

Prof. Dr. Linus Kramer

Zimmer 301b

linus.kramer@wwu.de

Seminar zur Pontrjagin-Dualität im Sommersemester 2019

In dem Seminar beschäftigen wir uns mit der Kategorie **LCA** der lokalkompakten abelschen Gruppen. Jeder Gruppe A in **LCA** kann man ihre duale Gruppe $\hat{A} = \text{Hom}(A, \mathbb{S}^1)$ zuordnen. Versehen mit einer geeigneten Topologie ist \hat{A} wieder eine Gruppe in **LCA**. Das ist in etwa vergleichbar mit dem Übergang auf den Dualraum eines Vektorraumes. Pontrjagins Dualitätssatz besagt unter anderem, dass die natürliche Abbildung in den Bidual

$$A \longrightarrow \hat{\hat{A}}$$

ein Isomorphismus ist. Man erhält aber eine ganze Menge zusätzlicher Informationen. Zum Beispiel ist das Dual einer kompakten abelschen Gruppe stets diskret (und umgekehrt). Algebraische Eigenschaften des Duals \hat{A} lassen sich in topologische Eigenschaften von A übersetzen. Pontrjagin-Dualität ist schließlich auch für die harmonische Analysis interessant.

Geplante **Themen** sind (je nach Teilnehmerzahl):

Struktur von endlich erzeugten abelschen Gruppen und der Elementarteilersatz, abgeschlossene Untergruppen und Quotienten von \mathbb{R}^m , die kompakt-offene Topologie, das Haar-Integral, der Satz von Peter-Weyl, Kategorien und Funktoren, Limiten, der Dualitätssatz, Annihilatoren und Untergruppen.

Die Vorlesung richtet sich an fortgeschrittene Studierende der Mathematik. Einige Themen sind auch für Lehramtsstudierende geeignet.

Voraussetzung sind Interesse an Gruppentheorie, sichere Kenntnis des Stoffes der Vorlesungen **Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie** und **Einführung in die Algebra**. Der Inhalt der Vorlesungen **Liegruppen** oder **Lokalkompakte Gruppen** ist sehr hilfreich, aber nicht obligatorisch.

Eine **Vorbesprechung** findet am Montag 14.1.2019 um 11:00 Uhr im Lichthof des 3. Stockwerkes statt.

Literatur:

Stroppel, Locally compact groups

Deitmar, Echterhoff, Principles of harmonic analysis

Kramer, Locally compact groups (Manuskript auf der Webseite, Version von 2017)

Hewitt, Ross, Abstract harmonic analysis I

Hofmann, Morris, The structure of compact groups

Dugundji, Topology

Jacobson, Basic Algebra I, II

Vorträge.

1. Die Struktur von endlich erzeugten abelschen Gruppen und der Elementarteilersatz.
Jacobson I, 3.18, 3.9, 3.10 oder Hofmann-Morris A1.9, A1.10 und A.1.11. sowie in Cohn, Basic Algebra, Ch 4.9: Dualität für endliche abelsche Gruppen
2. Allgemeines zu lokalkompakten Gruppen.
Untergruppen, Quotientengruppen, Zusammenhang und Einskomponente, Satz von der offenen Abbildung für σ -kompakte lokalkompakte Gruppen.
Kramer Ch. 1 und Ch. 2; sowie Stroppel Ch 3,4,6
3. Weils Lemma und van Dantzig's Theorem.
Stroppel 6.26, Hofmann-Morris 7.43; sowie Kramer Ch. 2 oder auch Hewitt-Ross
4. Das Haar-Integral und der Satz von Peter-Weyl.
Existenz und Eindeutigkeit des Haar-Integrals, Satz von Peter-Weyl.
Kramer Ch. 2 und Ch. 3; sowie Stroppel
5. Die kompakt-offene Topologie.
Definition der k -o-Topologie, Stetigkeit der Auswertung und der Komposition von Abbildungen, Satz von Arzelà-Ascoli.
Dugundji Ch. XII 1, 2; sowie Stroppel Ch. 9
6. Der Dual einer lokalkompakten topologischen Gruppe.
Stroppel Ch 20.; sowie Hofmann-Morris Ch. 7 oder auch Hewitt-Ross
7. Kategorien und Funktoren.
Kategorien, Funktoren, Monics, Epics, Limiten und Kolimiten.
Stroppel Ch 15; sowie Hofmann-Morris Ap. 3
8. Pontrjagin-Dualität.
Formulierung und Beweis des Dualitätssatzes.
Stroppel Ch. 21, Ch. 22; sowie Hofmann-Morris Ch. 7
9. Annihilatoren und Untergruppen.
Der Annihilator-Mechanismus.
Stroppel Ch 23; sowie Hofmann-Morris Ch. 7