1. Hausaufgabenblatt zur Vorlesung CAT(0) kubische Komplexe

(keine Abgabe, Besprechung in der Übung am 30. 10. 2015)

Aufgabe 1.1

Zeigen Sie für metrische Räume X_1, X_2:

(i) $X_1 \times X_2$ ist geodätisch genau dann, wenn X_1 und X_2 geodätisch sind.

(ii) $X_1 \times X_2$ ist CAT(0) genau dann, wenn X_1 und X_2 CAT(0) sind.

Aufgabe 1.2

Sei (X, d) ein geodätischer Raum. Die Metrik d heißt konvex, wenn für je zwei Geodäten $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ die Ungleichung

$$d(\alpha(t), \beta(t)) \leq (1 - t) \cdot d(\alpha(0), \beta(0)) + t \cdot d(\alpha(1), \beta(1))$$

für alle $t \in [0, 1]$ gilt.

Zeigen Sie, dass die Metrik eines CAT(0)-Raumes konvex ist.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für den Spezialfall $\alpha(0) = \beta(0)$.

Aufgabe 1.3

Sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum. Angenommen, für alle $x, y \in X$ existiert ein Mittelpunkt, das heißt ein $m_{xy} \in X$, so dass

$$d(x, m_{xy}) = d(m_{xy}, y) = \frac{1}{2} d(x, y)$$

gilt. Zeigen Sie, dass (X, d) ein geodätischer Raum ist.

Aufgabe 1.4

Sei (X, d) ein CAT(0) Raum, $C \subseteq X$ eine konvexe vollständige Teilmenge und sei $\pi_C : X \to C$ die Projektion auf C. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y).$$