2. Hausaufgabenblatt zur Vorlesung CAT(0) kubische Komplexe

(**Abgabe:** bis Freitag 13.11.2015, 12:30 Uhr in der Übung)

Aufgabe 2.1

Definition: Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\gamma : [0, l] \to X$ heißt *lokale Geodäte*, wenn gilt: für alle $t \in [0, l]$ es existiert $\epsilon > 0$ s. d. $\gamma_{|[t-\epsilon,t+\epsilon]}$ eine Geodäte ist.

Sei X ein $CAT(0)$ Raum und $\gamma : [0, l] \to X$ eine lokale Geodäte. Zeigen Sie, dass γ eine Geodäte ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge

$$S := \{t \in [0, l] \mid \gamma_{|[0,t]} \text{ ist Geodäte}\}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge S offen und abgeschlossen in $[0, l]$ ist.

Aufgabe 2.2

Definition: Sei X ein metrischer Raum und G eine Gruppe. Eine *isometrische Wirkung* von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : G \to \mathrm{Isom}(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ bijektiv und } d(f(x), f(y)) = d(x, y) \text{ für alle } x, y \in X\}.$$

Die Fixpunktmenge von Φ ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Fix}_\Phi(G) = \{x \in X \mid \Phi(g)(x) = x \text{ für alle } g \in G\}.$$

Sei X ein $CAT(0)$ Raum und $\Phi : G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Zeigen Sie:

(i) Die Teilmenge $\mathrm{Fix}_\Phi(G) \subseteq X$ ist abgeschlossen.

(ii) Wenn $\mathrm{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$, dann ist $\mathrm{Fix}_\Phi(G)$ konvex.

Aufgabe 2.3

Definition: Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine beschränkte Teilmenge. Sei weiter $x \in X$. Wir definieren

$$\mathrm{rad}(x, A) := \sup\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Der *Radius* von A ist definiert wie folgt:

$$\mathrm{rad}(A) := \inf\{\mathrm{rad}(x, A) \mid x \in X\}.$$

Sei X ein vollständiger $CAT(0)$ Raum, seien $A_1, A_2 \subseteq X$ beschränkte Teilmengen mit

$$A_1 \subseteq \overline{B_{\mathrm{rad}(A_1)}(c_{A_1})},$$

$$A_2 \subseteq \overline{B_{\mathrm{rad}(A_2)}(c_{A_2})}$$

mit $c_{A_1}, c_{A_2} \in X$.

Zeigen Sie: wenn $A_1 \subseteq A_2$ gilt, dann ist

$$d(c_{A_1}, c_{A_2}) \leq \sqrt{2}\sqrt{\mathrm{rad}(A_2)^2 - \mathrm{rad}(A_1)^2}$$

-bitte wenden-

Aufgabe 2.4

Definition: Sei X ein metrischer Raum. Der Raum X heißt *sphärisch vollständig*, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$ und $r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq \overline{B_{r_n}(x_n)}$$

gilt:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{r_n}(x_n)} \neq \emptyset$$

Sei X ein $CAT(0)$ Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann vollständig ist, wenn er sphärisch vollständig ist.