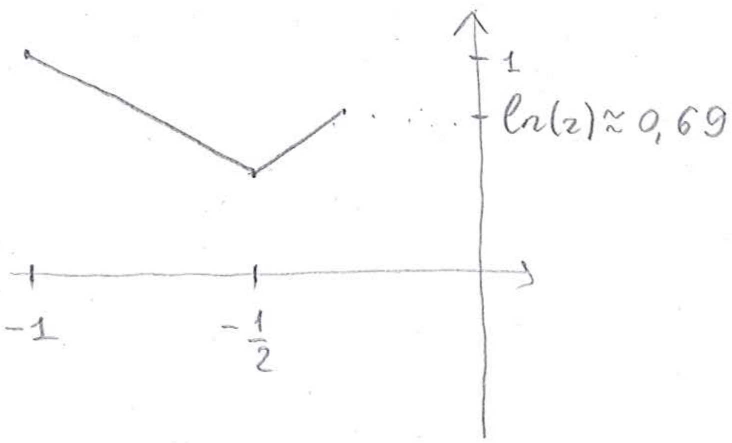
$$\ell(c) \geq d(c(t_0), c(t_1)) + d(c(t_1), c(t_2)) + d(c(t_2), c(t_3)).$$

4. Bemerkung

Es gibt Wege, die nicht rektifizierbar sind. Wir betrachten das folgende Beispiel:

$$c : [-1, 0] \to \mathbb{R}$$
$$-\frac{1}{n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$
$$0 \longmapsto \ln(2)$$

und $c\big|_{[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]}$ ist linear.



$$c(-1) = 1$$
$$c(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$
$$c(-\tfrac{1}{3}) = \tfrac{5}{6}$$

Wir betrachten $t_n = -\frac{1}{n}$.

Damit erhalten wir:

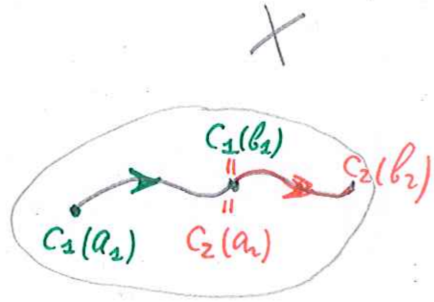
$$\ell(c) \geq \ell\left(c\big|_{[-1, -\frac{1}{n+1}]}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} d_2(c(t_i), c(t_{i+1}))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1}$$

$\overset{\lim}{\underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow}} \ell(c) \geq \infty.$

5. Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und

$$c_1 : [a_1, b_1] \to X$$
$$c_2 : [a_2, b_2] \to X$$



zwei Wege mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$

(i) Der <u>zusammengesetzte Weg</u> $c_1 * c_2$ von $c_1(a_1)$ nach $c_2(b_2)$ ist definiert wie folgt:

$$c_1 * c_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to X$$
$$t \longmapsto \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1] \\ c_2(t + a_2 - b_1), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

(ii) Der <u>inverse Weg</u> von c_1 ist def. wie folgt:

$$\overline{c_1} : [a_1, b_1] \to X$$
$$t \longmapsto c_1(a_1 + b_1 - t)$$

6. Proposition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $c : [a,b] \to X$ ein Weg. Dann gilt:

(i) $\ell(c) \geq d(c(a), c(b))$ und $\ell(c) = 0$ genau dann wenn c konstant ist.

(ii) Sei $\varphi : [a', b'] \twoheadrightarrow [a,b]$ eine schwach monotone surjektive stetige Funktion. Dann gilt:

$$\ell(c) = \ell(c \circ \varphi).$$

(iii) Additivität:

Seien $c_1 : [a_1, b_1] \to X$ und $c_2 : [a_2, b_2] \to X$ zwei Wege in X mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$.

Dann gilt: $\ell(c_1 * c_2) = \ell(c_1) + \ell(c_2)$.

(iv) $\ell(\bar{c}) = \ell(c)$

(v) Wenn $\ell(c) < \infty$, dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_c : [a,b] &\to [0, \ell(c)] \\ t &\mapsto \ell(c|_{[a,t]}) \end{aligned}$$

eine stetige schwach monotone surjektive Funktion.

(vi) Parametrisierung nach der Bogenlänge:

Wenn $\ell(c) < \infty$, dann existiert ein eindeutiger Weg

$\tilde{c} : [0, \ell(c)] \to X$ mit $\tilde{c} \circ \lambda_c = c$

$$\ell(\tilde{c}|_{[0,t]}) = t.$$

(vii) Sei $(c_n : [a,b] \to X)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Wegen die gleichmäßig gegen einen Weg $c : [a,b] \to X$ konvergiert. Wenn $\ell(c) < \infty$, dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \text{ mit } \ell(c) \leq \ell(c_n) + \varepsilon \ \forall n \geq N(\varepsilon).$$

<u>Beweis:</u>

(i), (ii), (iii), (iv), (vi) ÜA.

Zu (V):

Zuerst zeigen wir, dass l_c schwach monoton ist.
Seien $t, t' \in [a,b]$ mit $t \leq t'$.

Dann ist: $c|_{[a,t']} = c|_{[a,t]} * c|_{[t,t']}$

Mit (ii) erhalten wir:

$$\ell(c|_{[a,t']}) = \ell(c|_{[a,t]}) + \ell(c|_{[t,t']})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ell(c|_{[a,t]})}_{\overset{\text{Def.}}{=} \, l_c(t)} \leq \underbrace{\ell(c|_{[a,t']})}_{\overset{\text{Def.}}{=} \, l_c(t')}$$

Zur Stetigkeit: Wir zeigen, dass l_c gleichmäßig stetig ist.
Sei $\varepsilon > 0$.

Da $[a,b]$ kompakt ist, ist der Weg c gleichmäßig stetig.
Also $\exists \, \delta > 0$ s.d. $\forall \, t, t' \in [a,b]$ mit $d(t,t') < \delta$, gilt:

$$d(c(t), c(t')) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Für $\frac{\varepsilon}{4}$ existiert $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b$ mit

(a) $\sum_{i=0}^{n} d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{4} > \ell(c)$

Weiter können wir annehmen, dass gilt:

(b) $\quad d(t_i, t_{i+1}) < \delta \quad \forall \, i \in \{0, \ldots, n\}$.

(Wenn das nicht gilt, dann wähle eine Verfeinerung).

Wir erhalten:

$$\ell(c) \overset{(ii)}{=} \sum_{i=0}^{n} \ell\left(c|_{[t_i,t_{i+1}]}\right) \overset{(i)}{\geq} \sum_{i=0}^{n} d(c(t_i),c(t_{i+1}))$$

$$\overset{(a)}{>} \ell(c) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Folglich:

$$\left| \ell\left(c|_{[t_i,t_{i+1}]}\right) - d(c(t_i),c(t_{i+1}))\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da $d(c(t_i),c(t_{i+1})) < \frac{\varepsilon}{4}$, erhalten wir:

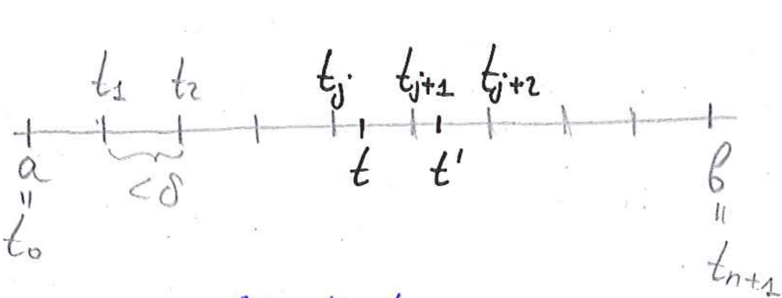
$$\ell\left(c|_{[t_i,t_{i+1}]}\right) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt erhalten wir:

Für alle $t,t' \in [a,b]$ mit $d(t,t') < \delta$ gilt:

$$|\lambda_c(t) - \lambda_c(t')| = \ell\left(c|_{[t,t']}\right) \leq \ell\left(c|_{[t_j,t_{j+2}]}\right) < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für ein $j \in \{0,\dots,n-1\}$.



<u>Zur Surjektivität:</u>

Es gilt: $\lambda_c(a) = 0$ und $\lambda_c(b) = \ell(c)$. Die Abbildung λ_c ist stetig und $[a,b]$ ist zusammenhängend. Folglich ist $\lambda_c([a,b])$ zusammenhängend und erhalten wir $\lambda_c[a,b] = [0,\ell(c)]$.

6. Proposition

Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

(vii) Sei $(c_n : [a,b] \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wegen die gleichmäßig gegen einen Weg $c : [a,b] \to X$ konvergiert.

Wenn $\ell(c) < \infty$, dann gilt:

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon)$ mit $\ell(c) \leq \ell(c_n) + \varepsilon \;\; \forall\, n \geq N(\varepsilon)$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $t_i \in [a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = b$ mit

$$\circledast \quad \ell(c) \leq \sum_{i=0}^{k} d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen c konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$, s.d. gilt:

$$\circledast\circledast \quad d(c(t), c_n(t)) < \frac{\varepsilon}{4\cdot(k+1)} \text{ für alle } N \leq n \text{ und alle } t \in [a,b]$$

Wir erhalten:

$$\ell(c) \overset{\circledast}{\leq} \sum_{i=0}^{k} d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2}$$

[Nebenrechnung: $d(c(t_i), c(t_{i+1})) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underline{d(c(t_i), c_n(t_i))}$

$+ d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) + \underline{d(c_n(t_{i+1}), c(t_{i+1}))}$

$\overset{\circledast\circledast}{\leq} \frac{\varepsilon}{2\cdot(k+1)} + d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) \quad \forall\, n \geq N$]

Also:

$$\ell(c) \leq (k+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(k+1)} + \sum_{i=0}^{k} d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \ell(c_n) + \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \qquad \square$$

7. Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. d heißt <u>Längenmetrik</u> falls für alle $x,y \in X$ gilt:

$$d(x,y) = \inf\{ \ell(c) \mid c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y \}$$

Falls d eine Längenmetrik ist, heißt (X,d) ein <u>Längenraum</u>.

8. Beispiel

(i) Jeder geodät. Raum X ist ein Längenraum.

Genauer: Seien $x,y \in X$ bel. Sei weiter $\gamma : [0, d(x,y)] \to X$ eine Geodäte zwischen x und y.

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = d(x,y)$ mit

$$\ell(\gamma) \leq \sum_{i=0}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon$$

$$\overset{\gamma \text{ isom. Einb.}}{=} \sum_{i=0}^{n} d_2(t_i, t_{i+1}) + \varepsilon$$

$$= d(x,y) + \varepsilon$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{n}$ erhalten wir im Limes $n \to \infty$: $\ell(\gamma) \leq d(x,y)$.

Mit $\ell(\gamma) \overset{\text{Prop. 6(i)}}{\geq} d(\gamma(0), \gamma(d(x,y))) = d(x,y)$ folgt Gleichheit.

(ii) I.A. ist ein Längenraum nicht geodätisch. Z.B ist $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, d_2)$ ein Längenraum aber zwischen $(-1,0)$ und $(1,0)$ ex. keine Geodäte.

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann induziert d eine Längenmetrik d_L auf X und zwar wie folgt:

9. Definition / Satz:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$d_L : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
$$(x,y) \mapsto \inf\{\, \ell(c) \mid c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y \,\}$$

Falls kein rektifizierbarer Weg von x nach y existiert, dann setzen wir $d_L(x,y) = \infty$.

Es gilt:

(i) d_L ist eine Metrik auf X (Konvention: $a + \infty = \infty \;\; \forall a \in [0,\infty]$)

(ii) $d_L(x,y) \geq d(x,y) \;\; \forall x,y \in X$

Wir nennen d_L die <u>zu d assoziierte Längenmetrik.</u>

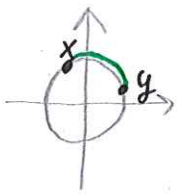
<u>Beweis:</u>

(i) + (ii) folgen sofort mit Proposition 6. $\square$

10. Beispiele

(i) $(\mathbb{Q}, d_2) \rightsquigarrow d_{2L}(x,y) = \infty \;\; \forall x,y \in \mathbb{Q}$ mit $x \neq y$

(ii) $(S^1, d_2) \rightsquigarrow d_{2L}(x,y) = \arccos(\langle x, y \rangle)$



11. Proposition

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(i) Sei $c : [a,b] \to X$ ein rektifizierbarer Weg in (X,d), dann ist c auch ein rektifizierbarer Weg in (X,d_L) und $\ell^{d}(c) = \ell^{d_L}(c)$.

(ii) Es gilt: $(d_L)_L = d_L$

<u>Beweis:</u>

<u>zu (i):</u> Wir zeigen zuerst, dass $c : [a,b] \to (X, d_L)$ stetig ist.

Sei $t \in [a,b]$ bel. Sei weiter $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Wir müssen zeigen, dass gilt: $\lim_{n\to\infty} c(t_n) = c(t)$.

Sei $\varepsilon > 0$.

$$d_L(c(t), c(t_n)) \leq \ell(c|_{[t,t_n]})$$

$$= |l_c(t_n) - l_c(t)|$$

Da l_c stetig ist, $\exists\, M(\varepsilon)$ mit

$$|l_c(t_n) - l_c(t)| < \varepsilon \;\forall\, n \geq M(\varepsilon).$$

Da $d_L(x,y) \geq d(x,y) \;\forall\, x,y \in X$ gilt, folgt:

$$\ell^{d_L}(c) \geq \ell^d(c).$$

Weiter haben wir:

$$\ell^{d_L}(c) \overset{\text{Def.}}{=} \sup\left\{ \sum_{i=0}^{n} d_L(c(t_i), c(t_{i+1})) \;\middle|\; a = t_0 < \ldots < t_{n+1} = b,\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\leq \sup\left\{ \sum_{i=0}^{n} \ell^d(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) \;\middle|\; a = t_0 < \ldots < t_{n+1} = b,\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \ell^d(c).$$

(ii) folgt sofort aus (i).

□

Im Allgemeinen muss ein Längenraum nicht geodätisch sein, z.B. $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, d_2)$ ist ein Längenraum aber nicht geodätisch.

nicht vollständig

Frage: (X,d) Längenraum + ??? $\Rightarrow$ (X,d) ist geodätisch

12. Definition
Ein metrischer Raum (X,d) heißt <u>lokal kompakt</u>, wenn für alle $x \in X$ $\exists$ $r>0$ s.d. $\overline{B_r(x)}$ kompakt ist.

13. Theorem (Hopf-Rinow)
Sei (X,d) ein Längenraum. Wenn X vollständig und lokal kompakt ist, dann gilt:

(i) $\overline{B_r(x)}$ sind kompakt für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$

(ii) (X,d) ist geodätisch.

<u>Beweis:</u>

zu (i): Sei $x \in X$ beliebig. Wir definieren

$$\Sigma := \{ r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \overline{B_r(x)} \text{ ist kompakt} \}$$

Wir müssen zeigen, dass gilt: $\Sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

<u>Beweisidee:</u> Wir zeigen $\Sigma \neq \emptyset$, Σ ist offen und abgeschlossen.
Da $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zusammenhängend ist, folgt dann: $\Sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- $\Sigma \neq \emptyset$, da $0 \in \Sigma$.

(*) • Falls $r \in \Sigma$, dann ist auch $[0,r] \subseteq \Sigma$. Genauer:
Sei $r' \in [0,r]$ bel., dann ist

$\overline{B_{r'}(x)} \subseteq \overline{B_r(x)}$ als abgeschlossene Teilmenge in einem kompakten Raum kompakt. Folglich: $r' \in \Sigma$.

Zu Σ ist offen:

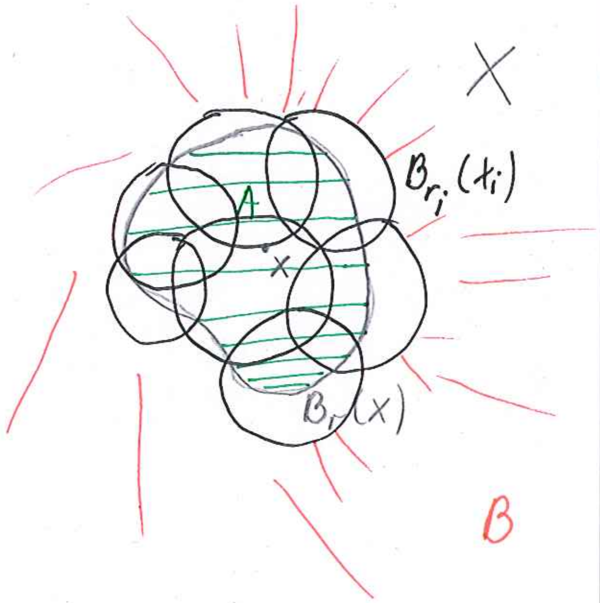
Sei $r \in \Sigma$ bel. Wir müssen zeigen, dass eine offene Umgebung U_r von r existiert mit $U_r \subseteq \Sigma$.

1. Fall: $r=0$

Da X lokal kompakt ist, $\exists\ r' \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\overline{B_{r'}(x)}$ ist kompakt. Mit ⊛ folgt $[0,r'] \subseteq \Sigma$, also $U_0 := [0, r') \subseteq \Sigma$.

2. Fall: $r \in \Sigma \cap \mathbb{R}_{>0}$

Es gilt also: $\overline{B_r(x)}$ ist kompakt.



Sei $x_i \in X$ bel. Da X lokal kompakt ist, ex. $r_i > 0$ mit $\overline{B_{r_i}(x_i)}$ kompakt.

Wir betrachten die offene Überdeckung von $\overline{B_r(x)}$:

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \bigcup_{x_i \in X} B_{r_i}(x_i).$$

Da $\overline{B_r(x)}$ kompakt ist, $\exists\ x_1, \dots, x_n \in X$ mit

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i)$$

Betrachte: $\underbrace{A := \overline{B_r(x)}}_{\text{kompakt}}$ und $\underbrace{B = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i)}_{\text{abgeschlossen}}$

Es gilt: $A \cap B = \emptyset$

Dann $\exists\ \delta > 0$ mit $\inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\} > 2 \cdot \delta$ (gleich genauer)!

Folglich ist: $\underbrace{\overline{B_{r+\delta}(x)}}_{\text{abgeschlossen}} \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_{r_i}(x_i)}}_{\text{kompakt}} \Rightarrow \overline{B_{r+\delta}(x)}$ ist kompakt

$\Rightarrow U_r := (\delta - r, r+\delta) \cap [0, r+\delta) \subseteq \Sigma$

zu ∇:

$\mathbb{A}$: $\inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\} = 0$

Dann $\exists$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B mit $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$

Da A kompakt ist, $\exists$ konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

Wir erhalten:

$$0 = \lim_{k\to\infty} d(a_{n_k}, b_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} d(a, b_{n_k})$$

Also: $b_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$. Da B abgeschlossen ist, liegt $a \in B$. $\lightning$

zu $A \cap B = \emptyset$.

zu Σ ist abgeschlossen:

Wir benutzen das folgende Kriterium:

Sei Y ein metr. Raum. $A \subseteq Y$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für alle Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die in Y konvergieren, so liegt der Grenzwert schon in A.

In unserem Fall reicht es zu zeigen:

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $[0,r) \subseteq \Sigma$, ist auch $r \in \Sigma$.

Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $[0,r) \subseteq \Sigma$ bel.

Wir müssen zeigen, dass $\overline{B_r(x)}$ kompakt ist.

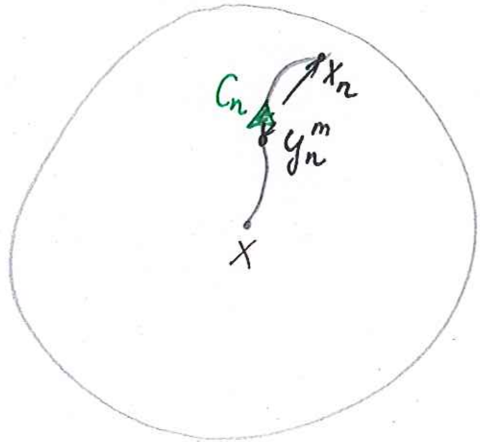
In metr. Räumen sind die Begriffe Folgenkompaktheit (jede Folge hat eine konvergente Teilfolge) und Kompaktheit äquivalent.

Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in $\overline{B_r(x)}$. Wir müssen zeigen, dass $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge hat.

Wir können annehmen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = r$ ist.
Andernfalls können wir eine Teilfolge (x_{n_k}) in $(x_n)_n$ finden, s.d. $x_{n_k} \in \overline{B_{r'}(x)}$ für ein $r' \in [0,r)$.
Da $\overline{B_{r'}(x)}$ kompakt ist, ex. eine Teilfolge $(x_{n_{k_\ell}})_\ell$ die konvergent ist.

Wir konstruieren eine Hilfsfolge:
Seien $n, m \in \mathbb{N}$ bel.
Betrachte $c_n : [a,b] \to X$

$$c(a) = x$$
$$c(b) = x_n$$



mit $\ell(c_n) < r - \frac{1}{2+2m}$

und sei $y_n^m \in \mathrm{Bild}(c_n)$ bel. mit

$$d(x_n, y_n^m) < \frac{1}{m+1}$$

<u>Also gilt:</u>

$$d(x, y_n^m) < r - \frac{1}{2+2m}$$
$$d(x_n, y_n^n) < \frac{1}{m+1}$$

Für festes m liegt $(y_n^m)_n$ in der komp. Menge $\overline{B_{r-\frac{1}{2+2m}}(x)}$

Das heisst für festes m hat $(y_n^m)_n$ eine konvergente Teilfolge.

<u>Diagonaltrick:</u>
Sei $(y^1_{n^1_k})_k$ eine konv. Teilfolge von $(y^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sei $(y^2_{n^2_k})_k$ — " — $(y^2_{n^1_k})_k$

u.s.w.
Definiere $\forall k \in \mathbb{N} \quad n_k := n_k^k$

Dann $(y^m_{n_k})_k$ eine konv. Folge $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

<u>Beh</u>: (x_{n_k}) konvergiert.

Wir zeigen: (x_{n_k}) ist eine Cauchy-Folge. Da $\overline{B_r(x)}$ abgeschlossene Teilmenge in einem vollst. Raum ist, ist $\overline{B_r(x)}$ vollständig. Damit liegt dann $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in \overline{B_r(x)}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei weiter $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \cdot \frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ bel.

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_{n_k}, y^m_{n_k}) + d(y^m_{n_k}, y^m_{n_l}) + d(y^m_{n_l}, x_{n_l})$$

$$< 2 \cdot \frac{1}{m+1} + d(y^m_{n_k}, y^m_{n_l})$$

Da $(y^m_{n_k})$ für alle m konvergent ist, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(y^m_{n_k}, y^m_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, k,l > N.$$

Wir erhalten:

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\, k,l > N.$$

zu (ii):

Wir zeigen, dass (X,d) Mittelpunkte hat. Dann folgt mit §1, dass (X,d) geodätisch ist.

Seien $x,y \in X$ bel. Da (X,d) ein Längenraum ist, gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$, $c_n : [a_n, b_n] \to X$ mit $\ell(c_n) \leq d(x,y) + \frac{1}{n}$

$a_n \mapsto x$

$b_n \mapsto y$

13. Theorem (Hopf-Rinow)

Sei (X,d) ein Längenraum. Wenn X vollständig und lokal kompakt ist, dann gilt:

(i) $\overline{B_r(X)}$ sind kompakt für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

(ii) (X,d) ist geodätisch.

Um die Aussage (ii) zu beweisen, brauchen wir ein Resultat von Arzelà-Ascoli.

14. Definition

Seien X und Y metrische Räume. Eine Folge von Abbildungen $(f_n : X \to Y)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt gleichstetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon \quad \text{für alle } x, x' \in X \text{ mit } d(x,x') < \delta.$$

15. Lemma (Arzelà-Ascoli)

Sei X ein separabler metrischer Raum und Y ein kompakter metrischer Raum.

Dann hat jede gleichstetige Folge von Funktionen $(f_n : X \to Y)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von X gegen die stetige Funktion $f := \lim_k f_{n_k}$ konvergiert.

Beweis:

- Da X separabel ist, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge Q von X. Wähle so ein $Q = \{q_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.
- Für jedes $q_j \in Q$ betrachten wir die Folge

$$(f_n(q_j))_{n \in \mathbb{N}}$$

- $f_n(q_j) \in Y \ \forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow (f_n(q_j))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge im kompakten metrischen Raum und hat daher eine konvergente Teilfolge.

- Wir wählen eine Teilfolge $(n_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$, s.d.

$$(f_{n_k^1}(q_1))_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert,}$$

dann induktiv eine Teilfolge $(n_k^j)_k$ von (n_k^{j-1}), s.d.

$$(f_{n_k^j}(q_j))_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert.}$$

$\rightsquigarrow$ Diagonaltrick: $(f_{n_k^k}(q_j))_k$ konvergiert für jedes $j \in \mathbb{N}$.

- Wir definieren $f: Q \to Y$ wie folgt:

$$q_j \mapsto \lim_{k\to\infty} f_{n_k^k}(q_j)$$

- Nun zeigen wir, dass f gleichmäßig stetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

Da $(f_n: X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichstetig ist, existiert $\delta > 0$ s.d.

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(f_n(x), f_n(x')) \leq \varepsilon \text{ für alle } x, x' \in X \text{ mit } d(x,x') < \delta$$

Also insbesondere:

$$d(f_{n_k^k}(q), f_{n_k^k}(q')) \leq \varepsilon \text{ für alle } q, q' \in Q \text{ mit } d(q,q') < \delta.$$

$\overset{\lim_{k\to\infty}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{k\to\infty} d(f_{n_k^k}(q), f_{n_k^k}(q')) \leq \varepsilon$ für alle $q, q' \in Q$ mit $d(q,q') < \delta$

$\overset{d \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $d(f(q), f(q')) \leq \varepsilon$ für alle $q, q' \in Q$ mit $d(q,q') < \delta$.

$\rightsquigarrow$ folglich ist $f: Q \to Y$ gleichmäßig stetig

- Gleichmäßig stetige Funktionen lassen sich stetig fortsetzen:

$$f: X \to Y$$
$$x \longmapsto \lim_{i\to\infty} f(q_i) \quad \text{wobei } q_i \in Q \text{ mit } \lim_{i\to\infty} q_i = x$$

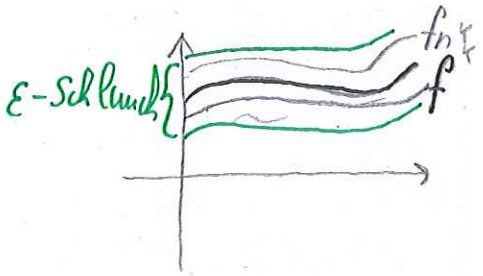
- da f gleichmäßig stetig ist, ist $(f(q_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.
- Cauchy-Folgen sind beschränkt, d. h. $\exists\, r > 0$ und $y \in Y$ mit $f(q_i) \in \overline{B_r(y)} \subseteq Y$
- $\overline{B_r(y)}$ ist als abgeschlossene Teilmenge in einem komp. Raum wieder kompakt, also insbesondere folgenkompakt. Folglich ex. eine konvergente Teilfolge $(f(q_{i_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $\tilde{y} = \lim_{k\to\infty} f(q_{i_k})$.

  Da $(f(q_i))$ eine Cauchy-Folge ist, gilt:

$$\lim_{i\to\infty} f(q_i) = \tilde{y}.$$

- Sei nun $K \subseteq X$ kompakt. Wir müssen nun zeigen, dass $(f_{n_k^k}: K \to Y)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: K \to Y$.

Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist $N \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $n_k^k > N$ und alle $x \in K$ gilt:



$$d\left(f_{n_k^k}(x), f(x)\right) < \varepsilon$$

- Da $\left(f_{n_k^k} : X \to Y\right)_k$ gleichstetig ist, ex. für $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $\delta > 0$ s.d. für alle n_k^k gilt:

$\circledast$ $\quad d\left(f_{n_k^k}(x), f_{n_k^k}(x')\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$.

$\circledast\circledast \overset{\lim_k}{\Rightarrow} \quad d\left(f(x), f(x')\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad$ –"–

- Weiter betrachten wir die offene Überdeckung:

$$K \subseteq \bigcup_{q_j \in Q} B_\delta(q_j) \overset{K \text{ kompakt}}{\rightsquigarrow} K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} B_\delta(q_j) \quad \circledast\circledast\circledast$$

- Wähle $N \in \mathbb{N}$ s.d. $d\left(f_{n_k^k}(q_j), f(q_j)\right) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, n_k^k \geq N$ und alle $j \in \{1, \dots, \ell\}$. $\circledast\circledast\circledast\circledast$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f_{n_k^k}(x)\right) &\leq d\left(f(x), f(q_j)\right) \\ &+ d\left(f(q_j), f_{n_k^k}(q_j)\right) \\ &+ d\left(f_{n_k^k}(q_j), f_{n_k^k}(x)\right) \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{nach } \circledast\circledast} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{nach } \circledast\circledast\circledast\circledast} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{nach } \circledast} = \varepsilon \quad \forall\, n_k^k \geq N \end{aligned}$$

und alle $x \in K$.

$\exists\, j \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $x \in B_\delta(q_j)$ (siehe $\circledast\circledast\circledast$) also $d(x, q_j) < \delta$

□

Beweis: (Theorem 13(ii)):

Erinnerung: (siehe Proposition 6):

Sei $c:[a,b]\to X$ ein rektifizierbarer Weg, dann ist

$$\lambda_c : [a,b] \to [0, \ell(c)], \quad t \mapsto \ell(c|_{[a,t]})$$

eine stetige schwach monotone surjektive Funktion.

Weiter ex. ein Weg $\tilde{c}:[0,\ell(c)]\to X$ mit

$$\tilde{c}\circ\lambda_c = c \qquad \ell(\tilde{c}|_{[0,t]}) = t$$

Sei $\varphi:[0,1]\to[a',b']$ eine schwach monotone surjektive stetige Funktion. Dann gilt:

$$\ell(c) = \ell(c\circ\varphi).$$

Für einen rektifizierbaren Weg $c:[a,b]\to X$ definieren wir

$$c' : [0,1] \to [0,\ell(c)] \to X$$
$$t \mapsto t\cdot\ell(c) \mapsto \tilde{c}(t\cdot\ell(c))$$

Es gilt: $\ell(c'|_{[t,t']}) = |t-t'|\cdot\ell(c')$.

Seien $x,y\in X$, $x\neq y$ bel. Da X ein Längenraum ist, existieren Wege

$$c_n : [a_n,b_n] \to X, \quad a_n \mapsto x, \quad b_n \mapsto y$$

mit $\ell(c_n) \leq d(x,y) + \frac{1}{n}$

- Wir betrachten nun die Folge von Wegen:

$$(c_n' : [0,1] \to X)_{n \in \mathbb{N}}$$

__Beh:__ $(c_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichstetig.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren $\delta := \dfrac{\varepsilon}{d(x,y)+1}$

Für $t,t' \in [0,1]$ mit $d(t,t') < \delta$ gilt:

$$d(c_n'(t), c_n'(t')) \leq \ell\left(c_n'|_{[t,t']}\right)$$

$$\leq \frac{\ell(c_n'|_{[t,t']})}{\ell(c_n')} \cdot (d(x,y)+1)$$

$$\underbrace{\ell(c_n)}_{=\ell(c_n')} \leq d(x,y) + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{d(x,y)+1}{\ell(c_n')}$$

$$= d(t,t') \cdot (d(x,y)+1)$$

$$< \delta \cdot (d(x,y)+1)$$

$$= \varepsilon.$$

- Weiter gilt: $\mathrm{Bild}(c_n') \subseteq \overline{B_{d(x,y)+1}(x)}$.

Nach (i) ist $\overline{B_{d(x,y)+1}(x)}$ kompakt.

• Insgesamt haben wir:

$$\left(c_n' : [0,1] \to \overline{B_{d(x,y)+1}(x)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{gleichstetig}$$

separabler metr. Raum   kompakter metr. Raum

Arzelà-Ascoli $\Longrightarrow$ es existiert eine konvergente Teilfolge $(c_{n_k}')_{k\in\mathbb{N}}$ die gleichmäßig gegen den Weg $c' : [0,1] \to X$ von x nach y konvergiert.

• Für $\frac{1}{k}$ existiert nach Proposition 6 $N \in \mathbb{N}$, s.d. gilt:

$$d(x,y) \le \ell(c') \le \ell(c_{n_k}') + \frac{1}{k} \quad \forall\, n_k \ge N$$

$$\le d(x,y) + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k} \quad \forall\, n_k \ge N$$

$$\ell(c_{n_k}') \le d(x,y) + \frac{1}{n_k}$$

$$\overset{\lim_{k\to\infty}}{\Longrightarrow} \quad d(x,y) \le \ell(c') \le d(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \ell(c') = d(x,y)$$

Dann ist $\tilde{c}' : [0, d(x,y)] \to X$ aus Proposition 6 eine Geodäte von x nach y.

 $\square$.

16. Korollar:

Sei X ein Längenraum. Dann gilt:

$$X \text{ vollständig + lokal kompakt} \iff \overline{B_r(x)} \text{ kompakt für alle } x \in X \text{ und alle } r \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$" Theorem 13.

„$\Leftarrow$" X lokal kompakt ✓

Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Cauchy-Folgen sind beschränkt, folglich ex. $x \in X$ und $r > 0$ mit

$$x_i \in \overline{B_r(x)} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Nach Annahme ist $\overline{B_r(x)}$ kompakt, also ex. eine konv. Teilfolge $x_{i_n} \xrightarrow{n \to \infty} x'$.

Da (x_i) eine Cauchy-Folge ist, gilt: $\lim_{i \to \infty} x_i = x'$. □

17. Definition:

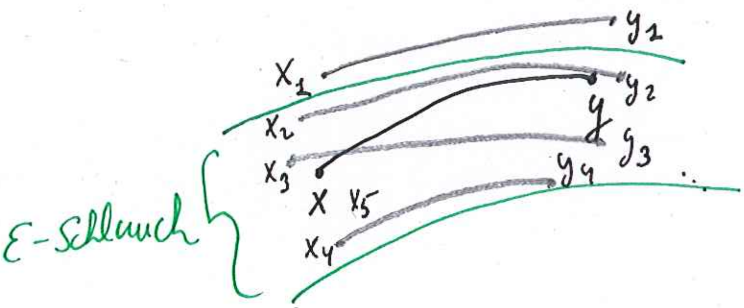
Sei X ein eindeutig geodätischer Raum. Die Geodäten in X hängen stetig von ihren Endpunkten ab, wenn folgendes gilt:

Seien $x, y \in X$ bel. und $c : [0, d(x,y)] \to X$ die Geodäte von x nach y. Seien weiter $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in X mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim_{n \to \infty} y_n = y$. und $c_n : [0, d(x_n, y_n)] \to X$ die Geodäte von x_n nach y_n. Dann konvergiert die Folge von Wegen

$$\left(\begin{array}{l} c_n' : [0,1] \to [0, d(x_n, y_n)] \to X \\ \quad t \mapsto t \cdot d(x_n, y_n) \mapsto c_n(t \cdot d(x_n, y_n)) \end{array} \right)$$

gleichmäßig gegen $c' : [0,1] \to [0, d(x,y)] \to X$

$$t \mapsto t \cdot d(x,y) \mapsto c(t \cdot d(x,y))$$



18. Satz:

Sei X ein CAT(0)-Raum. Dann hängen die Geodäten stetig von ihren Endpunkten ab.

Beweis: Seien $x, y \in X$ bel. Seien weiter $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Weiter seien $c : x \rightsquigarrow y$, $c_n : x_n \rightsquigarrow y_n$, $\sigma_n : x_n \rightsquigarrow y$ Geodäten.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, s.d. gilt: $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$d(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

$$\begin{aligned}
d(c'(t), c_n'(t)) &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(c'(t), \sigma_n'(t)) \\
&\quad + d(\sigma_n'(t), c_n'(t)) \\
&\leq (1-t) \cdot d(c'(0), \sigma_n'(0)) \\
&\quad + t \cdot d(\sigma_n'(1), c_n'(1)) \\
&\leq d(x, x_n) + d(y, y_n) \\
&= \varepsilon. \quad \forall n \geq N.
\end{aligned}$$

die Metrik ist konvex

$\square$

Wiederholung:

15. Lemma (Arzelà-Ascoli)

Sei X ein separabler metrischer Raum und Y ein kompakter metrischer Raum. Dann hat jede gleichstetige Folge von Funktionen $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von X gegen die stetige Funktion $f := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}$ konvergiert.

19. Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $\gamma : x \rightsquigarrow y$ eine Geodäte von x nach y, $x,y \in X$. Wir definieren

$$\gamma' : [0,1] \to X \text{ wie folgt}$$
$$t \mapsto t\cdot d(x,y) \mapsto \gamma(t\cdot d(x,y))$$

Der stetige Weg γ' heißt <u>linear umparametrisierte Geodäte</u>.

20. Korollar

Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(c_n : [0,1] \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von linear umparametrisierten Geodäten. Dann existiert eine linear umparametrisierte Geodäte $c : [0,1] \to X$ und eine Teilfolge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, s.d. $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen c konvergiert.

<u>Beweis:</u> $\boxed{\text{ÜA}}$

21. Satz

Sei X ein eindeutig geodätischer Raum, in dem alle abg. Bälle kompakt sind. Dann hängen die Geodäten in X von ihren Endpunkten ab.

<u>Beweis:</u>

Seien $x,y \in X$ bel. Seien weiter $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

Seien weiter $(c_n : [0,1] \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ linear umparam. Geodäten von x_n nach y_n. Sei weiter $c: [0,1] \to X$ die linear umparametrisierte Geodäte von x nach y.

Wir müssen zeigen: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen c.

Wir zeigen zuerst: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen c.

Wähle $R>0$ s.d. gilt: $\text{Bild}(c_n) \subseteq \underbrace{\overline{B_R(x)}}_{\text{kompakt nach Vor.}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

A: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht punktweise gegen c.

Dann ex. $\varepsilon>0$ und $t_0 \in (0,1)$ und eine Teilfolge $(c_{n_k})_k$ s.d. gilt:

$$d(c_{n_k}(t_0), c(t_0)) \geq \varepsilon \quad \forall k\in\mathbb{N} \qquad (*)$$

Nach Korollar 20 ex. eine Teilfolge von $c_{n_k} : [0,1] \to \overline{B_R(x)}$ mit $(c_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine linear ump. Geodäte $c' : [0,1] \to X$. Es gilt:

$$\lim_i c_{n_{k_i}}(0) = x = c'(0)$$

$$\lim_i c_{n_{k_i}}(1) = y = c'(1).$$

Weiter gilt:

$$\lim_i d(c_{n_{k_i}}(t_0), c(t_0)) \geq \varepsilon \quad \forall i\in\mathbb{N} \qquad (\text{nach } (*))$$

d stetig $\|$

$$d(c'(t_0), c(t_0)) \geq \varepsilon \quad ⚡$$ zur Eindeutigkeit der Geodäten.