Konvexität

Wiederholung:

48. Definition

(i) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $\Phi: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u>, wenn für alle $t, s \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$\Phi(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda \Phi(s) + (1-\lambda)\Phi(t)$$

(ii) Sei X ein geodätischer Raum. Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u>, wenn für alle l. u. Geodäten $c: [0,1] \to X$ die Funktion:
$$\Phi: [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(c(t))$$ konvex ist.

49. Lemma

Sei X ein geod. Raum und $f: X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn für alle l.u. Geodäten $c: [0,1] \to X$ gilt:

$$f(c(\lambda)) \leq (1-\lambda) f(c(0)) + \lambda f(c(1)) \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

<u>Beweis:</u> üA

50. Beispiel

Sei (X,d) ein CAT(0)-Raum. Dann ist $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvex.

Denn: Sei $c: [0,1] \to X \times X$ eine l. u. Geodäte. Dann sind $\pi_1 \circ c: [0,1] \to X$ und $\pi_2 \circ c: [0,1] \to X$ l. u. Geodäten, wobei π_1 bzw. π_2 Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente sind.

Sei $\lambda \in [0,1]$ bel. Wir haben:

$$d(c(\lambda)) = d(\pi_1 \circ c(\lambda), \pi_2 \circ c(\lambda)) \overset{A1.2.}{\leq} (1-\lambda)\, d(\pi_1 \circ c(0), \pi_2 \circ c(0))$$
$$+ \lambda \cdot d(\pi_1 \circ c(1), \pi_2 \circ c(1)) = (1-\lambda)\, d(c(0)) + \lambda\, d(c(1)).$$

Mit Lemma 49 folgt, dass $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvex ist.

51. Definition:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $\Phi: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>lokal konvex</u>, wenn für alle $l \in I$ ein $\varepsilon_l > 0$ ex., s.d.

$$\Phi\big|_{B_{\varepsilon_l}(l)} : B_{\varepsilon_l}(l) \cap I \to \mathbb{R} \text{ konvex ist.}$$

52. Lemma

Sei $\Phi: [0,1] \to \mathbb{R}$ eine lokal konvexe Funktion. Dann ist Φ konvex.

<u>Beweis:</u> ÜA.

Zurück zu Lemma 32.

32. Lemma

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist und sei $c: [0,1] \to X$ eine l. u. lokale Geodäte von x nach y, $x, y \in X$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, s.d. für alle $\bar{x} \in B_\varepsilon(x)$ und $\bar{y} \in B_\varepsilon(y)$ eine eindeutige linear u. lokale Geodäte

$$c_{\bar{x}\bar{y}}: [0,1] \to X \text{ von } \bar{x} \text{ nach } \bar{y}$$

mit $\sup_{t \in [0,1]} d_X(c_{\bar{x}\bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon$ existiert.

Eigenschaft K: Weiter gilt, dass für je zwei l. u. Geodäten $c_1, c_2: [0,1] \to X$ mit $\sup_{t \in [0,1]} d_X(c_i(t), c(t)) < \varepsilon$ für $i = 1,2$ die Funktion

$$\Phi: [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto d_X(c_1(t), c_2(t)) \text{ konvex ist.}$$

Beweis:

Da X lokal CAT(0) und lokal vollständig ist, existiert für jedes $x \in X$ ein $r_x > 0$, s.d.

$B_{r_x}(x)$ CAT(0) ist und $\overline{B_{r_x}(x)}$ vollständig ist.

Wir betrachten nun die offene Überdeckung

$$c([0,1]) \subseteq \bigcup_{t \in [0,1]} \underbrace{B_{\frac{r_{c(t)}}{2}}(c(t))}_{\text{CAT(0) und } \overline{B_{\frac{r_{c(t)}}{2}}} \text{ ist vollständig}}$$

Weiter ist $[0,1]$ kompakt und $c: [0,1] \to X$ ist stetig. Folglich ist $c([0,1])$ kompakt. Es existieren also $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ mit:

$$c([0,1]) \subseteq B_{\frac{r_{c(t_1)}}{2}}(c(t_1)) \cup \dots \cup B_{\frac{r_{c(t_n)}}{2}}(c(t_n)) \qquad (*)$$

Wir def. $\boxed{\varepsilon := \frac{\min\{r_c(t_1), \dots, r_c(t_n)\}}{4}}$

Beh.: Für alle $t \in [0,1]$ gilt:

$B_{2\varepsilon}(c(t))$ ist CAT(0) und $\overline{B_{2\varepsilon}(c(t))}$ ist vollständing.

Beweis der Beh.: Sei $t \in [0,1]$ beliebig. Dann ex. $i \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$c(t) \in B_{\frac{r_{c(t_i)}}{2}}(c(t_i)) \qquad (\text{siehe } (*))$$

Wir zeigen:

$$B_{2\varepsilon}(c(t)) \subseteq \underbrace{B_{r_c(t_i)}(c(t_i))}.$$

ist CAT(0) und $\overline{B_{r_{c(t_i)}}(c(t_i))}$ ist vollständig.

Damit folgt die Behauptung.

Sei also $x \in B_{2\varepsilon}(c(t))$ bel.

Es gilt:

$$d(x, c(t_i)) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x, c(t)) + d(c(t), c(t_i))$$

$$< 2\varepsilon + \frac{r_{c(t_i)}}{2}$$

$$\overset{\text{Def. von } \varepsilon}{\leq} 2 \cdot \frac{r_{c(t_i)}}{4} + \frac{r_{c(t_i)}}{2} = r_{c(t_i)}.$$

Folglich ist $x \in B_{r_{c(t_i)}}(c(t_i))$. □.

Zur Eigenschaft K und Eindeutigkeit von $c_{\overline{x}\overline{y}}$:

Seien $c_1, c_2 : [0,1] \to X$ l. u. lokale Geodäten mit

$$\sup_{t \in [0,1]} d(c_i(t), c(t)) < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$t \longmapsto d(c_1(t), c_2(t))$$

Beh: Φ ist lokal konvex

Beweis der Beh.: Sei $t \in [0,1]$ bel.

Es ex. $\varepsilon_1', \varepsilon_2' > 0$ s.d.

$$\left.\begin{aligned} c_1 &: [t-\varepsilon_1', t+\varepsilon_1'] \to B_{2\varepsilon}(c(t)) \\ c_2 &: [t-\varepsilon_2', t+\varepsilon_2'] \to B_{2\varepsilon}(c(t)) \end{aligned}\right\} \text{ ist } CAT(0)$$

Wir def. $\varepsilon' := \min\{\varepsilon_1', \varepsilon_2'\}$. Nach Aufgabe 2.1 sind lokale Geodäten in CAT(0) Räumen schon globale Geodäten. Folglich sind ~~Nun ist~~ $\cancel{d|_{B_{2\varepsilon}(c(t))}}$ $c_1|_{[t-\varepsilon', t+\varepsilon']}$ und $c_2|_{[t-\varepsilon', t+\varepsilon']}$ l.u. Geodäten.

Nach Beispiel 50 ist

$$d|_{B_{2\varepsilon}(c(t))} : B_{2\varepsilon}(c(t)) \times B_{2\varepsilon}(c(t)) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine konvexe Funktion. Folglich ist

$$\Phi : [t-\varepsilon', t+\varepsilon] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ konvex.} \qquad \square.$$

Mit Lemma 52 folgt, dass Φ global konvex ist.

<u>Damit können wir nun die Eindeutigkeit zeigen:</u>

Seien $\bar{x} \in B_\varepsilon(x)$, $\bar{y} \in B_\varepsilon(y)$ bel. und

$c_{\bar{x}\bar{y}}, c'_{\bar{x}\bar{y}} : [0,1] \to X$ l.u. lokale Geodäten von $\bar{x}$ nach $\bar{y}$

mit der Eigenschaft:

$$\sup_{t\in[0,1]} d(c_{\bar{x}\bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon$$

$$\sup_{t\in[0,1]} d(c'_{\bar{x}\bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon$$

Wir wissen, dass die Funktion

$$\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$t \longmapsto d(c_{\bar{x}\bar{y}}(t), c'_{\bar{x}\bar{y}}(t))$$

konvex ist.

Insbesondere gilt für $\lambda \in [0,1]$ bel.

$$\underset{d(c_{\bar{x}\bar{y}}(\lambda), c'_{\bar{x}\bar{y}}(\lambda))}{\underset{\parallel}{\Phi(\lambda)}} \leq \underbrace{(1-\lambda)\Phi(0) + \lambda\Phi(1)}$$

$$= (1-\lambda)\, d(c_{\bar{x}\bar{y}}(0), c'_{\bar{x}\bar{y}}(0)) + \lambda \cdot d(c_{\bar{x}\bar{y}}(1), c'_{\bar{x}\bar{y}}(1))$$

$$= (1-\lambda)\, d(\bar{x},\bar{x}) + \lambda d(\bar{y},\bar{y})$$

$$= 0$$

Folglich erhalten wir: $c_{\bar{x}\bar{y}}(\lambda) = c'_{\bar{x}\bar{y}}(\lambda)$

$$\overset{\lambda \text{ bel.}}{\Longrightarrow} \quad c_{\bar{x}\bar{y}} = c'_{\bar{x}\bar{y}}.$$

Zur Existenz von $c_{\bar{x}\bar{y}}$:

Wir definieren für $A \in (0,1]$ die Eigenschaft $P(A)$:

Für alle $a, b \in [0,1]$ mit $0 < b-a \leq A$ und alle $\bar{p} \in B_\varepsilon(c(a))$, $\bar{q} \in B_\varepsilon(c(b))$ ex. eine l. u. lokale Geodäte $c_{\bar{p}\bar{q}} : [a,b] \to X$ von $\bar{p}$ nach $\bar{q}$ mit

$$\sup_{t \in [a,b]} d(c_{\bar{p}\bar{q}}(t), c(t)) < \varepsilon$$

Wir zeigen:

1. Schritt: Es ex. $A \in (0,1]$, s.d. die Eigenschaft $P(A)$ wahr ist.

2. Schritt: $P(A)$ ist wahr $\Rightarrow$ $P(\frac{3}{2}A)$ ist wahr

$\Rightarrow$ folgt die Existenz von $c_{\bar{x}\bar{y}}$

1. Schritt: Für $A = \frac{\varepsilon}{\ell(c)}$ gilt $P(A)$.

Denn: Seien $a, b \in [0,1]$ mit $0 < b-a \leq \frac{\varepsilon}{\ell(c)}$ bel.

Dann ist $d(c(a), c(b)) \leq \ell(c|_{[a,b]}) = \ell(c) \cdot |b-a| \leq \varepsilon$.

$\text{Bild}(c|_{[a,b]}) \subseteq \underbrace{B_{2\varepsilon}(c(0))}_{\text{ist } CAT(0)}$,

also ist $c|_{[a,b]}$ l.u. Geodäte.

Sei weiter $\bar{p} \in B_\varepsilon(c(a))$, $\bar{q} \in B_\varepsilon(c(b))$ bel.

Dann gilt: $\bar{p}, \bar{q} \in \underbrace{B_{2\varepsilon}(c(a))}_{CAT(0)}$. Da $B_{2\varepsilon}(c(a))$ $CAT(0)$ ist,

ex. eine l.u. Geodäte $c_{\bar{p}\bar{q}}$ von $\bar{p}$ nach $\bar{q}$.

2. Schritt: $P(A)$ ist wahr $\Rightarrow$ $P(\frac{3}{2}A)$ ist wahr.

Beweis:

Seien $a, b \in [0,1]$ mit $0 < b-a \leq \frac{3}{2}A$ bel.

Teile das Intervall $[a,b]$ in drei gleich große Intervalle auf, siehe Bild:

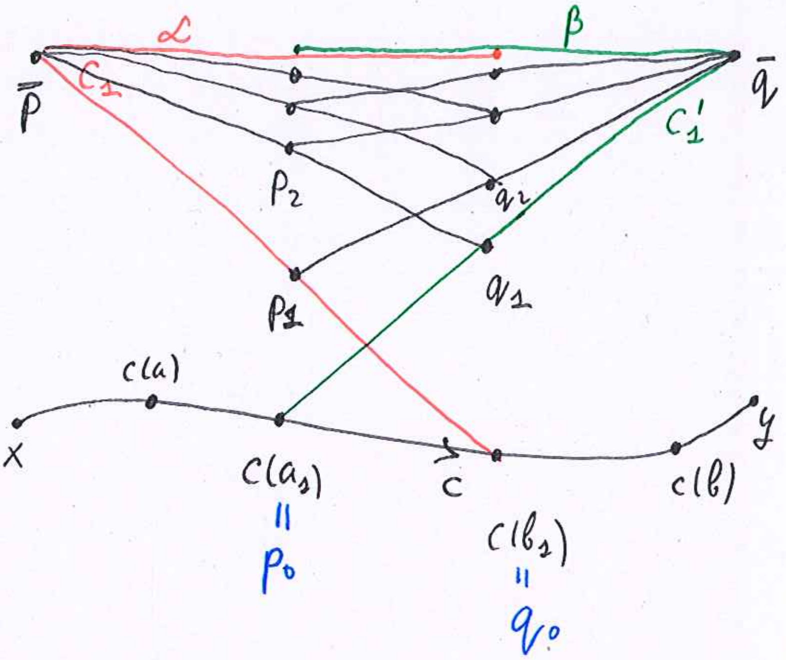
Seien weiter $\bar{p} \in B_\varepsilon(c(a))$

$\bar{q} \in B_\varepsilon(c(b))$ bel.

Wir def. induktiv Folgen p_n und q_n in X.

$p_0 := c(a_1)$, $q_0 := c(b_1)$

Seien also p_{n-1} und q_{n-1} konstruiert.



Da P(A) gilt, existieren l. u. lokale Geodäten

$c_n : [a, b_1] \to X$

von $\bar{p}$ zu q_{n-1}

und $c_n' : [a_1, b] \to X$ von p_{n-1} zu $\bar{q}$.

Sei $p_n := c_n(a_1)$ und $q_n := c_n'(b_1)$.

<u>Beh.:</u>

(i) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen.

(ii) $p_n \in \underbrace{\overline{B_\varepsilon(p_0)}}$, $q_n \in \underbrace{\overline{B_\varepsilon(q_0)}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

sind vollständig

Folglich sind $(p_n)_n, (q_n)_n$ konvergente Folgen.

(iii) Für $t \in [a, b_1]$ ist $(c_n(t))_n$ eine Cauchy-Folge in $\overline{B_\varepsilon(c(t))}$. Folglich ist $(c_n(t))_n$ eine konv. Folge.

(iv) Für $t \in [a_1, b]$ ist $(c_n'(t))_n$ eine Cauchy-Folge in $\overline{B_\varepsilon(c(t))}$. Folglich ist $(c_n'(t))_n$ eine konv. Folge.

– ohne Beweis – (Nachrechnen)

Wir def.:

$$\alpha : [a, b_1] \to X$$
$$t \mapsto \lim_{n \to \infty} c_n(t)$$

und

$$\beta : [a_1, b] \to X$$
$$t \mapsto \lim_{n \to \infty} c_n'(t).$$

<u>Beh:</u> Die Konvergenz $c_n \to \alpha$ und $c_n' \to \beta$ ist gleichmäßig und α und β sind l. u. lokale Geodäten.

Weiter gilt $\alpha|_{[a_1, b_1]} = \beta|_{[a_1, b_1]}$

Die Komposition $\alpha|_{[a, a_1]} * \beta|_{[a_1, b]}$ ist die gesuchte l. u. lokale Geodäte $c_{\bar{p}\bar{q}}$. $\square$