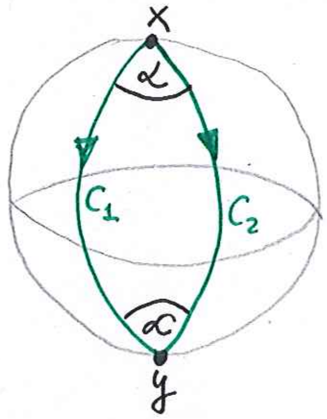
$\boxed{\text{ÜA}}$: Wenn $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen c konvergiert, dann konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen c. (dies gilt in kl. metr. Räumen) □

2.2. Bemerkung

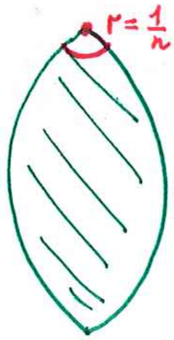
Konstruktionsskizze von einem vollst. eindeutig geodätischen Raum in dem die Geodäten <u>nicht</u> von ihren Endpunkten abhängen.

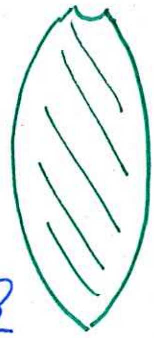
- Betrachte $\mathbb{S}^2$



$\alpha = \frac{\pi}{4}$

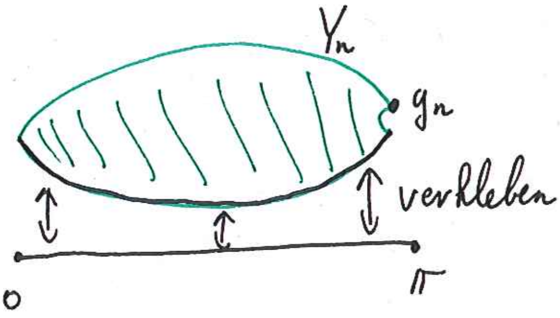
- Definiere für $n \geq 3$ Y_n wie folgt: c_1, c_2 zwei Geodäten von x nach y mit Winkel $\frac{\pi}{4}$ und $\ell(c_1) = \ell(c_2) = \pi$

- 

$\rightsquigarrow$ $Y_n :=$ 

mit der Längenmetrik

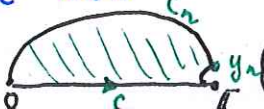
- $[0,\pi]$



- Für $n \geq 3$ verklebe Y_n mit $[0,\pi]$ $\rightsquigarrow$ $X := \left(\dot{\bigcup}_{n\geq 3} Y_n\right) \cup [0,\pi] /_\sim$

- $(X, d = \text{Längenmetrik})$ ist der gesuchte Raum.

- Betrachte Geodäten $c_n : 0 \rightsquigarrow y_n$. Diese konvergieren nicht punktweise gegen die Geodäte $c : 0 \rightsquigarrow \pi$



§2.2 Längenmetrik auf Überlagerungsräumen

2.3. Definition

Sei X ein Längenraum, $\tilde{X}$ ein topologischer Raum und $p: \tilde{X} \to X$ ein lokaler Homöomorphismus, d.h. für jeden Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ existiert eine offene Umgebung $\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}} \subseteq \tilde{X}$ von $\tilde{x}$, s.d. $\mathcal{U} := p(\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}) \subseteq X$ eine offene Menge ist und

$$p|_{\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}} : \tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}} \to \mathcal{U} \text{ ein Homöomorphismus ist.}$$

Sei $c: [a,b] \to \tilde{X}$ ein Weg. Wir definieren

$$\ell(c) := \ell(p \circ c)$$

Für $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ setze

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \inf \{ \ell(c) \mid c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } \tilde{x} \text{ nach } \tilde{y} \}$$

$\tilde{d}$ heißt, die von p induzierte Pseudometrik auf $\tilde{X}$.

2.4. Satz

Sei X ein Längenraum, $\tilde{X}$ ein Hausdorff-Raum. Sei weiter $p: \tilde{X} \to X$ ein lokaler Homöomorphismus und $\tilde{d}$ die von p induzierte (Pseudo)metrik auf $\tilde{X}$. Dann gilt:

(i) $\tilde{d}$ ist eine Metrik auf $\tilde{X}$.

(ii) p ist eine lokale Isometrie, d.h. für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ex. $\varepsilon > 0$, s.d. $p: B_\varepsilon(\tilde{x}) \to B_\varepsilon(p(\tilde{x}))$ eine Isometrie ist.

(iii) $\tilde{d}$ ist eine Längenmetrik

(iv) Die Eigenschaften (ii) und (iii) legen die Metrik $\tilde{d}$ eindeutig fest.

Beweis:

zu (i):

Es ist nur zu zeigen, dass $\tilde{d}$ keine Pseudometrik ist. Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ bel.

Da $\tilde{X}$ ein Hausdorff-Raum ist, existieren offene Umgebungen $\tilde{U}_{\tilde{x}}, \tilde{U}_{\tilde{y}}$ von $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ in $\tilde{X}$ mit $\tilde{U}_{\tilde{x}} \cap \tilde{U}_{\tilde{y}} = \emptyset$.

Wir können $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ so klein wählen, dass

$p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} : \tilde{U}_{\tilde{x}} \to U$ ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge U von X ist.

Sei nun c ein bel. Weg von $\tilde{x}$ nach $\tilde{y}$.

Dann gilt: $\mathrm{Bild}(p \circ c) \nsubseteq U$. Denn: A: $\mathrm{Bild}(p \circ c) \subseteq U$, dann $\mathrm{Bild}(p^{-1}|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} \circ p \circ c) = \mathrm{Bild}(c) \subseteq \tilde{U}_{\tilde{x}}$ und damit $c(1) = \tilde{y} \in \tilde{U}_{\tilde{x}}$ $\lightning$.

Sei $r > 0$ so gewählt, dass $B_r(\overset{p(\tilde{x})}{\overset{\|}{x}}) \subseteq U$. Wir betrachten:

$$p : p|^{-1}_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} (B_r(x)) \to B_r(x)$$

Da $\mathrm{Bild}(p \circ c) \nsubseteq B_r(x)$, $\exists$ $t \in [0,1]$ mit $p \circ c(t) \notin B_r(x)$, dann $\exists$ $s \in [0,1]$ s.d. $p \circ c(s) \in \partial B_r(x)$

$$\Rightarrow \ell(c) \overset{\text{Def.}}{=} \ell(p \circ c) \geq d(p \circ c(s), p \circ c(0)) = r.$$

Da c ein bel. Weg von $\tilde{x}$ nach $\tilde{y}$ war, folgt: $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq r$.

zu (ii):

Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ beliebig. Da p ein lokaler Homöomorphismus ist, ex. eine offene Umgebung $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ von $\tilde{x}$ in $\tilde{X}$ und eine offene Umgebung $U \subseteq X$ s.d.

$p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} : \tilde{U}_{\tilde{x}} \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Sei $s: U \to \tilde{U}_{\tilde{x}}$ die Inverse von $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$.

Wähle $r > 0$ s.d. gilt: $B_{2r}(p(\tilde{x})) \subseteq U$.

<u>Beh.:</u> $s' := s|_{B_r(p(\tilde{x}))} : B_r(p(\tilde{x})) \to B_r(\tilde{x})$ ist eine Isometrie.

Wir zeigen zuerst, dass s' surjektiv ist.

Sei $y \in B_r(\tilde{x})$ bel.

<u>z.z:</u> $p(y) \in B_r(p(\tilde{x}))$

$$d(p(y), p(\tilde{x})) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Def. von } \tilde{d}}}{\leq} \tilde{d}(y, \tilde{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ y \in B_r(\tilde{x})}}{<} r \quad \Rightarrow p(y) \in B_r(p(\tilde{x})).$$

Weiter gilt: $s'(p(y)) = y$, da s die Inverse von $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$ ist.

<u>zu s' ist eine isom. Einbettung:</u>

Seien nun $a, b \in B_r(p(\tilde{x}))$ bel.. Wir müssen zeigen, dass gilt:

$$\tilde{d}(s'(a), s'(b)) = d(a, b)$$

Nach Def. von $\tilde{d}$ gilt: $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) \geq d(a, b)$.

<u>zu „$\leq$":</u>

Sei $\varepsilon \in (0, r)$ bel. Da X ein Längenraum ist, existiert ein Weg

$$c_\varepsilon : [0, \ell(c_\varepsilon)] \to B_{2r}(p(\tilde{x}))$$
$$0 \mapsto a$$
$$\ell(c_\varepsilon) \mapsto b$$

mit $\ell(c_\varepsilon) \leq d(a, b) + \varepsilon$

Wir betrachten den Weg:

$$
\begin{aligned}
s \circ c_\varepsilon : [0, l_\varepsilon] &\to B_{2r}(\tilde{x}) \\
0 &\longmapsto s'(a) \\
l(c_\varepsilon) &\longmapsto s'(b)
\end{aligned}
$$

$$\tilde{d}(s'(a), s'(b)) \leq l(c_\varepsilon) \leq d(a,b) + \varepsilon$$

$$\overset{\lim_{\varepsilon \to 0}}{\Longrightarrow} \tilde{d}(s'(a), s'(b)) \leq d(a,b)$$

Insgesamt erhalten wir: $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) = d(a,b)$.

<u>Zu (iii):</u>

Da p eine lokale Isometrie ist, ist die Länge von einem Weg in $(\tilde{X}, \tilde{d})$ dieselbe wie die Länge von dem Weg unter p.

<u>Zu (iv):</u>

Sei d' eine andere Längenmetrik auf $\tilde{X}$ s.d.

$$p : (\tilde{X}, d') \to (X, d) \text{ eine lokale Isometrie ist.}$$

Dann ist $id : (\tilde{X}, d') \to (\tilde{X}, \tilde{d})$ eine lokale Isometrie,

denn: Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ bel. Da p eine lokale Isometrie ist, ex.

$\varepsilon_1 > 0$ s.d. $p : (B_{\varepsilon_1}(\tilde{x}), d') \to B_{\varepsilon_1}(p(\tilde{x}))$ eine Isometrie ist und

es ex. $\varepsilon_2 > 0$ s.d. $p : (B_{\varepsilon_2}(\tilde{x}), \tilde{d}) \to B_{\varepsilon_2}(p(\tilde{x}))$ eine Isometrie ist.

Sei nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Dann $id_{B_\varepsilon(\tilde{x})} = \underbrace{p^{-1} \circ id \circ p\big|_{B_\varepsilon(p(\tilde{x}))}}_{\text{Isometrie}}$

$$
\begin{tikzcd}
(B_\varepsilon(\tilde{x}), d') \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\cong\, p"'] & (B_\varepsilon(\tilde{x}), \tilde{d}) \\
(B_\varepsilon(p(\tilde{x})), d) \arrow[r, "id", "\cong"'] & (B_\varepsilon(p(\tilde{x})), d) \arrow[u, "p^{-1}"', "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

Für einen bel. Weg $c:[a,b] \to \tilde{X}$ gilt somit:

$$\ell^{d'}(c) = \ell^{\tilde{d}}(c).$$

Da d' und $\tilde{d}$ beide Längenmetriken sind, stimmen sie überein. $\square$

25. Bemerkung

Jede Überlagerung $p: \tilde{X} \to X$ ist ein lokaler Homöomorphismus, und falls X hausdorffsch ist, dann ist $\tilde{X}$ ein Hausdorff-Raum.
Man kann also die Konstruktion aus Satz 24 insbesondere auf Überlagerungen anwenden.

Wie erkennen wir Überlagerungen?

26. Definition

Sei X ein metrischer Raum. X heißt <u>lokal eindeutig geodätisch</u>, wenn für alle $x \in X$ ex. $r>0$ s.d. für bel. $y,z \in B_r(x)$ eine eindeutige Geodäte $\gamma: y \rightsquigarrow z$ ex. und $\mathrm{Bild}(\gamma) \subseteq B_r(x)$.

27. Beispiel

Sei X ein lokaler CAT(0)-Raum. Dann ist X lokal eindeutig geodätisch.

28. Satz

Sei $p: \tilde{X} \to X$ eine Abbildung zwischen Längenräumen mit folgenden Eigenschaften:

(i) X ist wegzusammenhängend

(ii) p ist lokaler Homöomorphismus

(iii) Für jeden Weg $c:[a,b] \to \tilde{X}$ gilt:
$$\ell_{\tilde{X}}(c) \leq \ell_X(p \circ c)$$

(iv) X ist lokal eindeutig geodätisch

(v) Für $x \in X$ bel. hängen die Geodäten in einem eindeutig geod. Ball um x von ihren Endpunkten ab.

(vi) $\tilde{X}$ ist vollständig.

Dann ist $p: \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung.

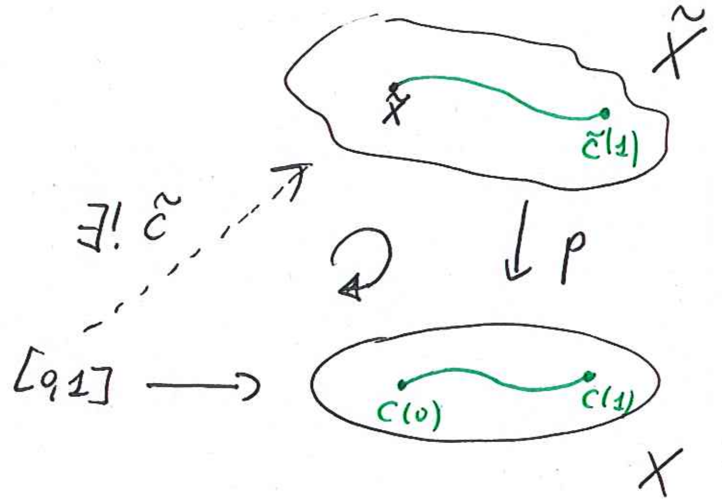
Beweis:

- Wir zeigen zuerst, dass wir rektifizierbare Wege $c:[0,1]\to X$ eindeutig liften können, d.h.:

Sei $c:[0,1]\to X$ ein rektifizierbarer Weg und $\tilde{x}\in\tilde{X}$ mit $p(\tilde{x})=c(0)$.

Dann ex. ein eindeutiger Weg $\tilde{c}:[0,1]\to\tilde{X}$ mit $p\circ\tilde{c}=c$.

$\tilde{c}$ heißt der Lift von c.



Eindeutigkeit: $\boxed{\text{ÜA}}$

Existenz: Sei $c:[0,1]\to X$ ein r. Weg und $\tilde{x}\in\tilde{X}$ mit $p(\tilde{x})=c(0)$.

Wir definieren $S:=\{t\in[0,1]\mid \exists \text{ Lift } \tilde{c} \text{ von } c|_{[0,t]}\}$.

Wir zeigen: $S\neq\emptyset$, S ist offen und abgeschlossen.

Dann folgt, weil $[0,1]$ zusammenhängend ist: $S=[0,1]$.

- $S\neq\emptyset$, da $0\in S$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{c}:\{0\}\to\tilde{X}$, $0\mapsto\tilde{x}$

- z.z: S ist offen

Sei $t\in S$ bel., d.h. $\exists\ \tilde{c}|_{[0,t]}$ Lift von $c|_{[0,t]}$.

Betrachte $\tilde{c}(t)\in\tilde{X}$. Da p ein lokaler Homöomorphismus ist, ex. $\tilde{U}_{\tilde{c}(t)}\subseteq\tilde{X}$ offen, s.d.

$$p:\tilde{U}_{\tilde{c}(t)}\to U\underset{\text{offen}}{\subseteq}X \text{ ein Homöomorphismus ist.}$$

Da $\mathcal{U}$ offen ist, ex $\varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t)) \subseteq \mathcal{U}$.

Sei $p^{-1}(B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t))) =: \tilde{\mathcal{U}}'_{\tilde{c}(t)}$. und

$$s : B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t)) \to \tilde{\mathcal{U}}'_{\tilde{c}(t)}.$$

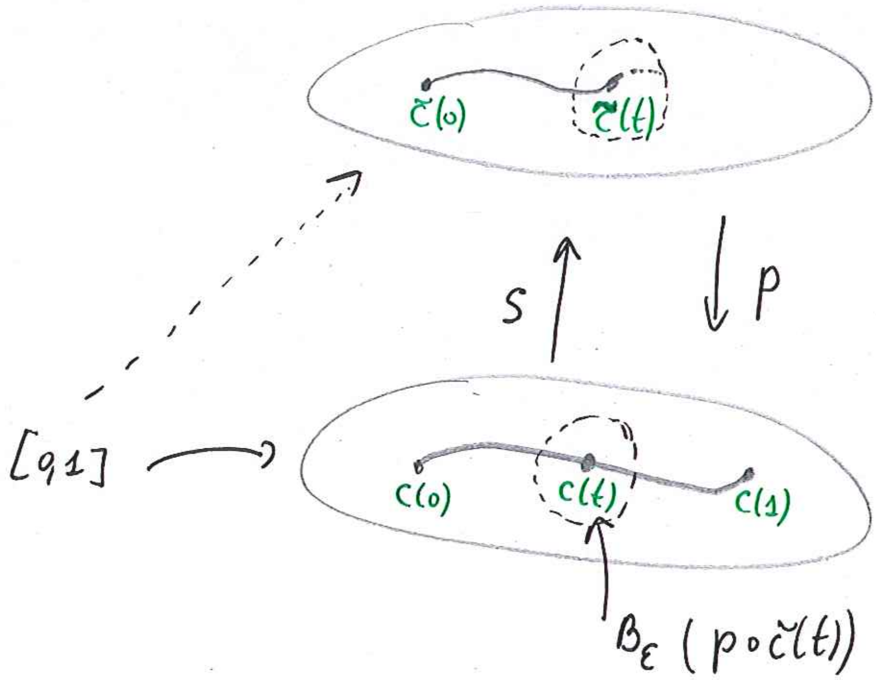
Wir definieren:

$$\tilde{c} : [0, t+\varepsilon) \to \tilde{X} \quad \text{wie folgt}$$

$$t' \longmapsto \tilde{c}(t') \quad \text{für } t' \in [0,t]$$
$$t' \longmapsto s \circ c(t') \quad \text{für } t' \in [t+\varepsilon)$$

$\tilde{c}$ ist stetig und ist ein Lift von $c|_{[0,t+\varepsilon)}$

$\Rightarrow [0, t+\varepsilon) \subseteq \mathcal{S}$ und damit ist $\mathcal{S}$ offen.



<u>z.z:</u> $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen

Wir nehmen an, dass $[0,a) \subseteq \mathcal{S}$. <u>z.z:</u> $a \in \mathcal{S}$.

Sei $t_n \in [0,a)$ eine bel. Folge mit $\lim_{n\to\infty} t_n = a$.

Seien $y_n := \tilde{c}(t_n) \in \tilde{X}$

Da $\tilde{X}$ ein Längenraum ist, gilt:

$$\tilde{d}(y_n, y_m) \leq \ell_{\tilde{X}}(\tilde{c}|_{[t_n,t_m]}) \overset{\text{nach (iii)}}{\leq} \ell_X(c|_{[t_n,t_m]}) \in \mathbb{R}$$

oBdA: $t_n \leq t_m$ — da c ein <u>rektf.</u> Weg ist.

Wir haben eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \ell_X(c|_{[0,t_n]}) = \ell_X(c|_{[0,a]}).$$

Damit erhalten wir:

$$\tilde{d}(y_n, y_m) \leq \ell_X(c|_{[t_n,t_m]}) = \ell_X(c|_{[0,t_m]}) - \ell_X(c|_{[0,t_n]})$$

$\overset{\lim_{n,m\to\infty}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{d}(y_n, y_m)$ ist eine Nullfolge

$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

Da $\tilde{X}$ vollständig ist, ex. $y \in \tilde{X}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Wir definieren $\tilde{c} : [0,a] \to \tilde{X}$ wie folgt

$$t \mapsto \tilde{c}(t) \text{ für } t \in [0,a)$$
$$a \mapsto y$$

$\tilde{c}$ ist stetig, denn:

Sei $t_n \in [0,a)$ eine bel. Folge, die gegen a konv. Dann erhalten wir:

$$\tilde{c}(a) = \tilde{c}(\lim_{n\to\infty} t_n)$$
$$\overset{\text{Def.}}{\|}$$
$$y$$
$$\|$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{c}(t_n)$$

und $\tilde{c}$ ist ein Lift von $c|_{[0,a]}$, denn:

$$p \circ \tilde{c}(a) = p(y) = p(\lim_{n\to\infty} y_n) \overset{p \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} p(y_n) = \lim_{n\to\infty} p \circ \tilde{c}(t_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} c(t_n) \overset{c \text{ stetig}}{=} c(\lim_{n} t_n) = c(a).$$

Damit haben wir gezeigt, dass S abgeschlossen ist.

- Nun können wir zeigen, dass p surjektiv ist.

  Sei $x \in X$ bel.

  Sei weiter $y \in \tilde{X}$ bel.

  Da X wegzusammenhängend ist, ex. ein (rekt.) Weg. c von $p(y)$ nach x.

  Sei $\tilde{c}$ der Lift von c, d.h. $p \circ \tilde{c} = c$, insbesondere

$$p \circ \tilde{c}(1) = c(1)$$
$$\Leftrightarrow p(\underbrace{\tilde{c}(1)}_{\text{ein Urbild von } x \text{ unter } p}) = x$$

- Jetzt müssen wir zeigen, dass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U hat, s.d. $p^{-1}(U)$ in eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen die homöomorph zu U sind zerfällt.

Sei also $x \in X$ bel. Nach (iv) + (v) ex. $r > 0$ mit $B_r(x)$ ist eindeutig geodätisch und die Geodäten in $B_r(x)$ hängen stetig von ihren Endpunkten ab.

Sei $y \in p^{-1}(x)$ beliebig.

Wir def.: $$s_y : B_r(x) \to \tilde{X}$$
$$x' \mapsto \tilde{c}_{x'}(1)$$ wobei $\tilde{c}_{x'}$ der Lift der linear ump. Geodäte $c_{x'} : [0,1] \to X$, $0 \mapsto x$, $1 \mapsto x'$ mit $\tilde{c}_{x'}(0) = y$.

<u>Beh:</u> $s_y : B_r(x) \to s_y(B_r(x))$ ist ein Homöomorphismus und $s_y(B_r(x))$ ist offen.

Argumentiere mit (V) und zeige, dass s_y eine Inverse ist zu p.

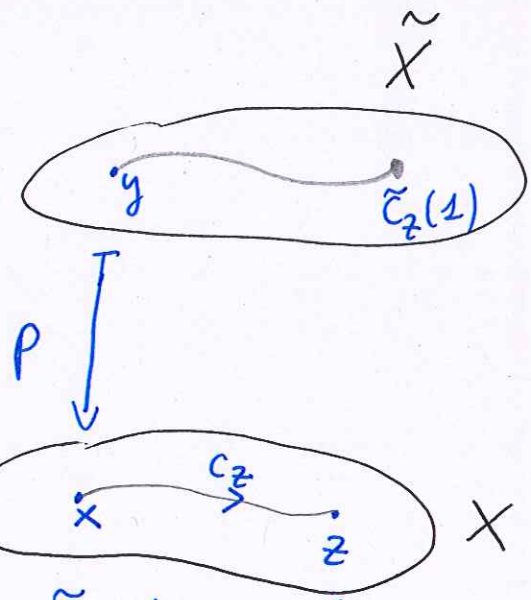
Insgesamt: $p^{-1}(B_r(x)) = \bigcup_{y \in p^{-1}(x)} \underbrace{s_y(B_r(x))}$

sind paarweise disjunkt, da Lifte eindeutig sind.

□

Zur Stetigkeit von $s_y : B_r(x) \to \tilde{X}$

$$z \mapsto \tilde{c}_z(1)$$



Stetigkeit in $z \in B_r(x)$ beliebig:

- Wir betrachten die l.u. eind. Geodäte

$c_z : [0,1] \to B_r(x)$ und den eind. Lift $\tilde{c}_z : [0,1] \to \tilde{X}$

$0 \longmapsto x$ $\qquad$ $0 \longmapsto y$

$1 \longmapsto z$ $\qquad$ $1 \longmapsto \tilde{c}_z(1)$.

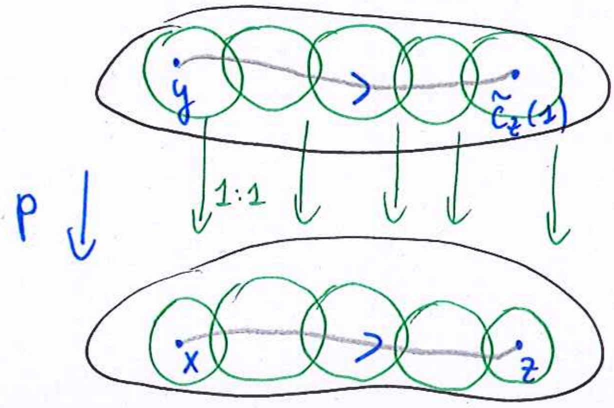
- Da $\tilde{c}_z$ stetig ist und $[0,1]$ kompakt, ist das Bild von $\tilde{c}_z$ kompakt.

Weiter ist p ein lok. Homöomorphismus. Folglich existieren endlich viele Bälle $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_k$ in $\tilde{X}$ mit:

$$\tilde{c}_z([0,1]) \subseteq \tilde{B}_1 \cup \dots \cup \tilde{B}_k \text{ und}$$

$$p|_{\tilde{B}_i} : \tilde{B}_i \to p(\tilde{B}_i) =: B_i \text{ ist ein Homöomorphismus auf die offene Menge } B_i.$$

- Da $p \circ \tilde{c}_z = c_z$, gilt: $c_z([0,1]) \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_k$.



- oBdA : $c_z\left(\left[\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right]\right) \subseteq B_\ell$ für $\ell \in \{1, \dots, k\}$.

- Sei s^ℓ die lokale Inverse von $p|_{\tilde{B}_\ell}$.

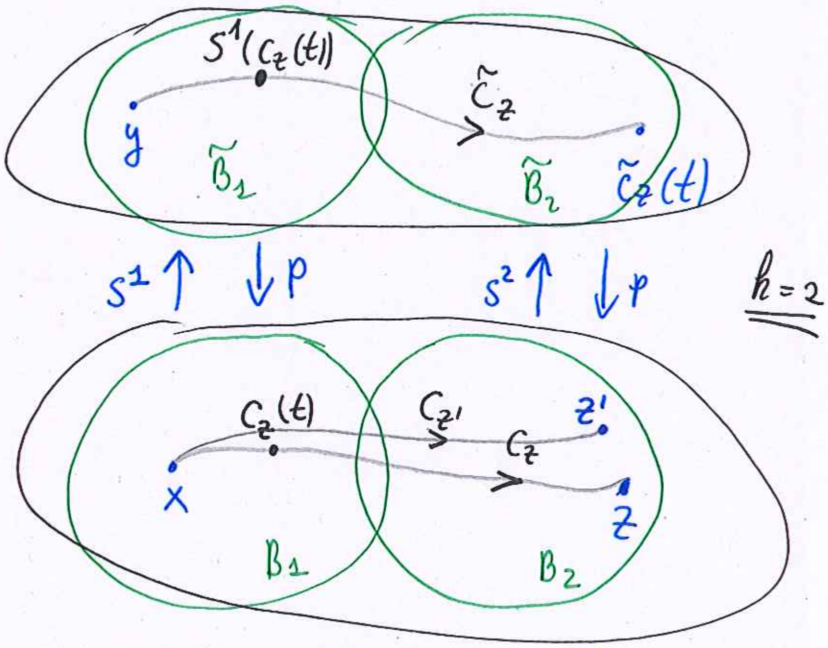
Es gilt also: $s^\ell : B_\ell \to \tilde{B}_\ell$ und $s^\ell \circ p|_{\tilde{B}_\ell} = id_{\tilde{B}_\ell}$

$$p|_{\tilde{B}_\ell} \circ s^\ell = id_{B_\ell}$$

Wir erhalten:

$$s^\ell(c_z(t)) = s_y(c_z(t))$$

für $t \in \left[\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right]$



- Da die Geodäten in $B_r(x)$ stetig von ihren Endpunkten abhängen $\exists\, \delta > 0$ s.d. für alle $z' \in B_\delta(z) \subseteq B_r(x)$ gilt:

$$c_{z'}\left(\left[\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right]\right) \subseteq B_\ell \quad \text{für } \ell \in \{1, \dots, k\}$$

- Wir definieren: $\tilde{s} : B_\delta(z) \times [0,1] \to \tilde{X}$

$$(z', t) \longmapsto s^\ell(c_{z'}(t))$$

für $t \in \left[\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right]$

- $\tilde{s}$ ist wohldefiniert und stetig und es gilt: $s_y|_{B_\delta(z)} = \tilde{s}|_{B_\delta(z) \times \{1\}}$

Folglich ist s_y stetig in z.

§2.3. Exponentialabbildung

Sei X ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ bel.. Wir werden nun einen Raum $\tilde{X}_{x_0}$ und eine Abbildung $\exp: \tilde{X}_{x_0} \to X$ konstruieren, die für "schöne" Basisräume die universelle Überlagerung werden wird.

29. Definition

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ beliebig. Wir definieren die Menge

$$\tilde{X}_{x_0} := \{ c : [0,1] \to X \text{ linear umparametrisierte lokale Geodäte mit } c(0) = x_0 \}$$
$$\cup \{ c_{x_0} : [0,1] \to X \mid c_{x_0}(t) = x_0 \text{ für alle } t \in [0,1] \}.$$

Weiter definieren wir auf der Menge $\tilde{X}_{x_0}$ eine Metrik durch: Seien $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$ bel.

$$d(c_1, c_2) := \sup \{ d_X(c_1(t), c_2(t)) \mid t \in [0,1] \}$$

und wir definieren eine Abbildung

$$\exp: \tilde{X}_{x_0} \to X \text{ durch}$$
$$c \mapsto c(1).$$

30. Bemerkung

Die Abbildung $\exp: (\tilde{X}_{x_0}, d) \to (X, d_X)$ ist 1-Lipschitz.

Genauer: Seien $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$ bel. Dann haben wir:

$$d_X(\exp(c_1), \exp(c_2)) \overset{\text{Def.}}{=} d_X(c_1(1), c_2(1))$$
$$\leq \sup_{t \in [0,1]} d_X(c_1(t), c_2(t))$$
$$\overset{\text{Def.}}{=} d(c_1, c_2).$$

31. Satz

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist, d.h. für jedes $x \in X$ existiert $r > 0$ s.d. $B_r(x)$ CAT(0) ist und $\overline{B_r(x)}$ vollständig ist.

Dann gilt:

(i) $\tilde{X}_{x_0}$ ist zusammenziehbar

(ii) $\exp : \tilde{X}_{x_0} \to X$ ist eine lokale Isometrie.

(iii) Wenn X vollständig ist, dann ist $\tilde{X}_{x_0}$ vollständig.

Beweis:

Wir zeigen zuerst nur (i). Für (ii)+(iii) brauchen wir ein technisches Lemma.

Beh.: Die Abbildung
$$H : \tilde{X}_{x_0} \times [0,1] \to \tilde{X}_{x_0}$$
$$(c, s) \longmapsto c_s : t \mapsto c(s \cdot t)$$
ist eine Homotopie von $f : \tilde{X}_{x_0} \to \tilde{X}_{x_0}$, $c \mapsto c_{x_0}$ und $id : \tilde{X}_{c_0} \to \tilde{X}_{c_0}$, $c \mapsto c$

• H ist wohldefiniert ✓

Wir haben:
$$H(c,0) = [c_0 : t \mapsto c(0 \cdot t) = c(0) = x_0] = f(c)$$
$$H(c,1) = [c_1 : t \mapsto c(1 \cdot t) = c(t)] = c = id(c)$$
für $c \in \tilde{X}_{x_0}$ bel.

• Zur Stetigkeit:

Wir zeigen Folgenstetigkeit:

Sei $(c_n, s_n) \in \check{X}_{x_0} \times [0,1]$ für $n \in \mathbb{N}$ eine konvergente Folge

mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$

<u>z.z:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} H(c_n, s_n) = H(c,s)$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n_{s_n}} = c_s$

Es gilt:

$$d(c_{n_{s_n}}, c_s) \overset{\text{Def.}}{=} \sup_{t\in[0,1]} d_X(c_n(s_n \cdot t), c(st))$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sup_{t\in[0,1]} d_X(c_n(s_n\cdot t), c(s_n\cdot t)) + \sup_{t\in[0,1]} d_X(c(s_n\cdot t), c(st))$$

$$\overset{\text{Def.}}{\leq} d(c_n, c) + \sup_{t\in[0,1]} d_X(c(s_n\cdot t), c(st))$$

$\exists\, l \geq 0$

$$\leq d(c_n, c) + \sup_{t\in[0,1]} l \cdot |s_n t - st|$$

c ist eine linear unp. lokale Geodäte und [0,1] ist kompakt

$$\leq d(c_n, c) + l \cdot |s_n - s| \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} 0$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Folge $(c_{n_{s_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c_s konvergiert.

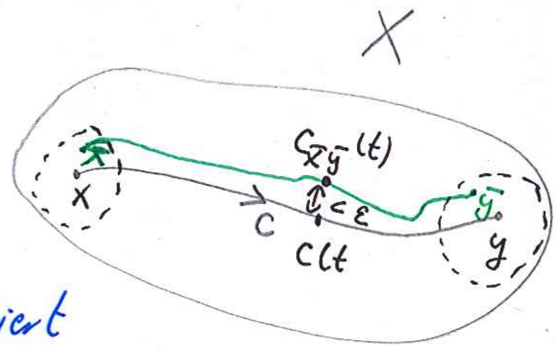
86 □

Der Beweis der anderen Punkte ist wesentlich aufwändiger. Wir müssen zuerst verstehen, wie eine Umgebung einer gegebenen linear umparametrisierten Geodäte aussieht, und welche Beziehung es zwischen den Geodäten in solch einer Umgebung und ihren Endpunkten gibt.

32. Technisches Lemma

Sei (X,d_X) ein metrischer Raum, der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist und $c:[0,1]\to X$ eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von x nach y, $x,y\in X$.

Dann existiert $\varepsilon>0$, so dass für alle $\bar{x}\in B_\varepsilon(x)$ und $\bar{y}\in B_\varepsilon(y)$ eine eindeutige linear umparametr. lokale Geodäte $c_{\bar{x}\bar{y}}:[0,1]\to X$ existiert mit



$$c_{\bar{x}\bar{y}}(0)=\bar{x}$$
$$c_{\bar{x}\bar{y}}(1)=\bar{y}$$

und $\sup\limits_{t\in[0,1]} d_X(c_{\bar{x}\bar{y}}(t), c(t))<\varepsilon$. $\cancel{\forall t\in[0,1]}$.

Weiter gilt, dass für je zwei linear ump. Geodäten $c_1, c_2:[0,1]\to X$ mit

$$\sup_{t\in[0,1]} d_X(c_1(t), c(t))<\varepsilon \quad \text{und} \quad \sup_{t\in[0,1]} d_X(c_2(t), c(t))<\varepsilon \quad \cancel{\forall t\in[0,1]}$$

die Funktion $\begin{aligned}\Phi:[0,1]&\to\mathbb{R}_{\geq 0}\\ t&\mapsto d_X(c_1(t),c_2(t))\end{aligned}$ konvex ist.

(d.h. $\forall\, s,t\in[0,1]\ \forall\, \lambda\in[0,1]: \Phi(\lambda s+(1-\lambda)t)\leq \lambda\Phi(s)+(1-\lambda)\Phi(t)$)

Also insbesondere: $\Phi(t)\leq t\cdot\Phi(1)$ für alle $t\in[0,1]$

– Beweis später –

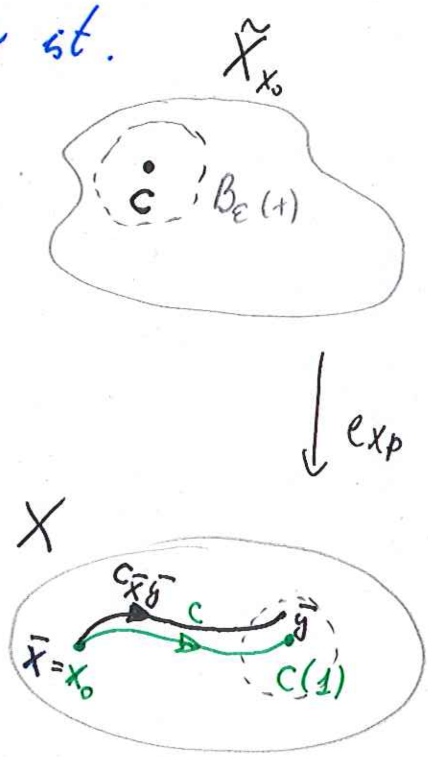
Weiter im Beweis von Satz 31:

Zu (ii):

Sei $c \in \tilde{X}_{x_0}$ bel. und $\varepsilon > 0$ so wie in Lemma 32.

Beh: $\exp : B_\varepsilon(c) \to B_\varepsilon(c(1))$ ist eine Isometrie.

Wir zeigen zuerst, dass $\exp|_{B_\varepsilon(c)}$ surjektiv ist.



Sei $\bar{y} \in B_\varepsilon(c(1))$ bel.

Nach Lemma 32 existiert eine linear unip. lokale Geodäte

$$c_{x_0 \bar{y}} : [0,1] \to X$$
$$0 \mapsto x_0$$
$$1 \mapsto \bar{y}$$

und $\sup\limits_{t \in [0,1]} d_X(c_{x_0\bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon$

$$\overset{\text{Def.}}{=} d(c_{x_0\bar{y}}, c)$$

$\Rightarrow c_{x_0\bar{y}} \in B_\varepsilon(c)$

Und es gilt: $\exp(c_{x_0\bar{y}}) = c_{x_0\bar{y}}(1) = \bar{y}$.
Folglich ist $\exp|_{B_\varepsilon(c)}$ surjektiv.

Zur isom. Einbettung:

Seien nun $c_1, c_2 \in B_\varepsilon(c)$ bel. Aus Lemma 32 wissen wir, dass für alle $t \in [0,1]$ gilt: $\Phi(t) \leq t \cdot \Phi(1)$

$$(*) \begin{cases} \overset{\text{Def.}}{=} \; d_X(c_1(t), c_2(t)) \leq t \cdot d_X(c_1(1), c_2(t)) \;\overset{\text{Def.}}{=} \\ \leq d_X(c_1(1), c_2(t)). \end{cases}$$

Wir erhalten:

$$d_X(\exp(c_1), \exp(c_2)) \overset{\text{Def.}}{=} d_X(c_1(1), c_2(1)) \overset{(*)}{=} \sup_{t \in [0,1]} d_X(c_1(t), c_2(t)) \overset{\text{Def.}}{=} d(c_1, c_2)$$

$\Rightarrow \exp|_{B_\varepsilon(c)}$ ist eine Isometrie.

Zu (iii):

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\tilde{X}_{x_0}$.

Dann ist für jedes $t \in [0,1]$, $(c_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X und da X vollständig ist, konvergiert diese:

$$\lim_{n\to\infty} c_n(t) =: c(t)$$

Wir definieren

$$c : [0,1] \to X$$
$$t \mapsto \lim_{n\to\infty} c_n(t)$$

Es gilt: $c(0) = x_0$.

Wir müssen zeigen, dass $c \in \tilde{X}_{x_0}$ d.h. c ist eine linear ump. lokale Geodäte.

Sei $t \in [0,1]$ bel. Wähle $r > 0$ s.d. $B_r(c(t))$ CAT(0) ist.

Da $c_n(t) \to c(t)$ konvergiert, ex. $N \in \mathbb{N}$ s.d. gilt:

$$c_n(t) \in B_{\frac{r}{2}}(c(t)) \quad \forall\, n \geq N.$$

~~Betrachte~~

Wir finden $\varepsilon > 0$ s.d. für $I := [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ und $n \geq N$ gilt:

$$c_n(I) \subseteq \underbrace{B_r(c(t))}_{CAT(0)} \quad \text{und} \quad c(I) \subseteq B_r(c(t))$$

Folglich sind $c_n|_I$ linear ump. Geodäten (ÜA 2.1).

Da die linear ump. Geodäten $c_n|_I$ stetig von ihren Endpunkten abhängen, konvergiert $c_n|_I$ gleichmäßig gegen die eindeutige lin. ump. Geodäte $\gamma : c(t-\varepsilon) \rightsquigarrow c(t+\varepsilon)$.

Es gilt aber auch $\gamma = c|_I$ und damit ist $c|_I$ eine l.u. Geodäte und damit haben wir gezeigt, dass c eine linear ump. lokale Geodäte ist.

Und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

$\square$

33. Satz

Sei (X, d_X) ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum. Dann ist $\exp : (\check{X}_{x_0}, d) \to (X, d_X)$ die universelle Überlagerung.

$$d(c_1, c_2) := \sup_{t \in [0,1]} d_X(c_1(t), c_2(t))$$

<u>Beweis:</u>

Wir zeigen zuerst, dass $\check{X}_{x_0}$ wegzusammenhängend ist.
Seien $c_1, c_2 \in \check{X}_{x_0}$ bel.

Wir betrachten:

$$H|_{\{c_1\}\times[0,1]} : [0,1] \to \check{X}_{x_0}$$
$$s \mapsto [c_{1_s} : t \mapsto c_1(st)]$$

Es gilt: $H|_{\{c_1\}\times[0,1]}(0) = c_{x_0}$ und

$$H|_{\{c_1\}\times[0,1]}(1) = c_1$$

Folglich ist $H|_{\{c_1\}\times[0,1]}$ ein Weg von c_{x_0} nach c_1.

Dann ist ~~$\overline{H|_{\{c_2\}\times[0,1]} * H|_{\{c_1\}\times[0,1]}}$ ein Weg von~~

$$\overline{H|_{\{c_1\}\times[0,1]}} * H|_{\{c_2\}\times[0,1]}$$ ein Weg von c_1 nach c_2.

der Inverse Weg

Weiter haben wir in Satz 31 bewiesen, dass $\check{X}_{x_0}$ zusammenziehbar ist. Insgesamt ist also $\check{X}_{x_0}$ einfach-zusammenhängend.

Wenn also exp eine Überlagerung ist, handelt es sich um die universelle Überlagerung.

- Wir ersetzen nun die Metriken auf X und $\tilde{X}_{x_0}$ durch die induzierten Längenmetriken.

  $\rightsquigarrow$ Da X lokal geodätisch ist, ändert sich die Topologie auf X nicht, und da exp eine lokale Isometrie ist, auch nicht auf $\tilde{X}_{x_0}$.

Also:

$\exp: (\tilde{X}_{x_0}, d) \to (X, d_X)$ ist eine Überlagerung

$\Leftrightarrow$

$\mathrm{Exp}: (\tilde{X}_{x_0}, \tilde{d}) \to (X, \tilde{d}_X)$ ist eine Überlagerung

die induzierten Längenmetriken

- Da die Metriken lokal nicht verändert werden, bleibt Exp eine lokale Isometrie

  $\overset{\text{Satz 24}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{d}$ ist die von Exp induzierte Längenmetrik.

  Wir schreiben für $\tilde{d} = d_{\exp}$.

Erinnerung: Satz 28

Sei $p: \tilde{X} \to X$ eine Abbildung zwischen Längenräumen mit folgenden Eigenschaften:

(i) X ist wegzusammenh.

(ii) p ist lok. Homöomorphismus

(iii) Für jeden Weg $c: [a,b] \to \tilde{X}$ gilt:
$$\ell_{\tilde{X}}(c) \leq \ell_X(p \circ c)$$

(iv) X ist lokal eind. geod.

(v) Für $x \in X$ bel. hängen die Geodäten in einem eindeut. geod. Ball um x von ihren Endpunkten ab.

(vi) $\tilde{X}$ ist vollständig

Dann ist $p: \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung

Hier:
$$\mathrm{Exp}: (\tilde{X}_{x_0}, \tilde{d}_{\exp}) \to (X, \tilde{d}_X)$$

(i) gilt, da X lokal wegzus. + zusammenhängend

(ii) gilt, da Exp lokale Isometrie

(iii) gilt, da $d_{\exp}$ die von exp induzierte Längenmetrik ist

(iv) gilt, da X lokal CAT(0) ist

(v) gilt, da X lokal CAT(0) ist (§2 Satz 18)

(vi) gilt, da X vollständig ist. (§2 Satz 31)

$\Rightarrow$ Exp ist eine Überlagerung. $\square$

34. Bemerkung

Da Exp eine lokale Isometrie ist, ist $(\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$ lokal CAT(0).

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass
$$(\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp}) \text{ \underline{global} CAT(0) ist.}$$

Beweisidee: Wir zeigen:

(1) Für je zwei Punkte $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$ existiert eine <u>eindeutige</u> linear umparametrisierte <u>lokale</u> Geodäte von c_1 nach c_2 und diese l. ump. Geodäten hängen stetig von ihren Endpunkten ab.

(2) Jede linear umparametrisierte lokale Geodäte in $\tilde{X}_{x_0}$ ist schon eine globale Geodäte

Folglich ist $(\tilde{X}_{x_0}, d_{exp})$ eindeutig geodätisch, lokal CAT(0) und die Geodäten hängen stetig von ihren Endpunkten ab.

$\Rightarrow$ $(\tilde{X}_{x_0}, d_{exp})$ ist global CAT(0).

$\uparrow$

Um das zu beweisen, brauchen wir eine Umformulierung der CAT(0) Eigenschaft:

$\rightsquigarrow$ Winkel in metrischen Räumen

Wiederholung

- Sei (X,d_X) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ beliebig. Wir definieren

$$\tilde{X}_{x_0} := \{ c:[0,1] \to X \text{ l.u. lokale Geodäten } \overset{c(0)=x_0}{} \}$$
$$\cup \{ c_{x_0}:[0,1] \to X \mid c_{x_0}(t) = x_0 \text{ für alle } t\in[0,1]\}$$

$$d: \tilde{X}_{x_0} \times \tilde{X}_{x_0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(c_1, c_2) \longmapsto \sup_{t\in[0,1]} d_X(c_1(t), c_2(t))$$

- Sei (X,d_X) ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum. Dann ist

$$Exp: (\tilde{X}_{x_0}, \tilde{d}) \to (X, \tilde{d}_X) \quad \text{die universelle Überlagerung}$$
$$c \longmapsto c(1)$$

die von d induzierte Längenmetrik.

Eindeutigkeit §2 Satz 24 $\quad \tilde{d} = d_{exp}$

die von exp induzierte Längenmetrik, d.h.

$$d_{exp}(c_1,c_2) = \inf\{ l(C) = l(Exp\circ C) \mid C \text{ ist ein rekt. Weg von } c_1 \text{ nach } c_2 \text{ in } \tilde{X}_{x_0}\}$$

die induzierte Längenmetrik

(da (X,d_X) lokal geodätisch ist, ändert sich die Metrik lokal nicht. Folglich $\mathcal{T}_{d_X} = \mathcal{T}_{\tilde{d}_X}$

(die von d_X induzierte Topologie)

- Da Exp eine lokale Isometrie ist, ist $\tilde{X}_{x_0}$ lokal geodätisch. Die Metrik ändert sich also lokal nicht. Folglich $\mathcal{T}_{d_{exp}} = \mathcal{T}_{\tilde{d}} = \mathcal{T}_d$

<u>Ziel:</u> z.z $(\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$ ist global CAT(0).

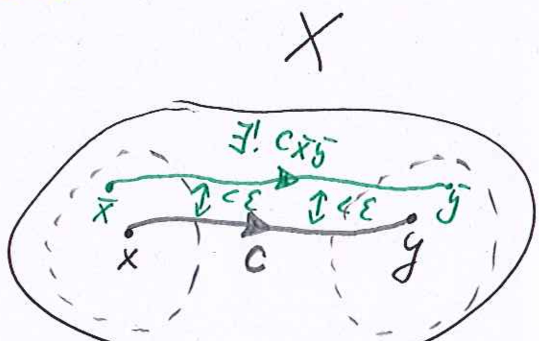
32. Technisches Lemma

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist und $c: [0,1] \to X$ eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von x nach y, $x, y \in X$.

Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\bar{x} \in B_\varepsilon(x)$ und $\bar{y} \in B_\varepsilon(y)$

eine eindeutige linear umparametrisierte lokale Geodäte $c_{\bar{x}\bar{y}}$ existiert mit

$$\begin{cases} c_{\bar{x}\bar{y}}(0) = \bar{x} \\ c_{\bar{x}\bar{y}}(1) = \bar{y} \\ \sup\limits_{t \in [0,1]} d_X(c_{\bar{x}\bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon \end{cases}$$



Weiter gilt, dass für je zwei l.u. Geodäten $c_1, c_2 : [0,1] \to X$ mit

$\sup\limits_{t \in [0,1]} d_X(c_i(t), c(t)) < \varepsilon$ für $i = 1,2$

die Funktion $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
$t \longmapsto d_X(c_1(t), c_2(t))$ konvex ist.

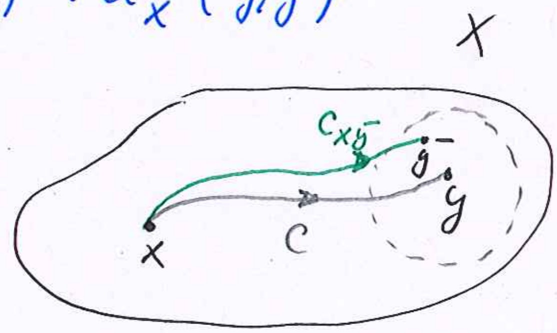
(Insbesondere gilt: $\Phi(t) \leq t \cdot \Phi(1)$).

35. Korollar

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist und $c: [0,1] \to X$ eine linear umparametrisierte Geodäte von x nach y, $x, y \in X$. Sei weiter $\varepsilon > 0$ so wie in Lemma 32.

Sei nun $\bar{y} \in B_\varepsilon(y)$ bel. und $c_{x\bar{y}}$ die eind. l. u. lokale Geodäte von x nach $\bar{y}$.

Dann gilt: $\ell(c_{x\bar{y}}) \leq \ell(c) + d_X(y, \bar{y})$



Beweis:

Wähle $t > 0$, s.d.

$c|_{[0,t]}$ und $c_{x\bar{y}}|_{[0,t]}$ linear umparametrisierte Geodäten sind.

- Es gilt:

$$t \cdot \ell(c_{x\bar{y}}) = d_X(c_{x\bar{y}}(0), c_{x\bar{y}}(t)) \quad (*)$$
$$t \cdot \ell(c) = d_X(c(0), c(t)) \quad (**)$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} t \cdot \ell(c_{x\bar{y}}) &\overset{(*)}{=} d_X(c_{x\bar{y}}(0), c_{x\bar{y}}(t)) \\ &= d_X(c(0), c_{x\bar{y}}(t)) \\ &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d_X(c(0), c(t)) + d_X(c(t), c_{x\bar{y}}(t)) \\ &\overset{(**)}{=} t \cdot \ell(c) + d_X(c(t), c_{x\bar{y}}(t)) \\ &\leq t \cdot \ell(c) + t \cdot d_X(y, \bar{y}) \end{aligned}$$

$c_{x\bar{y}}(0) = c(0)$

Φ aus Lemma 32 ist konvex

$\square$

36. Bemerkung (Topology, J. Munkres §12)

Seien E, B, Y lokal wegzusammenhängende und wegzusammenhängende top. Räume.

(i) Sei $p: E \to B$ eine universelle Überlagerung.

Sei $r: Y \to B$ eine weitere Überlagerung.

Sei weiter $b_0 \in B$ bel. und $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = b_0$ und

$y_0 \in Y$ mit $r(y_0) = b_0$

Dann existiert eine Überlagerung $q: E \to Y$ s.d. gilt:

$$r \circ q = p \quad \text{und} \quad q(e_0) = y_0.$$

(ii) (Eindeutigkeit der univ. Überlagerung)

Seien $p: E \to B$, $r: Y \to B$ zwei univ. Überlagerungen

und e_0, y_0, b_0 wie in (i).

Dann existiert ein Homöomorphismus $q: E \to Y$ s.d. gilt:

$$r \circ q = p \quad \text{und} \quad q(e_0) = y_0.$$

37. Bemerkung

Sei (X, d_X) ein vollst. zus. lokaler CAT(0)-Raum. Sei $x_0 \in X$ bel. Sei weiter $p \in (\tilde{X}_{x_0}, d_{exp})$ bel.

Wir haben in Satz 33 bewiesen, dass

$(\tilde{X}_{x_0}, d_{exp})$, $(\tilde{X}_{p(1)}, d_{exp})$ universelle Überlagerungen sind.

Es existiert also ein Homöomorphismus $\alpha: \tilde{X}_{x_0} \to \tilde{X}_{p(1)}$ s.d. gilt: $Exp_{x_1} \circ \alpha = Exp_{x_0}$ und $\alpha(p) = c_{p(1)}$ $\left(\begin{array}{c}\text{für} \\ b_0 = p(1)\end{array}\right)$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_{x_0} & \overset{\alpha}{\to} & \tilde{X}_{p(1)} \\ {\scriptstyle Exp_{x_0}} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle Exp_{x_1}} \\ & X & \end{array}$$

Weiter ist α eine lok. Isometrie, da Exp_{x_0}, Exp_{x_1} lok. Isometrien sind.

38. Lemma

Sei (X, d_X) ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum. Sei weiter $x_0 \in X$ bel.

Seien nun $p, q \in (\tilde{X}_{x_0}, d_{exp})$ bel. Dann existiert genau eine linear umparametrisierte lokale Geodäte zwischen p und q.

Beweis:

1. Fall: $p = c_{x_0} : [0,1] \to X$
$$t \mapsto x_0.$$

Existenz: Wir definieren:

$$C_{pq} : [0,1] \to \tilde{X}_{x_0} \quad \text{wie folgt}$$
$$s \mapsto [q_s : t \mapsto q(st)]$$

- C_{pq} ist stetig, da $C_{pq} = H|_{\{q\} \times [0,1]}$, siehe §2 Satz 31.

- Es gilt: $C_{pq}(0) = c_{x_0}$ und $C_{pq}(1) = q$

- Weiter gilt: $\underbrace{Exp}_{\text{lokale Isometrie}} \circ C_{pq} = \underbrace{q}_{\text{l. u. lokale Geodäte}}$

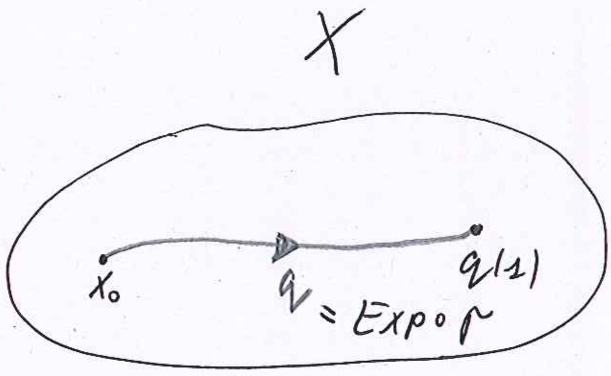
Folglich ist C_{pq} eine l. u. lokale Geodäte von c_{x_0} nach q.

Eindeutigkeit: Sei $\gamma : [0,1] \to \tilde{X}_{x_0}$ eine l. u. lokale Geodäte von c_{x_0} nach q.

Da Exp eine lokale Isometrie ist, ist $Exp \circ \gamma : [0,1] \to X$ eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von

$\mathrm{Exp} \circ \Gamma(0) = \mathrm{Exp}(c_{x_0}) = c_{x_0}(1) = \underline{\underline{x_0}}$ nach

$\mathrm{Exp} \circ \Gamma(1) = \mathrm{Exp}(q) = \underline{\underline{q(1)}}$.



Aber q ist auch eine l. u. lokale Geodäte von x_0 nach $q(1)$.

$$\overset{\text{Lemma 32}}{\underset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow}} \quad \mathrm{Exp} \circ \Gamma = q$$

Folglich: $\mathrm{Exp} \circ \Gamma(s) = q(s)$ für alle $s \in [0,1]$

$\Longleftrightarrow \quad \Gamma(s)(1) = q(s)$ für alle $s \in [0,1]$

Sei $s \in [0,1]$ beliebig.

Wir haben: $\Gamma(s) : [0,1] \to X$ ist eine l. u. lokale Geodäte von x_0 nach $q(s)$

und $q_s : [0,1] \to X$, $t \mapsto q(st)$ ist eine l. u. lokale Geodäte von x_0 nach $q(s)$

$$\overset{\text{Lemma 32}}{\underset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow}} \quad \Gamma(s) = q_s$$

Insgesamt erhalten wir: $\Gamma = c_{pq}$.

<u>Allgemeiner Fall:</u> $p, q \in \tilde{X}_{x_0}$ bel.

Wir betrachten die universelle Überlagerung

$$\mathrm{Exp}_{p(1)} : \tilde{X}_{p(1)} \to X.$$

Nach Bemerkung 37 existiert ein Homöomorphismus

$$\alpha : \tilde{X}_{x_0} \to \tilde{X}_{p(1)}$$

s.d. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{x_0} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "Exp_{x_0}"'] & \tilde{X}_{p(1)} \arrow[d, "Exp_{p(1)}"] \\ & X \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \alpha(p) = c_{p(1)} \quad (*)$$

und α ist eine lokale Isometrie.

- Wir haben in Fall 1 gesehen, dass es eine eindeutige l.u. lokale Geodäte

$$C_{c_{p(1)}\alpha(q)} : [0,1] \to \tilde{X}_{p(1)}$$
$$0 \longmapsto c_{p(1)}$$
$$1 \longmapsto \alpha(q) \quad \text{existiert.}$$

<u>Existenz:</u> <u>Beh:</u> $\alpha^{-1} \circ C_{c_{p(1)}\alpha(q)} : [0,1] \to \tilde{X}_{x_0}$ ist eine l.u. lokale Geodäte von p nach q

- $\alpha^{-1} \circ C_{c_{p(1)}\alpha(q)}$ ist eine l.u. lokale Geodäte, da α eine lokale Isometrie ist und $C_{c_{p(1)}\alpha(q)}$ eine l.u. lokale Geodäte ist.
- Weiter gilt:

$$\alpha^{-1} \circ C_{c_{p(1)}\alpha(q)}(0) = \alpha^{-1}(c_{p(1)}) = p \quad (*)$$
$$\alpha^{-1} \circ C_{c_{p(1)}\alpha(q)}(1) = \alpha^{-1}(\alpha(q)) = q$$

Eindeutigkeit:

Sei $\Gamma : [0,1] \to \tilde{X}_{x_0}$ eine weitere l.u. lokale Geodäte von p nach q.

Dann ist $\quad \mathcal{L} \circ \Gamma : [0,1] \to \tilde{X}_{p(1)}$ eine l.u. lokale Geodäte

von $\mathcal{L} \circ \Gamma(0) = \mathcal{L}(p) = c_{x_0}$ nach

$\mathcal{L} \circ \Gamma(1) = \mathcal{L}(q)$

Eindeutigkeit $\Rightarrow$ Fall 1 $\quad \mathcal{L} \circ \Gamma = C_{c_{p(1)} \mathcal{L}(q)}$

$\Rightarrow \Gamma = \mathcal{L}^{-1} \circ C_{c_{p(1)} \mathcal{L}(q)}$ $\square$

39. Lemma

Die l.u. lok. Geodäten in $\tilde{X}_{x_0}$ hängen stetig von ihren Endpunkten ab.

Beweis: üA

40. Lemma

Sei $C_{pq} : [0,1] \to (\tilde{X}_{x_0}, d_{exp})$ die eindeutige l.u. lokale Geodäte von p nach q, $p,q \in \tilde{X}_{x_0}$. Dann ist C_{pq} eine l.u. globale Geodäte.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass gilt:

$$\ell(C_{pq}) = d_{exp}(p,q) \qquad \text{(siehe §2 Proposition 6 (vi))}$$

Es gilt: $\ell(C_{pq}) \geq d_{exp}(p,q)$ (Aufgabe 4.2)

Es bleibt zu zeigen: $\ell(C_{pq}) \leq d_{exp}(p,q)$

$$d_{exp}(p,q) = \inf\{\ell(\Gamma) \mid \Gamma \text{ ist ein rekt. Weg von } p \text{ nach } q\}$$

Sei also γ ein bel. rekt. Weg von p nach q.

Wir müssen also zeigen, dass gilt:

$$\ell(c_{pq}) \leq \ell(\gamma).$$

Das zeigen wir mit dem Zusammenhangsargument:

Wir definieren:

$$S := \{ t_0 \in [0,1] \mid \forall t \leq t_0 \;\; \ell(c_{\gamma(0)\gamma(t)}) \leq \ell(\gamma|_{[0,t]}) \}$$

eind. l.u. lokale Geodäte von $\gamma(0)$ nach $\gamma(t)$

- $S \neq \emptyset$, da $0 \in S$
- z.z. S ist offen

Sei $t_0 \in S$ bel.

1. Fall: $t_0 = 0$

Da $\tilde{X}_{x_0}$ lokal CAT(0) ist, ex. $\varepsilon > 0$ s.d.

$$B_\varepsilon(\gamma(0)) = B_\varepsilon(p) \;\; \text{CAT(0) ist}$$

Dann ex. $\varepsilon' > 0$, s.d. $\operatorname{Bild}(c_{\gamma(0)\gamma(\varepsilon')}) \subseteq B_\varepsilon(\gamma(0))$

Da $B_\varepsilon(\gamma(0))$ ein CAT(0)-Raum ist, ist die l.u. lokale Geodäte $c_{\gamma(0)\gamma(\varepsilon')}$ eine l.u. globale Geodäte und es gilt:

$$\ell(c_{\gamma(0)\gamma(\varepsilon')}) = d_{\exp}(\gamma(0), \gamma(\varepsilon'))$$

$$\leq \ell(\gamma|_{[0,\varepsilon']})$$

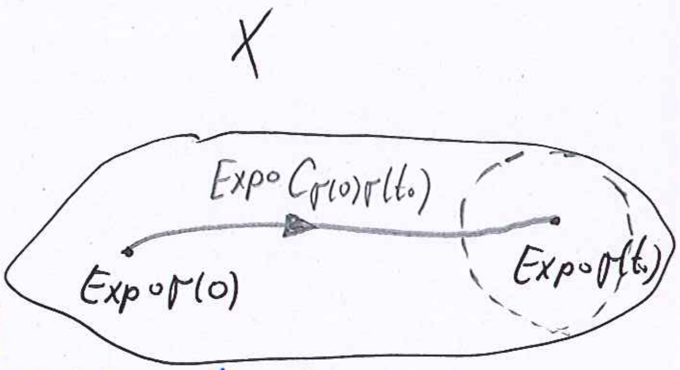
$\Rightarrow [0, \varepsilon') \subseteq S.$

<u>2. Fall</u>: $t_0 > 0$

Wähle $\varepsilon > 0$ so wie in Lemma 32 für die l. u. lokale Geodäte $Exp \circ c_{\gamma(0)\gamma(t_0)}$.

Weiter wähle $\varepsilon' > 0$ s.d.

$\forall\ t' \in (t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon')$ gilt:



$$Exp \circ \gamma(t') \in B_\varepsilon(Exp \circ \gamma(t_0))$$

und $Exp : B_{\varepsilon'}(\gamma(0)) \to B_{\varepsilon'}(Exp \circ \gamma(t_0))$ Isometrie ist.

Dann gilt für alle $t' \in (t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon')$:

$$\begin{aligned}
\ell(c_{\gamma(0)\gamma(t')}) &= \ell(Exp \circ c_{\gamma(0)\gamma(t')}) \\
&\overset{\text{Bem. 35}}{\leq} \ell(Exp \circ c_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) + d_X(Exp \circ \gamma(t_0), Exp \circ \gamma(t')) \\
&= \ell(c_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) + d_X(Exp \circ \gamma(t_0), Exp \circ \gamma(t')) \\
&\underset{\text{Exp Isometrie}}{\overset{t_0 \in S}{\leq}} \ell(\gamma|_{[0,t_0]}) + d_{exp}(\gamma(t_0), \gamma(t')) \\
&\leq \ell(\gamma|_{[0,t_0]}) + \ell(\gamma|_{[t_0,t']}) \\
&\overset{\text{Aufgabe 4.2}}{=} \ell(\gamma|_{[0,t']})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow [0, t_0 + \varepsilon') \subseteq S$.

Damit haben wir gezeigt, dass S offen ist.

z.z. S ist abgeschlossen

reicht z.z: $[0,t_0) \subseteq S \Rightarrow t_0 \in S$

Wir wissen, dass die Funktion

$$(*) \qquad \begin{aligned} l_\gamma : [0,1] &\to [0, \ell(\gamma)] \\ t &\mapsto \ell(\gamma|_{[0,t]}) \end{aligned}$$ stetig ist

(siehe §2 Prop. 6(v))

Sei $t_n \in S$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ bel.

Da die l.u. lok. Geodäten stetig von ihren Endpunkten abhängen (§2 Lemma 39), konvergiert

$C_{\gamma(0)\gamma(t_n)}$ gleichmäßig gegen $C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}$

§2 Proposition 6 (vii) $\Rightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N$ mit

$$(*)(*) \qquad \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) \le \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_n)}) + \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Wähle $\varepsilon > 0$ so wie in Lemma 32 für die l.u. lok. Geodäte $\operatorname{Exp} \circ C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\operatorname{Exp}\circ\gamma(t_n) \in B_\varepsilon(\operatorname{Exp}\circ\gamma(t_0)) \quad \forall n \geq N$$

Nach Bem. 35 gilt:

$$(*)(*)(*) \qquad \begin{aligned} \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_n)}) = \ell(\operatorname{Exp}\circ C_{\gamma(0)\gamma(t_n)}) &\le \ell(\operatorname{Exp}\circ C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) \\ &\quad + d_X(\operatorname{Exp}\circ\gamma(t_0), \operatorname{Exp}\circ\gamma(t_n)) \\ &= \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) + d_{\exp}(\gamma(t_0), \gamma(t_n)) \end{aligned}$$

OBdA Exp Isometrie auf $B_\varepsilon(\gamma(0))$

Nun können wir zeigen, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_n)}) = \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}).$$

Sei $\varepsilon' > 0$ bel. Dann ex. $N_1 \in \mathbb{N}$ s.d. gilt:

$$\ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) - \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_n)}) < \varepsilon' \quad \forall n \geq N_1$$

(siehe ⊛⊛)

Weiter ex. $N_2 \in \mathbb{N}$ s.d. gilt:

$$\ell(C_{\gamma(0),\gamma(t_n)}) - \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) < \varepsilon' \quad \forall n \geq N_2$$

(siehe ⊛⊛⊛)

Folglich: $|\ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) - \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_n)})| < \varepsilon'$

$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$.

Isgesamt erhalten wir:

$$\ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_n)}) \overset{t_n \in S}{\leq} \ell(\gamma|_{[0,t_n]})$$

$$\overset{\lim_{n\to\infty}}{\Longrightarrow} \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}) \leq \ell(\gamma|_{[0,t_0]})$$

$\Rightarrow t_0 \in S.$

Wir haben gezeigt: $S \neq \emptyset$, S ist offen + abgeschlossen

$\Rightarrow S = [0,1].$

$\Rightarrow \ell(C_{pq}) \leq \ell(\gamma)$ $\square$

§2.4 Winkel in metrischen Räumen

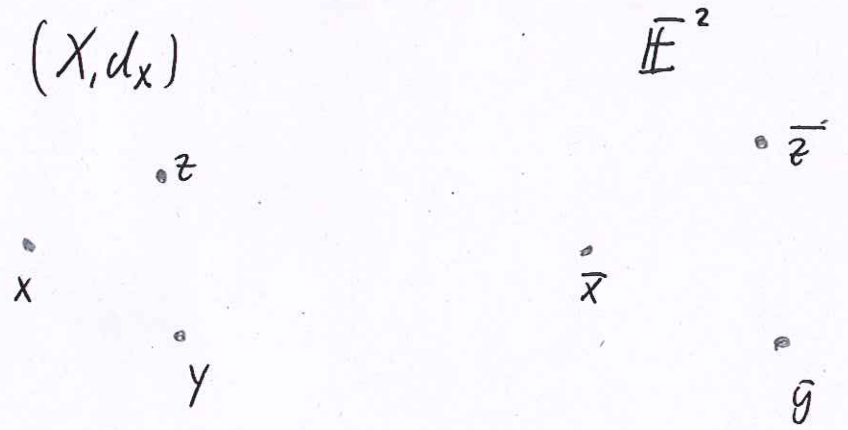
41. Definition

(i) Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Ein <u>Dreieck in X</u> ist gegeben durch ein 3-Tupel von Punkten aus X. Sei (x, y, z) ein Dreieck in X. Ein <u>Vergleichsdreieck</u> in $\mathbb{E}^2$ zu (x,y,z) ist ein Dreieck in $\mathbb{E}^2$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in (\mathbb{E}^2)^3$ s.d. gilt:

$$d_X(x,y) = d_2(\bar{x}, \bar{y})$$

$$d_X(y,z) = d_2(\bar{y}, \bar{z})$$

$$d_X(x,z) = d_2(\bar{x}, \bar{z})$$



Das Vergleichsdreieck $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in $\mathbb{E}^2$ ist eindeutig bis auf Isometrie und wir schreiben dafür $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
Weiter bezeichnen wir mit $\angle_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z}) \in [0, \pi]$ den Winkel in $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in $\bar{x}$.

(ii) Seien c_1, c_2 zwei Geodäten in (X, d_X) mit $c_1(0) = c_2(0) =: p$.
Wir definieren:

$$\angle(c_1, c_2) := \limsup_{t,t' \to 0} \angle_{\bar{p}}\left(\overline{c_1(t)}, \overline{c_2(t')}\right)$$

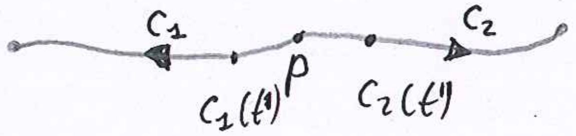
$$= \lim_{n \to \infty} \sup \left\{ \angle_{\bar{p}}\left(\overline{c_1(t)}, \overline{c_2(t')}\right) \,\middle|\, t, t' \in (0, \tfrac{1}{n}) \right\}$$

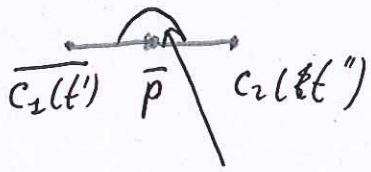
$\angle(c_1, c_2)$ heißt der <u>Winkel zwischen c_1 und c_2</u>.

42. Beispiel

Seien c_1, c_2 zwei Geodäten in X mit $c_1(0) = c_2(0) =: p$, sodass $\overline{c_1} * c_2$ eine Geodäte in X ist. Dann ist $\angle(c_1, c_2) = \pi$

(X, d_X) $\mathbb{E}^2$





$\angle_{\overline{p}}(c_1(t'), c_2(t''))$
$= \pi$.

43. Proposition

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und c_1, c_2, c_3 Geodäten in X mit $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0)$.

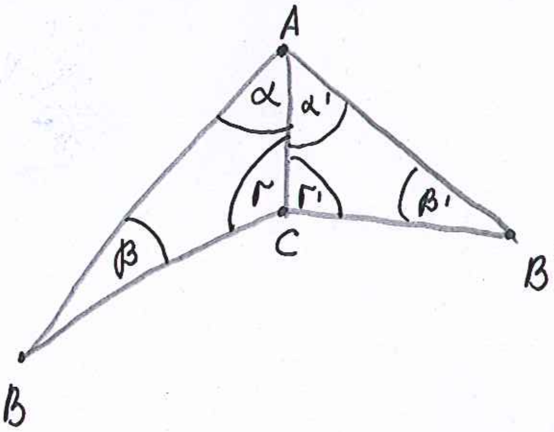
Dann gilt:

$$\angle(c_1, c_3) \leq \angle(c_1, c_2) + \angle(c_2, c_3)$$

Beweis: $\boxed{\text{ÜA}}$.

44. Alexandrovs Lemma

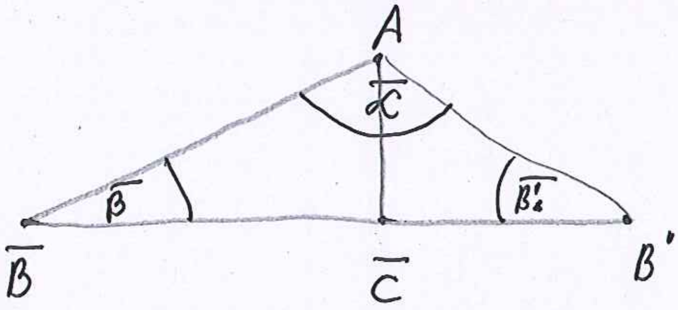
Wir betrachten zwei Dreiecke in $\mathbb{E}^2$ mit gemeinsamer Seite und $\gamma + \gamma' \geq \pi$.



Dann gilt:

(i) $d_2(B,A) + d_2(A,B') \geq d_2(B,C) + d_2(C,B')$

(ii) Bewege C ein wenig, so dass $\gamma + \gamma' = \pi$ und die Seitenlängen des Vierecks A, B, C, B' gleich bleiben. Wir erhalten:



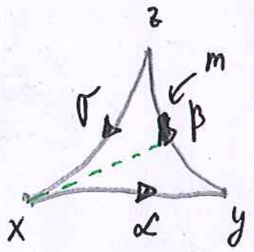
Dann gilt:

$$\bar{\alpha} \geq \alpha + \alpha'$$
$$\bar{\beta} \geq \beta$$
$$\bar{\beta}' \geq \beta'$$
$$d_2(A,\bar{C}) \geq d(A,C)$$

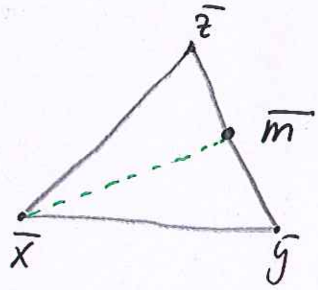
Beweis: Geometrie in $\mathbb{E}^2$.

45. Lemma

Sei X ein geod. Raum. Der Raum X ist genau dann CAT(0), wenn für alle geod. Dreiecke $\Delta(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ gilt:



$$d\Big(x, \overbrace{\beta\Big(\tfrac{d(z,y)}{2}\Big)}^{\overset{m}{\shortparallel}}\Big) \leq d_2\Big(\bar{x}, \underbrace{\bar{\beta}\Big(\tfrac{d_2(\bar{z},\bar{y})}{2}\Big)}_{\bar{m}}\Big)$$



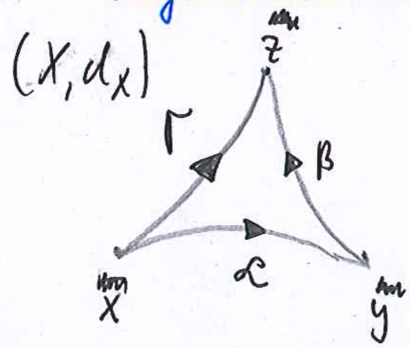
Beweis: ÜA.

45. Satz (Winkelbedingung für CAT(0) Räume)

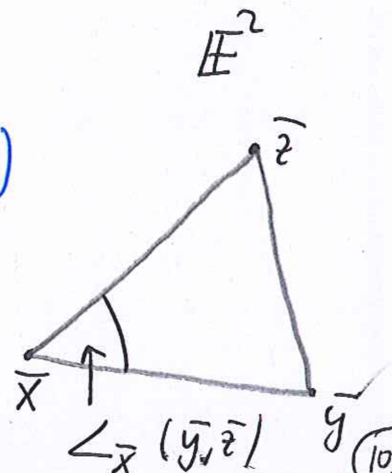
Sei (X,d_X) ein geodätischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist CAT(0)

(ii) Für jedes geod. Dreieck $\Delta(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ in X und Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ gilt:



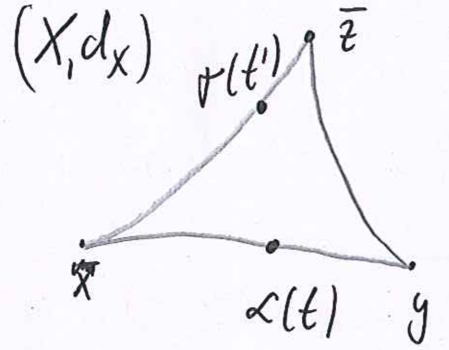
$$\angle(\alpha,\gamma) \leq \angle_{\bar{x}}(\bar{y},\bar{z})$$

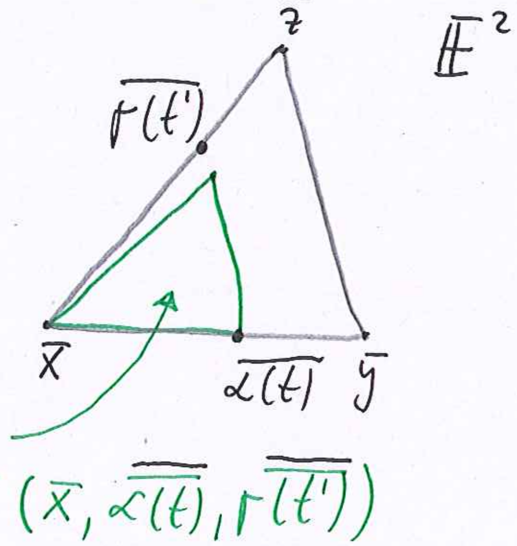


Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\Delta(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ ein bel. geod. Dreieck.
Da X CAT(0) ist, gilt für $t \in [0, d(x,z)]$
$t' \in [0, d(x,y)]$ bel.

$$d(\alpha(t), \gamma(t')) \leq d_2(\overline{\alpha(t)}, \overline{\gamma(t')})$$





Folglich: $\angle_{\bar{x}}(\overline{\alpha(t)}, \overline{\gamma(t')}) \leq \angle_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z})$

und damit:

$$\angle(\alpha, \gamma) := \limsup_{t,t' \to 0} \angle_{\bar{x}}(\overline{\alpha(t)}, \overline{\gamma(t')})$$

$$\leq \limsup_{t,t' \to 0} \angle_{\bar{x}}(\bar{z}, \bar{y})$$

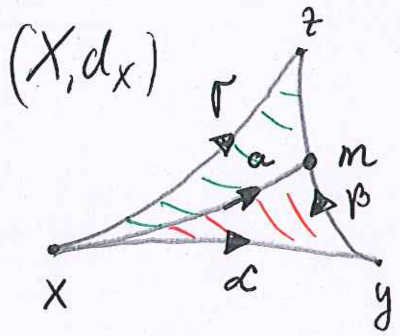
$$= \angle_{\bar{x}}(\bar{z}, \bar{y}).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\Delta(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ ein bel. geod. Dreieck in X.

Wir zeigen, dass gilt:

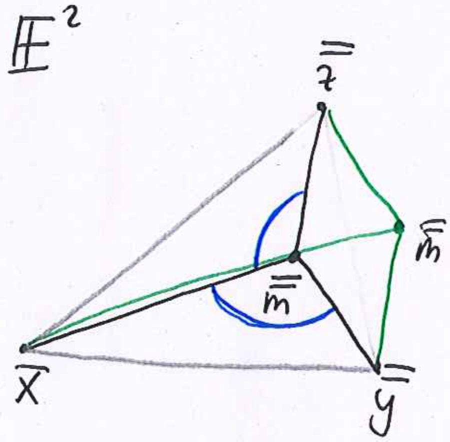
$$d\Big(x, \overbrace{\beta\Big(\tfrac{d(z,y)}{2}\Big)}^{=m}\Big) \leq d_2\Big(\bar{x}, \overbrace{\bar{\beta}\Big(\tfrac{d_2(\bar{z},\bar{y})}{2}\Big)}^{=\bar{m}}\Big)$$

Dann folgt mit Lemma 45, dass X CAT(0) ist.



Wähle eine Geodäte zwischen x und m.

Betrachte die Dreiecke $\triangle$ und $\triangle$



Wir haben zwei Möglichkeiten für die Lage von $\bar{\bar{m}}$. für die Vergleichsdreiecke $\bar{\triangle}(\bar{x}, \bar{\bar{m}}, \bar{\bar{z}}, \ldots)$ und

$\bar{\triangle}(\bar{x}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{m}}, \ldots)$

Für die Dreiecke $\triangle(x, m, z)$ und $\triangle(x, y, m)$ gilt (i). Wir haben also:

$$\angle(\beta|\_, \bar{a}) \leq \angle_{\bar{\bar{m}}}(\bar{x}, \bar{\bar{z}})$$

die inverse Geodäte

$$\angle(\bar{a}, \bar{\beta}|\_) \leq \angle_{\bar{\bar{m}}}(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$$

die inverse Geodäte

Wir erhalten:

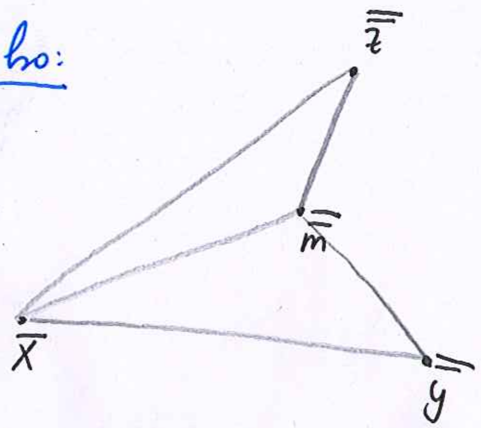
$$\ldots \angle_{\bar{\bar{m}}}(\bar{x}, \bar{\bar{z}}) + \angle_{\bar{\bar{m}}}(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$$

$$\geq \angle(\beta|_{-}, \bar{a}) + \angle(\bar{a}, \bar{\beta}|_{-})$$

$$\overset{\text{Prop. 43}}{\geq} \angle(\beta|_{-}, \bar{\beta}|_{-}) = \pi$$

↑ Beispiel 42.

<u>Also:</u>



Alexandrov's Lemma

$$\Longrightarrow d_2(\bar{x}, \bar{\bar{m}}) \leq d_2(\bar{x}, \bar{m})$$

$$d_2(\bar{x}, \bar{\bar{m}}) = d(x, m)$$

$\square$.

46. Satz:

Sei Y ein lokaler CAT(0)-Raum. Weiter sei Y eindeutig geodätisch und die Geodäten hängen stetig von ihren Eckpunkten ab. Dann ist Y ein CAT(0) Raum.

<u>Beweis:</u>

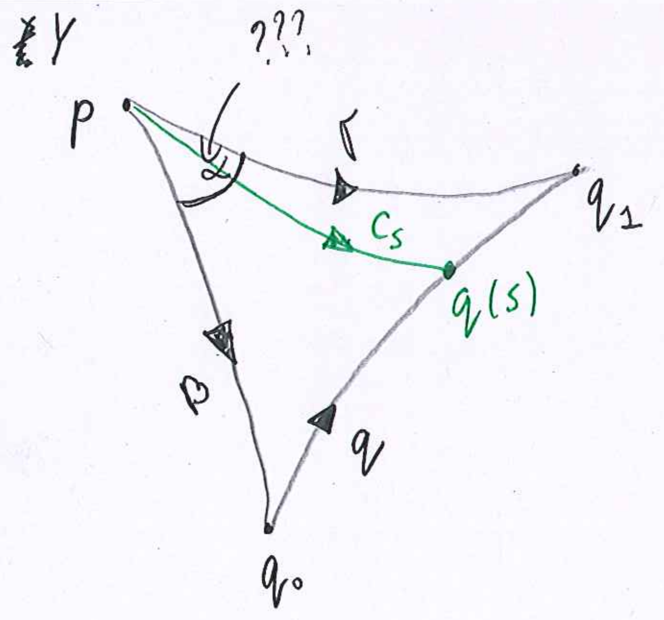
Wir zeigen die Winkelbedingung für CAT(0) Räume.

Seien $p, q_0, q_1 \in Y$ paarweise verschiedene Punkte und $\Delta(p, q_0, q_1)$ das geod. Dreieck.

Sei $q: [0,1] \to Y$ die l.u. Geodäte von q_0 nach q_1.

$\beta: [0,1] \to Y$ die l.u. Geodäte von p nach q_0

$\gamma: [0,1] \to Y$ die l.u. Geodäte von p nach q_1



$\underline{z.z:}$ $\angle(\beta,\gamma) =: \alpha \leq \angle_{\bar{p}}(\bar{q}_0, \bar{q}_1)$

Für $s \in [0,1]$ sei $c_s : [0,1] \to Y$ die l.u. Geodäte von p zu $q(s)$.

Wir definieren $c : [0,1] \times [0,1] \to Y$ wie folgt

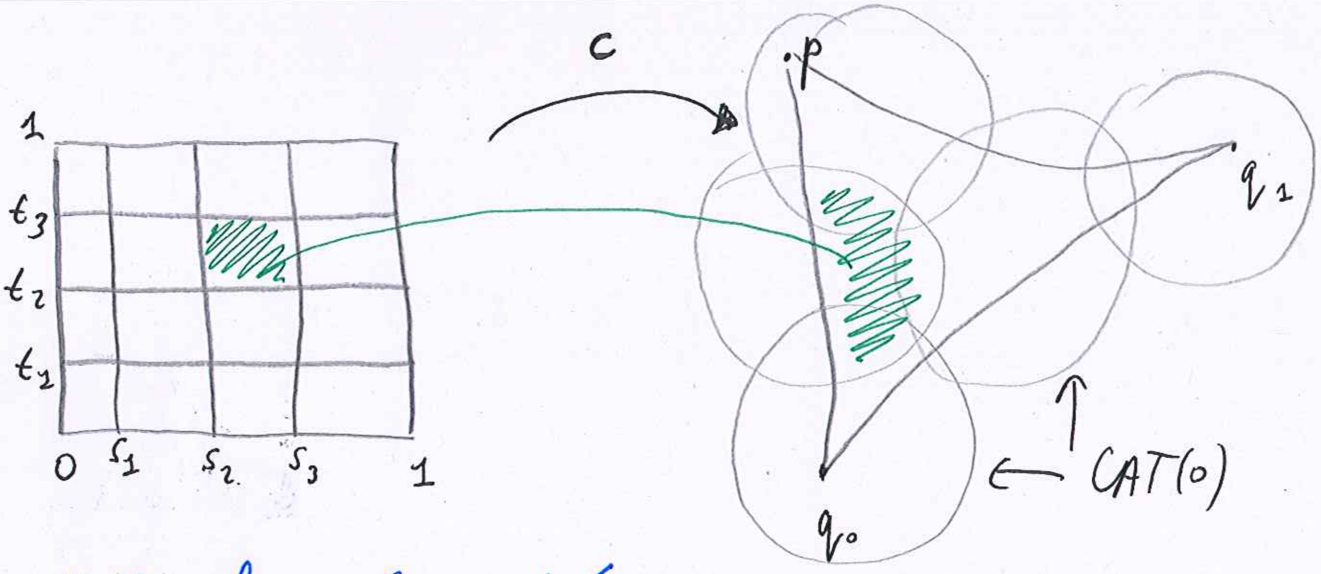
$$(s,t) \longmapsto c_s(t)$$

- c ist stetig, da die Geodäten in Y stetig von ihren Endpunkten abhängen.

- Bild$(c) \subseteq$ ist kompakt
  Y ist lokal CAT(0) $\Rightarrow$ Bild$(c) \subseteq \underbrace{B_{\varepsilon_1}(p_1)}_{} \cup \dots \cup \underbrace{B_{\varepsilon_n}(p_n)}_{}$
  CAT(0)

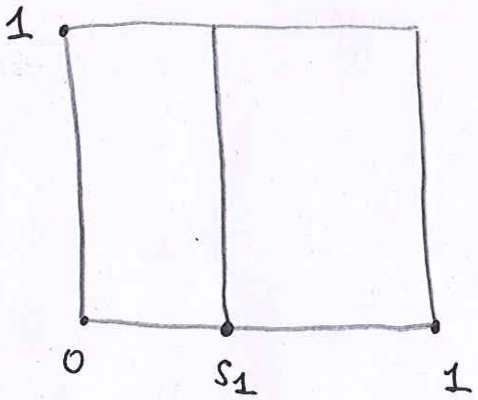
- Wähle $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$
  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = 1$

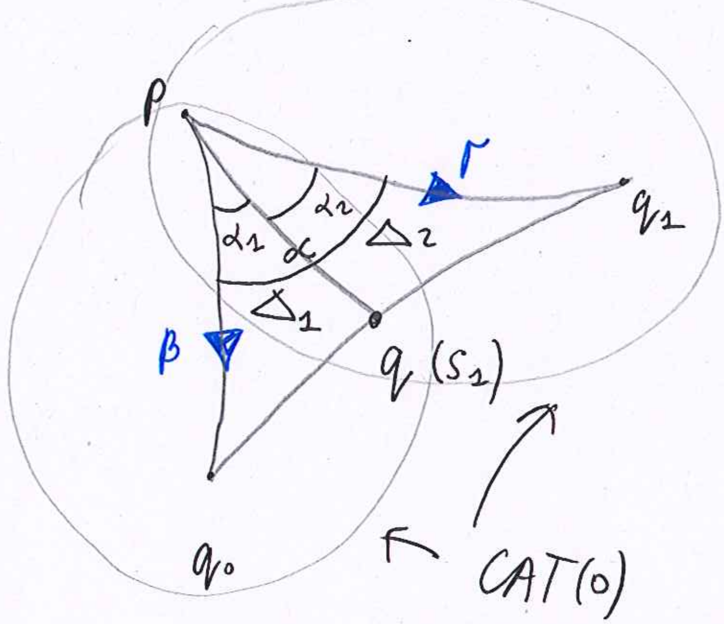
  mit $c([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq B_{\varepsilon_{j'}}(p_{j'})$
  $j' \in \{1, \dots, n\}$.



0. Fall: $k=1,\ \ell=1$ ✓

1. Fall: $k=2,\ \ell=1$

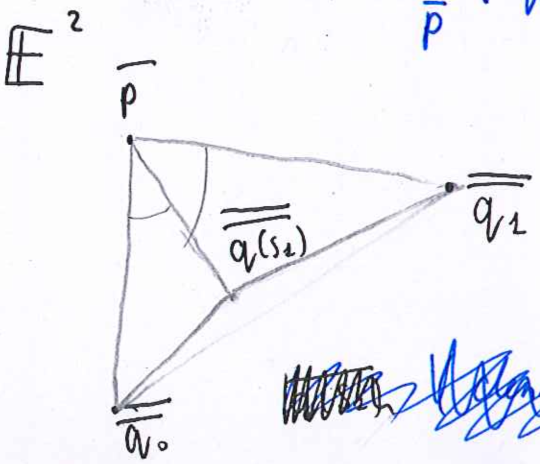




$\Rightarrow$ Die CAT(0) Winkelbed. (*) gilt für Δ_1 und Δ_2

$$\angle(\beta,\gamma) \overset{\text{Prop. 43}}{\leq} \angle(\beta, c_{s_1}) + \angle(c_{s_1}, \gamma)$$

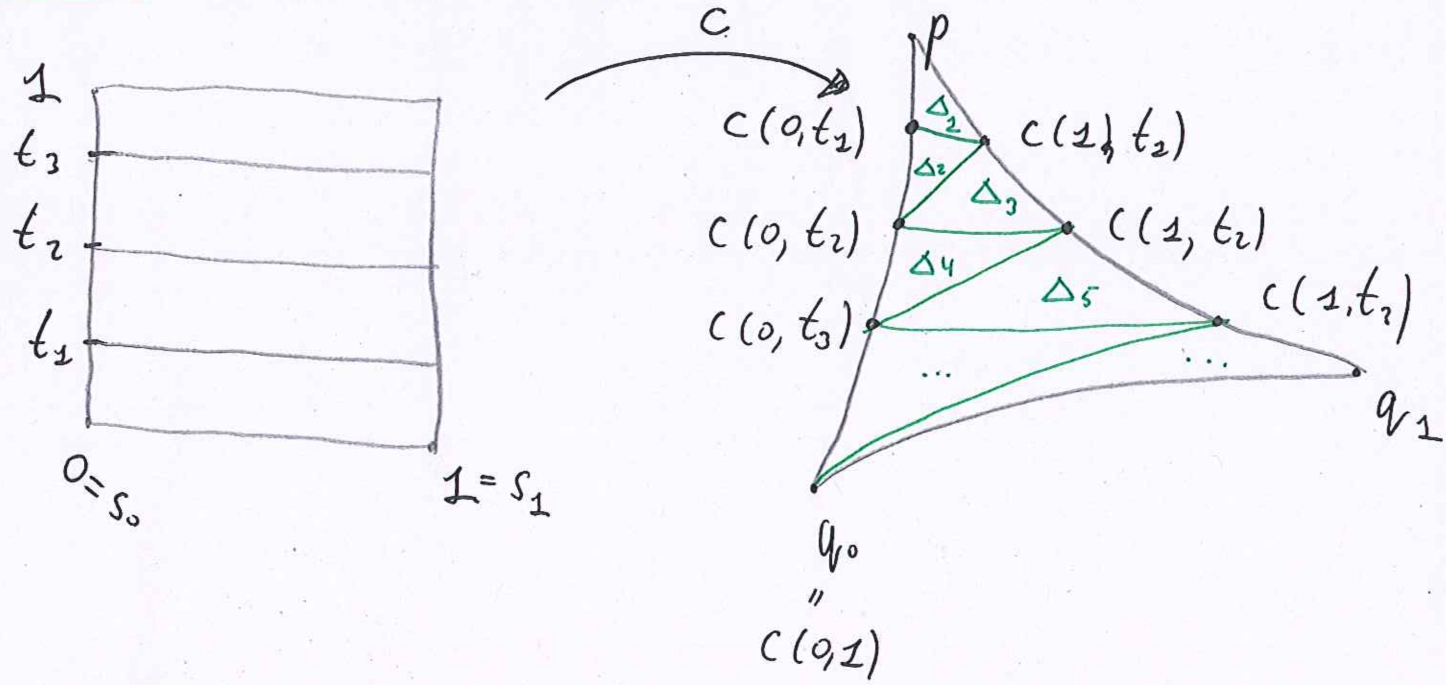
$$\overset{(*)}{\leq} \angle_{\bar{p}}\left(\bar{\bar{q}}_0, \overline{\overline{q(s_1)}}\right) + \angle_{\bar{p}}\left(\overline{\overline{q(s_1)}}, \bar{\bar{q}}_1\right)$$



$$\leq \angle_{\bar{p}}\left(\bar{\bar{q}}_0, \bar{\bar{q}}_1\right).$$

Alexandrov's Lemma

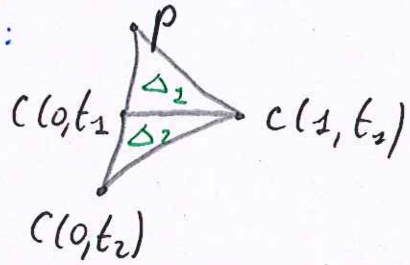
2. Fall: $k = 1$ und $l > 1$



- verbinde die Punkte $c(s_i, t_j)$ mit Geodäten so wie oben.

Die CAT(0)-Winkelbedingung gilt für alle Δ_i so wie oben.

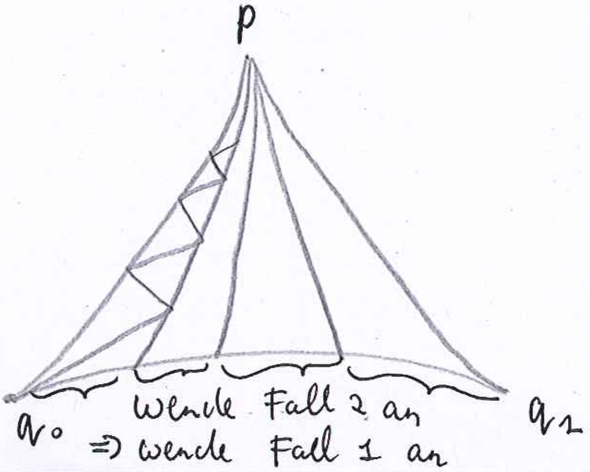
Wende Fall 1 auf:



Folglich gilt die Winkelbed. für das Dreieck $\Delta(p, c(0,t_2), c(1,t_1))$

Wiederhole diese Argumentation. Nach endlich vielen Schritten, haben wir damit gezeigt, dass die Winkelbedingung für das Dreieck $\Delta(p, q_0, q_1)$ gilt.

3. Fall: $k > 1$ und $l > 1$



 $\square$