§ 3 Gruppenwirkungen auf kubischen Komplexen

Motivation:

(i) Spezieller Fall des Satzes von Cartan-Hadamard:

Sei X ein vollständiger einfach-zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum. Dann ist X CAT(0).

Also:

lokale Eigenschaft: lokal CAT(0)
globale Eigenschaft: einfach zusammenhängend $\Big\} \Rightarrow$ global CAT(0)

Frage: Wie kann man die lokale CAT(0) Eigenschaft testen?

⇝ Für eine spezielle Klasse von Räumen, kubische Komplexe kann man diese lokale Eigenschaft in eine kombinatische Eigenschaft übersetzen und somit "leichter" testen.

⇝ Gromov's Link Condition.

(ii) Fragestellung:

$$G \overset{\text{simplizial}}{\curvearrowright} \text{CAT(0) kubischer Komplex}$$

G endlich erzeugte Gruppe

Fixpunkt?

⇝ Für CAT(0) kubische Komplexe werden wir eine Methode sehen um diese Fragestellung anzugehen.

§3.1 Kubische Komplexe

Grobe Idee: Wir bauen einen top. Raum aus Würfeln.

<u>Konvention</u> : $[0,1]^0 = \{0\}$

1. Definition

Sei $W := [0,1]^n \subseteq (\mathbb{R}^n, d_2)$ ein Würfel. Eine <u>Seite</u> $S \subseteq W$ ist gegeben durch:

$$S = S_1 \times \ldots \times S_n \quad \text{mit} \quad S_i \in \{\{0\}, \{1\}, [0,1]\}$$

Die eingeschränkte euklidische Metrik auf W bezeichnen wir mit d_W.

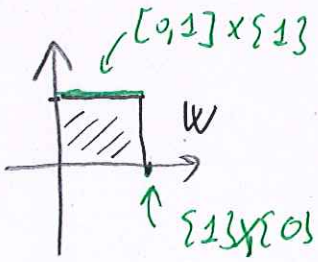
Weiter definieren wir die Dimension von W wie folgt:

$$\dim(W) := \dim(\langle W \rangle)$$

↑ $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2. Beispiel

$W = [0,1]^2$



sind Seiten von W.

3. Definition

Seien W_1, W_2 zwei Würfel und $S_1 \subseteq W_1$ und $S_2 \subseteq W_2$ Seiten. Eine Isometrie $\varphi : S_1 \to S_2$ heißt <u>Verklebung</u> von W_1 und W_2.

Sei nun $\mathcal{W}$ eine Familie von Würfeln und
$\mathcal{V}$ eine Familie von Verklebungen von Würfeln aus $\mathcal{W}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Kein Würfel ist mit sich selbst verklebt

(ii) Je zwei Würfel aus $\mathcal{W}$ sind höchstens einmal miteinander verklebt.

Sei $\sim$ die durch

$x \sim y :\Longleftrightarrow$ es ex. eine Verklebung $e \in \mathcal{V}$ mit $x \in \mathrm{dom}(e)$ und $e(x) = y$ (Definitionsbereich von e)

erzeugte Äquivalenzrelation auf $\dot{\bigsqcup}_{W \in \mathcal{W}} W$.

Die Menge $X := \left(\dot{\bigsqcup}_{W \in \mathcal{W}} W \right) / \sim$ heißt <u>kubischer Komplex def. durch $(\mathcal{W}, \mathcal{V})$</u>.

Die <u>Dimension von X</u> ist def. durch:

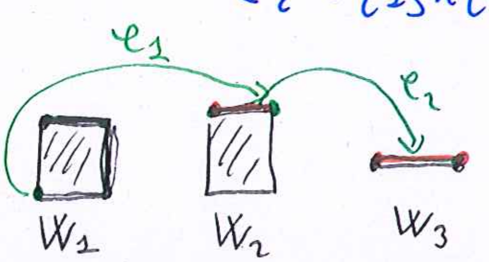
$$\dim(X) := \sup\{\dim(W) \mid W \in \mathcal{W}\}.$$

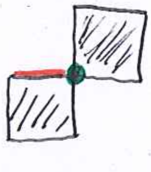
4. Beispiel

$\mathcal{W} := \{ W_1 = [0,1]^2, W_2 = [0,1]^2, W_3 = [0,1]$

$\mathcal{V} := \{ e_1 : \{0\} \times \{0\} \subseteq W_1 \longrightarrow \{1\} \times \{1\} \subseteq W_2,$

$e_2 : \{1\} \times [0,1] \subseteq W_2 \longrightarrow [0,1] = W_3 \}$



$X =$ 

5. Metrik auf X $(\mathcal{W}, \vartheta)$

Seien $x, y \in X$ bel.. Ein <u>Weg c von x nach y</u> in X ist definiert als eine endliche Folge $c = (x_0, \dots, x_m)$, $x_i \in X$ mit

- $x_0 = x$
- $x_m = y$
- für alle $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ex. ein Würfel $W_i \in \mathcal{W}$ mit $x_i, x_{i+1} \in W_i$.

Weiter def. wir die Länge von c als:

$$\ell(c) = \ell((x_0, \dots, x_m)) = \sum_{i=0}^{m-1} d_{W_i}(x_i, x_{i+1})$$

X heißt <u>wegzusammenhängend</u>, wenn es für je zwei Elemente aus X ein solcher Weg existiert.

<u>Ab jetzt:</u> X ist immer wegzusammenhängend

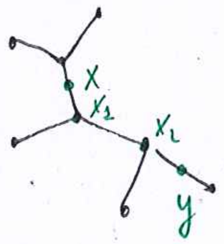
Nun definieren wir auf X eine Metrik:

$$d_X : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x, y) \mapsto \inf \{\ell(c) \mid c \text{ ist ein Weg von } x \text{ nach } y\}$$

Ab jetzt betrachten wir einen wegzusammenhängenden kubischen Komplex immer mit der Metrik d_X

6. Beispiel

X



$c = (x, x_1, x_2, y)$ ist ein Weg von x nach y

§ 3.1.1 (Simpliziale) Bäume

<u>Erinnerung:</u> Sei $\Gamma = (V, E)$ ein ung. Graph. Γ heißt (simplizialer) <u>Baum</u>, wenn Γ wegzusammenhängend ist und Γ keine Kreise hat.

Bäume haben eine natürliche Struktur als 1-dim. kubische Komplexe. Wir betrachten nun Bäume mit dieser kub. Struktur.

7. Satz

Bäume sind CAT(0).

<u>Beweis:</u> ÜA

<u>Fragestellung:</u>

$$\underset{\substack{\text{endlich}\\ \text{erzeugte}\\ \text{Gruppe}}}{G} \xrightarrow[\text{ohne Inversionen}^{\circledast}]{\text{simplizial}} \underset{\text{Baum}}{X}$$

$\circledast$ d.h.

ist nicht erlaubt

<u>Fixpunkt?</u>

Methode: Helly's Theorem für simpliziale Bäume

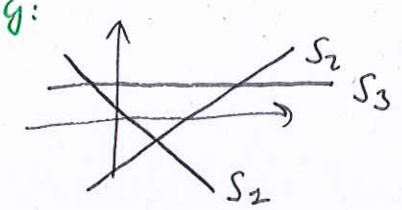
Helly's Theorem (1923)

Sei $\mathcal{S} := \{S_1, \dots, S_\ell \mid S_i \subseteq \mathbb{R}^d, S_i \neq \emptyset, S_i$ ist abgeschlossen + konvex für $i = 1, \dots, \ell\}$ eine endliche Familie. Wenn sich jeweils $(d+1)$-Elemente aus $\mathcal{S}$ nichttrivial schneiden, dann $\bigcap \mathcal{S}$ nichtleer.

— ohne Beweis —

Bemerkung:

$\mathbb{R}^2$



$\rightsquigarrow$ $(d+1)$ ist also <u>minimale</u> Schranke, denn $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, $S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$, $S_1 \cap S_3 \neq \emptyset$, aber $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$.

Frage: Gibt es eine Verallgemeinerung von diesem Theorem für CAT(0) Räume?

$\rightsquigarrow$ Ja, z.B. für Bäume.

Helly's Theorem für Bäume (Serre)
Sei X ein Baum und $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$ eine endliche Familie von Teilbäumen.
Wenn sich jeweils 2-Elemente aus $\mathcal{S}$ nichttrivial schneiden, dann ist $\cap \mathcal{S}$ nicht leer.

<u>Beweis:</u> ÜA

Strategie für: $G \curvearrowright X$ Fixpunkt?

Sei $\Phi: G \to SIsom(X) = \{f: X \to X \mid f \text{ ist simplizial}\}$ eine simpliziale Wirkung auf einen Baum X ohne Inversionen

1) Konstruiere ein Erzeugendensystem von
$G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ s.d. $Fix_\Phi(\langle g_i \rangle) \neq \emptyset$

Wir wissen aus Aufgabe 2.2, dass

- $Fix_\Phi(\langle g_i \rangle)$ abgeschlossen ist.
- Wenn $Fix_\Phi(\langle g_i \rangle) \neq \emptyset$, dann ist $Fix_\Phi(\langle g_i \rangle)$ konvex, also insbesondere ist $Fix_\Phi(\langle g_i \rangle)$ CAT(0).

Folglich ist $Fix_\Phi(\langle g_i \rangle)$ ein Teilbaum.

2) Zeige, dass $\mathrm{Fix}_{\Phi}(\langle g_i \rangle) \cap \mathrm{Fix}_{\Phi}(\langle g_j \rangle) \neq \emptyset$ für alle $i,j \in \{1, \dots, k\}$.

Dann folgt mit Helly's Theorem für Bäume:

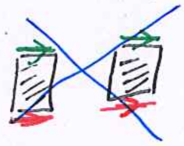
$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Fix}_{\Phi}(\langle g_i \rangle) = \mathrm{Fix}_{\Phi}(\{g_1, \dots, g_k\}) = \mathrm{Fix}_{\Phi}(\langle g_1, \dots, g_k \rangle)$$

$$= \mathrm{Fix}_{\Phi}(G).$$

~~8) Beispiel~~

Wiederholung:

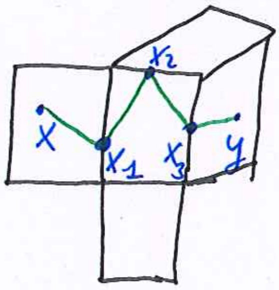
- $\mathcal{W}$ eine Familie von Würfeln
- $\mathcal{V}$ eine Familie von Verklebungen
  - kein Würfel ist mit sich selbst verklebt
  - je zwei Würfel aus $\mathcal{W}$ sind höchstens einmal verklebt



$\leadsto$ $X := \dot{\bigsqcup}_{W \in \mathcal{W}} W \Big/ \sim$ $\nwarrow$ erzeugt von:

$x \sim y \iff$ es ex. eine Verklebung $\varphi \in \mathcal{V}$ mit $x \in \mathrm{dom}(\varphi)$ und $\varphi(x) = y$

Metrik auf X: $d_X(x,y) := \inf\{\ell(c) \mid c = (x, x_1, \dots, x_m, y)$ ein Weg in $X\}$



ein Weg von x nach y

- Wir betrachten immer den kubischen Komplex X mit der Metrik d_X und X ist bei uns immer wegzusammenhängend.

- $\dim(X) := \sup_{W \in \mathcal{W}} \dim(W)$

- Wir interessieren uns für CAT(0)-Räume

  $\leadsto$ CAT(0) kubische Komplexe

• 1-dim. CAT(0) kubische Komplexe $\iff$ Bäume

„$\Leftarrow$" ÜA

„$\Rightarrow$" Sei X ein 1-dim. CAT(0) kubischer Komplex. Dann ist X ein Graph. Da X ein CAT(0)-Raum ist, ist X wegzusammenhängend und X ist kontrahierbar. Insbesondere ist X also kreisfrei.

Insgesamt: X ist ein wegzusammenhängender kreisfreier Graph $\iff$ X ist ein Baum.

Fragestellung:

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei $\Phi: G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung auf einen Baum. Hat Φ einen globalen Fixpunkt (d.h. $\exists\, x \in X$ s.d. $\forall\, g \in G$: $\Phi(g)(x) = x$)?

$\rightsquigarrow$ Wir betrachten zuerst simpliziale Wirkungen.

$\Phi: G \to \mathrm{Isom}(X)$ heißt simplizial, wenn

$$\Phi(G) \leq S\mathrm{Isom}(X) = \{ f: X \to X \mid f \text{ ist Isometrie} + f(v) \in \mathrm{Ecken}(X) \text{ für alle } v \in \mathrm{Ecken}(X) \}$$

z.B: Sei $X = \mathbb{R}$ ein Baum. 

Dann ist $f: \begin{array}{l} X \to X \\ x \mapsto x+2 \end{array}$ eine simpliziale Isometrie, aber

$g: \begin{array}{l} X \to X \\ x \mapsto x+\frac{1}{2} \end{array}$ ist keine simpliziale Isometrie.

$\rightsquigarrow$ Wir schränken das Bild $\Phi(G)$ noch ein wenig ein. Wir betrachten nur simpliziale Isometrien ohne Inversionen.

Eine simp. Isometrie $f: X \to X$ hat eine Inversion, wenn es eine Kante $\underset{v_1 \quad v_2}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} \subseteq X$ ex. s.d. $f(\underset{v_1 \quad v_2}{\bullet\!\!-\!\!\bullet}) = \underset{v_2 \quad v_1}{\bullet\!\!-\!\!\bullet}$.

8. Satz

Sei $G \overset{=\langle g_1,\dots,g_k\rangle}{}$ eine endlich erzeugte Gruppe. Sei weiter X ein Baum und $\Phi: G \to SIsom(X)$ eine simpliziale Wirkung ohne Inversionen. Wenn $Fix_\Phi(\langle g_i\rangle) \neq \emptyset$ und $Fix_\Phi(\langle g_i\rangle) \cap Fix_\Phi(\langle g_j\rangle) \neq \emptyset$ $\forall i,j \in \{1,\dots,k\}$, dann $Fix_\Phi(G) \neq \emptyset$.

__Beweis:__

- $Fix_\Phi(\langle g_i\rangle) \subseteq X$ ist ein Teilbaum von X.

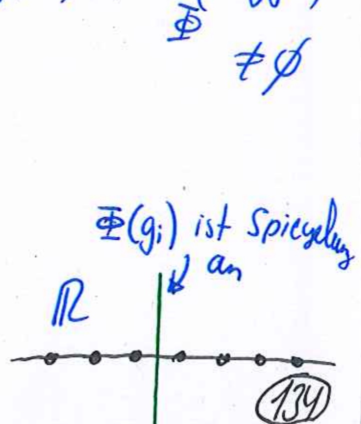
$\overset{\text{Helly's}}{\underset{\text{Theorem für Bäume}}{\Longrightarrow}} \emptyset \neq \bigcap Fix_\Phi(\langle g_i\rangle) = Fix_\Phi(\langle g_1,\dots,g_k\rangle) = Fix_\Phi(G)$. $\square$

9. Satz (Verallgemeinerung)

Sei $G = \langle g_1,\dots,g_k\rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe. Sei weiter X ein Baum und $\Phi: G \to Isom(X)$ eine __isometrische Wirkung__. Wenn $Fix_\Phi(\langle g_i\rangle) \neq \emptyset$ und $Fix_\Phi(\langle g_i\rangle) \cap Fix_\Phi(\langle g_j\rangle) \neq \emptyset$ für alle $i,j \in \{1,\dots,k\}$, dann $Fix_\Phi(G) \neq \emptyset$.

__Beweis:__ __ÜA__

- beachte $Fix_\Phi(\langle g_i\rangle)$ ist i.A. __kein__ Teilbaum z.B.



10. Beispiel

Sei $n \geq 3$ und F_n die freie Gruppe vom Rang n. Sei weiter $Aut(F_n) := \{ f: F_n \to F_n \mid f \text{ ist ein Automorphismus} \}$.

Sei weiter $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von F_n.

Wir def. Rechtsnielsenautomorphismen für $i,j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$

$$\rho_{ij} : F_n \to F_n \quad \text{wie folgt}$$
$$x_k \mapsto \begin{cases} x_i x_j & \text{falls } k = i \\ x_k & \text{falls } k \neq i \end{cases}$$

Weiter def. wir Involutionen (x_i, x_j) und e_i wie folgt
(Element der Ordnung 2)

$$(x_i, x_j) : F_n \to F_n \qquad\qquad e_i : F_n \to F_n$$
$$x_k \mapsto \begin{cases} x_j & \text{falls } k = i \\ x_i & \text{falls } k = j \\ x_k & \text{falls } k \neq i,j \end{cases} \qquad\qquad x_k \mapsto \begin{cases} x_i^{-1} & \text{falls } k = i \\ x_k & \text{falls } k \neq i \end{cases}$$

Es gilt: $\rho_{ij}, (x_i, x_j), e_i \in Aut(F_n)$ ~~für i≠j~~

Fakt:

$$Aut(F_n) = \langle \overbrace{(x_1,x_2)e_1 e_2, \ (x_2,x_3)e_1, \ (x_i, x_{i+1}), e_2 \rho_{12}, e_n}^{Y} \mid i = 3, \dots, n-1 \rangle$$

Achtung: $(x_1, x_2) e_1 e_2 : F_n \to F_n$
$$x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_2^{-1}$$
$$x_2 \mapsto x_1 \mapsto x_1^{-1}$$

$$e_2 \rho_{12} : F_n \to F_n$$
$$x_1 \mapsto x_1 x_2$$
$$x_2 \mapsto x_2^{-1}$$

Also: $e_2 \rho_{12} := \rho_{12} \circ e_2$

Weiter gilt: $\quad\cdot\ \mathrm{ord}(\alpha) = 2$ für $\alpha \in Y$

$\cdot\ |\langle \alpha, \beta \rangle| < \infty$ für $\alpha, \beta \in Y$ bel.

Sei also $\Phi : \mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung auf einem Baum. Dann ist $\mathrm{Fix}_\Phi(\mathrm{Aut}(F_n)) \neq \emptyset$.

Denn:
- $\mathrm{Fix}_\Phi(\langle\alpha\rangle) \underset{\text{BTFT}}{\neq} \emptyset$ (Bäume sind vollständige CAT(0)-Räume)
- $\mathrm{Fix}_\Phi(\langle\alpha\rangle) \cap \mathrm{Fix}_\Phi(\langle\beta\rangle)$

$= \mathrm{Fix}_\Phi(\langle\alpha, \beta\rangle) \underset{\text{BTFT}}{\neq} \emptyset$

$\overset{\text{Satz 9}}{\Longrightarrow} \mathrm{Fix}_\Phi(\mathrm{Aut}(F_n)) \neq \emptyset.$

10. Definition

Sei $\mathcal{X}$ eine Klasse von metrischen Räumen. Eine Gruppe G hat Eigenschaft $F\mathcal{X}$, wenn jede isometrische Wirkung auf jedes Element aus $\mathcal{X}$ einen Fixpunkt hat.

11. Beispiel

Sei $\mathcal{A}$ die Klasse der Bäume.

Für $n \geq 3$ hat $\mathrm{Aut}(F_n)$ die Eigenschaft $F\mathcal{A}$. (Bogopolski '73)

Frage:

Sei ~~[illegible]~~ $G \leq \mathrm{Aut}(F_n)$ eine bel. Untergruppe von endl. Index.
Hat G die Eigenschat $F\mathcal{A}$?
- für $n=3$ Nein
- für $n \geq 4$ ist die Frage offen

Anwendung der Eigenschaft FA:

⇝ Strukturtheorie:

Sei G eine endl. erzeugte Gruppe. Kann man G in "einfache" Bestandteile zerlegen?

z.B. in ein kartesisches Produkt

$$G \cong G_1 \times G_2$$

z.B. amalgamiertes Produkt

$$G \cong G_1 *_H G_2$$

$$\left(G_2 \xleftarrow{\psi} H \xrightarrow{\varphi} G_1 \right.$$

$$G_1 *_H G_2 = G_1 * G_2 / \langle\langle \varphi(h)\psi(h)^{-1} \mid h \in H \rangle\rangle$$

Theorem (Serre)

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Wenn G die Eigenschaft FA hat, dann ist G kein nichttriviales amalgamiertes Produkt.

Beweis: [im Seminar SS16]

Fazit: Für $n \geq 3$ ist $\mathrm{Aut}(F_n)$ kein nichttriviales amalg. Produkt.

Gruppentheorie		Geometrie
amalg. Produkte	⟷	Fixpunkte auf Bäumen

§ 3.1.2 Helly's Theorem für CAT(0) kubische Komplexe.

Bäume $\rightsquigarrow$ Teilbäume

kub. Komplexe $\rightsquigarrow$ Unterkomplexe

12. Definition

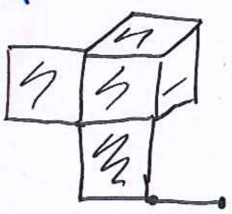
Sei X ein kubischer Komplex def. durch $(\mathcal{W}, \mathcal{V})$.
Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt <u>kubischer Unterkomplex</u>, wenn es eine Teilfamilie $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ gibt, s.d.

$$Y = \bigsqcup_{W \in \mathcal{W}'} W \Big/ \sim$$

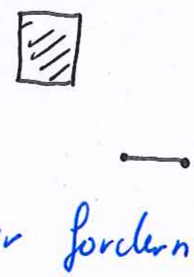
$\sim$ erzeugt von:
$x \sim y \iff$ es ex. eine Verklebung $\varphi \in \mathcal{V}$, $\varphi : S_1 \to S_2$, S_1, S_2 sind Seiten von $W_1, W_2 \in \mathcal{W}'$ und $\varphi(x) = y$.

13. Beispiel

X



Y



wir fordern nicht, dass Y wegzusammenhängend ist.