Vorlesung

Lineare Algebra II

Linus Kramer

Münster, SoSe 14

4-stündig

§4 Spur, Determinante und charakteristisches Polynom

1. Erinnerung: Matrizen Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis.

Die Begleitmatrix (auch: Darstellungsmatrix) einer linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ ist

$$_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi) = X \qquad X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \qquad \xi_{ij} \in K$$

$$\varphi(b_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j \, \xi_{ji}$$

In der i-ten Spalte von X stehen also die Koordinaten von $\varphi(b_i)$. (bezüglich $\mathcal{B}$).

Vgl §3.12.

Die Abbildung $\underset{\overset{\|}{L(V,V)}}{End(V)} \longrightarrow K^{n \times n}$

die einer linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ die Matrix $_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ zuordnet, ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

$\mathrm{End}(V) \cong K^{n\times n}$. Achtung: dieser Isomorphismus hängt von der Basis $\mathcal{B}$ ab! Ist $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ eine andere Basis, so gilt

$$\underbrace{{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(\varphi)}_{=Y} = \underbrace{{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)}_{=S} \cdot \underbrace{{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi)}_{=X} \cdot \underbrace{{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)}_{=S^{-1}}$$

also $Y = S \cdot X \cdot S^{-1}$. Dabei ist der Punkt $\cdot$ das Matrizenprodukt, vgl. § 3.14.

Wegen $\mathbb{1}_n = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \cdot {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$ gilt $S \in GL_n(K)$ (vgl § 3.16)

$GL_n(K)$: Einheitengruppe des Matrizenringes $K^{n\times n}$.

Für eine gegebene Matrix $X \in K^{n\times n}$ gibt es $L, R \in GL_n(K)$ mit

$$r\left\{\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\right. = L \cdot X \cdot R$$

vgl § 3.20. Dabei ist r der Rang der Matrix X.

Über L und R kann man mehr sagen:

(α) Sei
$$T_{ij}(s) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \boxed{s} \\ & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ -i \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad\quad j \end{matrix} & \end{array}$$
für $i \neq j$, $s \in K$.

Die Matrix $Z = X \cdot T_{ij}(s)$ entsteht aus X durch Addition des s-Fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte von X.

(β) Sei
$$D_i(u) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & u & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ -i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad\quad i \end{matrix} & \end{array}$$
$u \in K^*$

Die Matrix $Z = X \cdot D_i(u)$ entsteht aus X durch Multiplikation der i-ten Spalte mit u.

(γ) Ist $\pi \in \mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\})$ eine Permutation der Menge $\{1, \dots, n\}$ und ist $P(\pi)$ die zugehörige <u>Permutationsmatrix</u> (in der j-ten Spalte von $P(\pi)$ steht in der $\pi(j)$-ten Zeile eine 1, sonst Nullen)

Die Matrix $Z = X \cdot P(\pi)$ entsteht aus X durch Ersetzen der i-ten Spalte durch die $\pi(i)$-te Spalte.

Wir haben in Korollar §3.22 gezeigt: zu $X \in K^{n \times n}$ gibt es $L, R \in GL_n(K)$ mit

$$L \cdot X \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei sind L und R Produkte von Matrizen vom Typ (α), (β), (γ) und explizit berechenbar ($\to$ Lösen von LGS)

Unsere Ziele in den nächsten beiden Kapiteln:

- Ein Kriterium zu finden, das "misst", ob $X \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix ist.
  $\to$ Determinante
- Eine Matrix $S \in GL_n(K)$ zu finden, so dass $Y = SXS^{-1}$ möglichst "einfach" aussieht $\to$ Normalform

2. Die Spur einer Matrix (english: trace)

Für $X \in K^{n\times n}$, $X = (\xi_{ij})_{i,j=1..n}$ setze

$$\mathrm{tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii}$$, die Spur von X

(Summe der Einträge auf der Diagonalen).

Die Abbildung
$$\mathrm{tr}: K^{n\times n} \to K, \quad X \mapsto \mathrm{tr}(X)$$

ist offensichtlich linear und surjektiv.

Lemma Für alle $X, Y \in K^{n\times n}$ gilt

$$\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$$

Beweis $X = (\xi_{ij})_{i,j=1..n}$ $Y = (\eta_{ij})_{i,j=1..n}$

$Z = XY = (\zeta_{ij})_{i,j=1..n}$

$$\zeta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik}\eta_{kj} \qquad (\text{vgl. } \S 3.15)$$

also $$\mathrm{tr}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}\eta_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} \eta_{ji}\xi_{ij}$$

$$= \mathrm{tr}(YX)$$

Multiplikation in K kommutativ. $\square$

Achtung: es gilt im Allgemein

$$\mathrm{tr}(XY) \neq \mathrm{tr}(X) \cdot \mathrm{tr}(Y)$$

Bsp $X = Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{tr}(X) = 0 \qquad \mathrm{tr}(XY) = 2$

Korollar Ist $S \in GL_n(K)$, $X \in K^{n \times n}$, so gilt

$$\mathrm{tr}(SXS^{-1}) = \mathrm{tr}(X)$$

Beweis $\mathrm{tr}(SXS^{-1}) \underset{\uparrow \text{Lemma}}{=} \mathrm{tr}(S^{-1}(SX)) = \mathrm{tr}(X)$ $\square$

Def Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und sei $B \subseteq V$ eine Basis (V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum).

Definiere die Spur von φ durch

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}({}_B M_B(\varphi)).$$

Nach dem vorigen Korollar hängt diese Zahl nicht von der gewählten Basis $B \subseteq V$ ab; für eine andere Basis $C \subseteq V$ gilt

$$\mathrm{tr}({}_C M_C(\varphi)) = \mathrm{tr}({}_C M_B(\mathrm{id}_V) \cdot {}_B M_B(\varphi) \cdot {}_B M_C(\mathrm{id}_V))$$

$$= \mathrm{tr}({}_B M_B(\varphi))$$

Die Spur ist durch die Eigenschaft $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ fast eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich:

<u>Satz</u> Sei $t : K^{n\times n} \to K$ eine lineare Abbildung. Wenn für alle $X, Y \in K^{n\times n}$ gilt $t(XY) = t(YX)$, dann gibt es ein $a \in K$ so, dass für alle $X \in K^{n\times n}$ gilt

$$t(X) = \mathrm{tr}(X)\cdot a$$

<u>Beweis</u> Sei $E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & -\, i \\ \mid & \\ j & \end{array} \in K^{n\times n}$

Es gilt $E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ E_{il} & j = k \end{cases}$ (nachrechnen)

Für $i \neq j$ folgt $t(E_{ij}) = t(E_{ii}E_{ij}) = t(E_{ij}E_{ii})$ $= t(0) = 0$ und weiter $t(E_{ii}) = t(E_{i1}E_{1i}) =$ $t(E_{1i}E_{i1}) = t(E_{11})$, also $t(X) = t\left(\sum_{i,j=1}^{n} E_{ij}\xi_{ij}\right)$ $= \sum_{i,j} t(E_{ij})\xi_{ij} = t(E_{11})\sum_{i} t(\xi_{ii}) = t(E_{11})\,\mathrm{tr}(X)$ $\square$

Eine (nicht unbedingt lineare) Abbildung $\rho: K^{n\times n} \to K$ mit der Eigenschaft, dass für alle $S \in GL_n(K)$, $X \in K^{n\times n}$ gilt

$$\rho(X) = \rho(SXS^{-1})$$

nennt man <u>Invariante</u>.

Die Untersuchung von Invarianten war früher ein wichtiges Forschungsgebiet der Mathematik. Die Spur ist also eine Invariante. Sie sagt aber nichts über die <u>Invertierbarkeit</u> von Matrizen aus:

$$\mathrm{tr}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nicht invbar}}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = 2 = \mathrm{tr}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{invertierbar}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Das liefert eine andere Invariante, die <u>Determinante</u>.

3. <u>Konvention</u> Seien $x_1, \dots, x_n \in K^n$. Wir schreiben x_i als Spaltenvektor $x_i = \begin{pmatrix} \xi_{1i} \\ \vdots \\ \xi_{ni} \end{pmatrix}$ und setzen

$$X = (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

aus n Spaltenvektoren machen wir eine $n\times n$-Matrix. Die Interpretation von X als linearen Abbildung ist einfach: die zugehörige lineare Abbildung $\varphi: K^n \to K^n$ bildet den Basisvektor $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$ auf x_j ab,

vgl § 3.10.

4. Determinantenfunktionen Eine Abbildung $d: K^{n\times n} \to K$ heißt Determinantenfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften hat.

(L) d ist linear in jeder Spalte, das heißt für alle $v_1, \ldots, v_n, w \in K^n$, $a \in K$, $j \in \{1 \ldots n\}$ gilt

$$d(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + wa, v_{j+1}, \ldots, v_n) =$$

$$d(v_1, \ldots, v_n) + d(v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n) \cdot a$$

(A) d ist alternierend, das heißt es gilt

$d(v_1, \ldots, v_n) = 0$, wenn $v_i = v_j$ für Indizes $1 \le i < j \le n$ gilt.

Offensichtlich bilden die Determinantenfunktionen einen K-Vektorraum (die Nullabbildung erfüllt sicher (L) und (A)).

Wir bestimmen diesen Vektorraum im Folgenden genauer.

<u>Satz</u> (Rechenregeln für Determinantenfunktionen)
Sei $d: K^{n\times n} \to K$ eine Determinantenfunktion, sei $X, X' \in K^{n\times n}$. Dann gilt Folgendes

(i) Wenn X' aus X durch Vertauschen von zwei Spalten entsteht, so gilt $d(X') = -d(X)$.

(ii) Wenn X' aus X durch Addition eines Vielfachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte entsteht, für $i \neq j$, so gilt $d(X') = d(X)$

(iii) Wenn X' aus X durch Multiplikation der i-ten Spalte mit $a \in K$ entsteht, so gilt
$$d(X') = d(X)\cdot a$$

(iv) Es gilt

beliebige Einträge

$$d\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdots a_n \, d\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Aus (iii) folgt insbesondere: wenn in einer Spalte von X nur Nullen stehen, so gilt $d(X) = 0$.

Beweis

(i) Sei $i<j$.

$$d(v_1,\dots,\underset{i}{v_i}\dots\underset{j}{v_j}\dots v_n) + d(v_1,\dots \underset{i}{v_j}\dots \underset{j}{v_i}\dots v_n)$$

$$\overset{(A)}{=} \underbrace{d(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_n)}_{=0} + d(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)$$

$$+ d(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n) + \underbrace{d(v_1,\dots v_j,\dots v_j \dots v_n)}_{=0}$$

$$\overset{(L)}{=} d(v_1,\dots,\underset{i}{v_i+v_j},\dots,\underset{j}{v_i+v_j},\dots v_n) \overset{(A)}{=} 0$$

(ii) Sei $i\neq j$.

$$d(v_1,\dots,\underset{i}{v_i+v_j a},\dots v_n) \overset{(L)}{=} d(v_1,\dots,v_n) + \overset{=0}{\cancel{d(v_1,\dots,\underset{i}{v_j},\dots \underset{j}{v_j},\dots)}}a$$

$$\overset{(A)}{=} d(v_1,\dots,v_n)$$

(iii) folgt direkt aus (L)

(iv)
$$d\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \overset{(iii)}{=} d\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} a_1\cdots a_n$$

$$\overset{(ii)}{=} d\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} a_1\cdots a_n$$

$\square$

5. Beispiel zur Berechnung von Determinantenfunktion

Sei $d: K^{3\times 3} \to K$ eine Determinantenfunktion.

$$d\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)\, d\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-3)\, d\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Strategie: forme eine gegebene Matrix zu einer oberen Dreiecksmatrix um durch Operationen vom Typ (α) und (γ).

Algorithmus zur Berechnung von Determinantenfunktion

Eingabe: eine $n \times n$-Matrix $X = (\xi_{ij})_{i,j=1\dots n} \in K^{n\times n}$ gegeben eine Determinantenfunktion $d: K^{n\times n} \to K$.

Für $k = n, n-1, \dots, 1$ mache Folgendes:

1. Fall $\xi_{kk} \neq 0$

Für $l = 1, \dots, k-1$ ziehe das $(\xi_{kl} \cdot \xi_{kk}^{-1})$-fache der k-ten Spalte von der l-ten Spalte ab

Ergebnis ist eine Matrix $X' = \begin{pmatrix} * & & * \\ \hline 0 \text{——} 0 & \xi_{kk} & * \\ 0 \text{——} 0 & & \ddots \; \xi_{nn} \end{pmatrix}$

Setze $\varepsilon_k = 1$

<u>2. Fall</u> $\xi_{kk} = 0$ und $\xi_{kj} \neq 0$ für ein

$1 \leq j < k$

Vertausche die j-te und k-te Spalte

und fahre fort wie im 1. Fall.

Notiere einen Vorzeichenwechsel, $\varepsilon_k = (-1)$

3. Fall $\xi_{k1} = \xi_{k2} = \cdots \xi_{kk} = 0$

Tue nichts weiter, setze $\varepsilon_k = 1$

Erniedrige k um einen Zähler und fahre mit der Matrix X' fort.

Als Ergebnis erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix

$$Y = \begin{pmatrix} \eta_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta_{nn} \end{pmatrix}.$$ Es gilt dann

$$d(X) = \eta_{11} \cdots \eta_{nn} \cdot \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \cdot d\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Korollar (des Algorithmus)

Angenommen, $d, d' : K^{n\times n} \to K$ sind zwei Determinantenfunktionen. Falls gilt

$$d\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = d'\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

so folgt $d = d'$ $\square$

#

Es bleibt zu zeigen, dass es überhaupt eine von Null verschiedene Determinantenfunktion gibt. Um so eine Funktion zu konstruieren, brauchen wir etwas Gruppentheorie

6. Das Signum (Vorzeichen) einer Permutation

<u>Erinnerung</u>: $\mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Sym}(\{1,2,\dots,n\})$ ist die Gruppe aller Permutationen (bijektiven Abbildungen) der Menge $\{1,\dots,n\}$. Die Gruppenverknüpfung ist die Komposition von Abbildungen.

Sei $\rho \in \mathrm{Sym}(n)$. Dann gilt

$$\prod_{1\le i<j\le n} (\rho(j)-\rho(i)) = \pm \prod_{1\le i<j\le n} (j-i) \quad \text{weil } \rho \text{ bijektiv ist.}$$

Wir definieren das <u>Signum</u> von ρ durch

$$\mathrm{sign}(\rho) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\rho(j)-\rho(i)}{j-i} \in \{\pm 1\}$$

<u>Beispiel</u> Sei $\tau_{12} \in \mathrm{Sym}(n)$ $(n \ge 2)$ die Permutation, die 1 und 2 vertauscht und alle anderen Zahlen fest lässt. Es folgt

$$\mathrm{sign}(\tau_{12}) = \frac{1-2}{2-1} \cdot \prod_{2<j\le n} \frac{\overset{j}{\overset{\shortparallel}{\tau_{12}(j)}} - \overset{2}{\overset{\shortparallel}{\tau_{12}(1)}}}{j-1} \cdot \frac{\overset{j}{\overset{\shortparallel}{\tau_{12}(j)}} - \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\tau_{12}(2)}}}{j-2}$$

$$\cdot \prod_{2<i<j\le n} \frac{\overset{j}{\overset{\shortparallel}{\tau_{12}(j)}} - \tau_{12}(i) = i}{j-i} = -1$$

Bezüglich der Multiplikation ist $\{\pm 1\}$ eine abelsche Gruppe, die wir mit C_2 bezeichnen (die "Vorzeichengruppe")

<u>Satz</u> Die Abbildung $\mathrm{sign}: \mathrm{Sym}(n) \to C_2$ ist ein Homomorphismus. Für $n \geq 2$ ist sie surjektiv.

<u>Beweis</u> Vorüberlegung: Für jedes $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ und $1 \leq i < j \leq n$ gilt $\dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ (*)

Für $\rho, \sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ folgt dann

$$\mathrm{sign}(\rho\circ\sigma) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\rho\circ\sigma(j) - \rho\circ\sigma(i)}{j-i}$$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\rho(\sigma(j)) - \rho(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\rho(\sigma(j)) - \rho(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \mathrm{sign}(\sigma)$$

$$\overset{(*)}{=} \mathrm{sign}(\rho)\cdot\mathrm{sign}(\sigma)$$

Wir haben schon gesehen, dass $\operatorname{sign}(\tau_{12}) = -1$, und natürlich gilt $\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1$. Also ist sign für $n \geq 2$ surjektiv. $\square$

<u>Definition</u> Der Kern von sign ist die <u>alternierende Gruppe</u> $\mathrm{Alt}(n) = \{\rho \in \mathrm{Sym}(n) \mid \operatorname{sign}(\rho) = 1\}$

Für $i \neq j$ sei $\tau_{ij} \in \mathrm{Sym}(n)$ die Permutation, die i und j vertauscht und alle anderen Zahlen fest lässt. Diese Permutation nennt man <u>Transposition</u>. Es gilt $\tau_{ij} = \tau_{ji} = \tau_{ij}^{-1}$, also $\tau_{ij}^2 = \mathrm{id}$

<u>Lemma</u> Sei $1 \leq i < j \leq n$. Dann gilt $\operatorname{sign}(\tau_{ij}) = -1$. Ist $\rho \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $\operatorname{sign}(\rho) = -1$, so gibt es genau ein $\sigma \in \mathrm{Alt}(n)$ mit $\sigma \tau_{ij} = \rho$

<u>Beweis</u> Sei $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$ die Permutation, die 1 und i sowie 2 und j vertauscht und die alle anderen Zahlen fest läßt.

Es folgt $\rho^{-1} \circ \tau_{12} \circ \rho = \tau_{ij}$, also

$$\mathrm{sign}(\tau_{ij}) = \mathrm{sign}(\rho^{-1}) \cdot \underbrace{\mathrm{sign}(\tau_{12})}_{=-1} \cdot \mathrm{sign}(\rho)$$

$$= - \mathrm{sign}(\rho^{-1})\,\mathrm{sign}(\rho) = - \mathrm{sign}(id) = -1$$

Die zweite Behauptung ist klar: $\sigma = \rho\,\tau_{ij}$ $\square$

7. Die Determinante

Wir definieren eine Abbildung

$$\det : K^{n\times n} \to K$$

durch $\det(X) = \sum\limits_{\rho \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sign}(\rho) \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_{\rho(i),i}$

$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ die Determinante

Satz Die Determinante ist eine Determinantenfunktion.

Beweis Wir müssen die Eigenschaften (L) und (A) aus §4.4 nachrechnen.

Zu (L): Sei $1 \le j \le n$, seien $x_1, \dots, x_n \in K^n$

$x_i = \begin{pmatrix} \xi_{1i} \\ \vdots \\ \xi_{ni} \end{pmatrix}$. Betrachte die Abbildung

$$x_j \longmapsto \det(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) =$$

$$\sum_{\rho \in \mathrm{Sym}(n)} a_\rho \cdot \xi_{\rho(j)j} \quad , \text{ mit}$$

$$a_\rho = \mathrm{sign}(\rho) \prod_{i \neq j} \xi_{\rho(i)i} \quad \in K$$

Diese Funktion $K^n \to K$ ist offensichtlich linear.

<u>zu (A):</u> Sei $1 \leq i < j \leq n$ und sei $x_i = x_j$, also $\xi_{ki} = \xi_{kj}$ für alle $k = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\det(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\rho \in \mathrm{Alt}(n)} \left(\prod_{k=1}^{n} \xi_{\rho(k)k} - \prod_{k=1}^{n} \xi_{\rho \circ \tau_{ij}(k), k)} \right)$$

$$= \sum_{\rho \in \mathrm{Alt}(n)} \left(\prod_{k \neq i,j} \xi_{\rho(k)k} \right) \left(\xi_{\rho(i)i} \cdot \xi_{\rho(j)j} - \xi_{\underbrace{\rho\tau_{ij}(i)}_{\rho(j)} i} \cdot \xi_{\underbrace{\rho\tau_{ij}(j)}_{\rho(i)} j} \right)$$

$$= 0$$

□

<u>Theorem A</u> Sei K ein Körper, $n \geq 2$. Dann ist $\det : K^{n \times n} \to K$ die eindeutig bestimmte Determinantenfunktion, für die gilt $\det(\mathbb{1}_n) = 1$

Für jede andere Determinantenfunktion $d: K^{n\times n} \to K$ gilt $d = \det \cdot a$ mit $a = d(\mathbb{1}_n)$.

<u>Beweis</u> Es gilt $\det(\mathbb{1}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i) i} = 1$,

$\mathbb{1}_n = (\delta_{ij})_{i,j=1..n}$ $\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ "Kronecker-δ"

Der Rest folgt aus dem Korollar in §4.5. Ist $d: K^{n\times n} \to K$ eine Determinantenfunktion, so setze $a = d(\mathbb{1}_n)$.
Für $a = 0$ folgt $d = 0$ (Nullabbildung) aus §4.5
Für $a \neq 0$ ist $d' = d \cdot a^{-1}$ eine Determinantenfunktion mit

$d'(\mathbb{1}) = 1$, also $d' = \det$ nach §4.5. $\square$

<u>Theorem B</u> Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

<u>Beweis</u> Setze $d(X) = \det(AX)$. Das ist eine Determinantenfunktion, denn:

$A(x_1, \dots x_n) = (Ax_1, \dots, Ax_n) \Rightarrow$ (L), (A) gelten.

Es gilt $d(\mathbb{1}_n) = \det(A \mathbb{1}_n) = \det(A)$, also

$$\underset{\det(AX)}{\underset{\shortparallel}{d(X)}} = \det(A) \cdot \det(X)$$

$\square$

Theorem 6 Für $A \in K^{n \times n}$ gilt $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist (d.h. wenn $A \in GL_n(K)$). Dann gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Beweis Angenommen, $A \in GL_n(K)$. Dann gilt $AA^{-1} = \mathbb{1}_n$, also $\det(\mathbb{1}_n) = 1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$, folglich $\det(A) \in K^*$ und $\det(A)^{-1} = \det(A^{-1})$. Angenom. $A \in K^{n \times n}$ ist nicht invertibar. Dann ist $\operatorname{rk}(A) = r < n$ nach §3.7 Korollar A. Nach §3.20 existieren $L, R \in GL_n(K)$ mit

$$LAR = P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \Big\} r$$

und $\det(P) = 0$ nach §4.3 (iii). Also

$$\underbrace{\det(L)}_{\neq 0} \cdot \det(A) \cdot \underbrace{\det(R)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \qquad \square$$

Korollar D Die Abbildung $\det : GL_n(K) \to K^*$ ist ein surjektiver Homomorphismus.
Der Kern ist die spezielle lineare Gruppe

$$SL_n(K) = \{ X \in K^{n \times n} \mid \det(X) = 1 \}$$

Beweis Es gilt $\det(X) \in K^*$ für $X \in GL_n(K)$ sowie $\det(XY) = \det(X) \cdot \det(Y)$, also ist $\det : GL_n(K) \to K^*$ ein Homomorphismus. Weiter gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = a \quad \text{nach } \S 4.5$$

also ist $\det$ surjektiv. $\square$

8. **Bemerkung** (a) Für $S \in GL_n(K)$ und $X \in K^{n \times n}$ gilt $\det(SXS^{-1}) = \det(S) \cdot \det(X) \cdot \det(S)^{-1} = \det(X)$, also ist $\det$ eine Invariante.

(b) Es gilt im Allgemeinen $\det(X+Y) \neq \det(X) + \det(Y)$

Bsp: $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \neq \det \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \Big) = 1$

(c) Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und ist $\mathcal{B} \subseteq V$ eine Basis, so setze für $\varphi \in \operatorname{End}(V)$

$$\det(\varphi) = \det\left({}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi)\right)$$

Nach (a) hängt diese Größe nicht von der gewählten Basis ab (genau wie $\operatorname{tr}(\varphi)$ in §4.2 nicht von der Basis abhing).

9. Explizite Formel in kleiner Dimension.

Für $n \leq 3$ ist die Formel aus §4.7 praktikabel:

$n = 2$

$$\det\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} = \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21}$$

vgl §3.17

$n = 3$

genau 3 Transpositionen!

$$\det\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix} = \xi_{11}\xi_{22}\xi_{33} + \xi_{12}\xi_{23}\xi_{31}$$

$$+ \xi_{13}\xi_{21}\xi_{32} - \xi_{11}\xi_{23}\xi_{32} - \xi_{13}\xi_{22}\xi_{31} - \xi_{33}\xi_{12}\xi_{21}$$

Regel von Sarrus (gilt nicht für $n \geq 4$!)

10. Die Cramersche Regel

Sei $a_1, \dots, a_n, x, y \in K^n$ $\quad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

Angenommen, es gilt $a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n = y$. Dann folgt

$$\det(a_1, \dots, a_{j-1}, \underset{j}{y}, a_{j+1}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_n)\,\xi_j$$

Satz (Cramersche Regel) Ist $A = (a_1, \dots, a_n) \in GL_n(K)$, $y \in K^n$ so gilt für die eindeutige Lösung x des LGS $A \cdot x = y$, $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, dass

$$\xi_j = \frac{\det(a_1, \dots, \overset{j}{y}, \dots a_n)}{\det(a_1, \dots, a_j, \dots a_n)}$$

$\square$

Für praktische Rechnung ist die Cramersche Regel nicht nützlich, denn die Berechnung von Determinanten ist zu aufwendig.

Sie hat aber theoretische Konsequenzen.

Setzt man $y = e_j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -j \\ \\ \\ \end{array}$ und $B = A^{-1}$

dann ergibt $Ax = e_j \rightsquigarrow x = \underbrace{B \cdot e_j}_{j\text{-te Spalte von } B}$

Über die Cramersche Regel lassen sich die Spalten von $B = A^{-1}$ also berechnen.

11. Die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$

Die Abbildung $\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich stetig (Formel in §4.7) und sogar differenzierbar. Also ist $GL_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(X) \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ offen. Die Abbildung

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) &\to GL_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\longmapsto A\cdot B \end{aligned}$$

ist ebenfalls stetig und diff'bar (klar).
Die Cramersche Regel zeigt zusätzlich, dass auch die Abbildung

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &\to GL_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

stetig und diff'bar ist.

Gruppen mit dieser Eigenschaft (Multiplikation und Inversion sind stetig und diff'bar) heißen <u>Lie-Gruppen</u> (→ Sophus Lie).
Sie spielen in vielen Teilen der Mathematik und Physik eine wichtige Rolle.

12. <u>Die transponierte Matrix</u> Sei $X \in K^{m\times n}$ mit Einträgen ξ_{ij}, $\begin{smallmatrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{smallmatrix}$. Die <u>transponierte Matrix</u> ist $X^T \in K^{n\times m}$ mit Einträgen

$$\xi^T_{ij} = \xi_{\underbrace{ji}_{\text{vertauscht}}}$$

<u>Satz</u> Es sei $X \in K^{n\times n}$. Dann gilt

$$\det(X^T) = \det(X).$$

<u>Bew.</u> Für jedes $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ gilt $\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma^{-1})$, weil $1^{-1} = 1$ und $(-1)^{-1} = (-1)$. Es folgt

$$\det(X^T) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \xi_{\sigma(i)i}$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \xi_{i,\sigma^{-1}(i)}$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sign}(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} \xi_{i,\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\xi_{i,\sigma(i)}}_{=\xi^T_{\sigma(i),i}}$$

$\square$

<u>Korollar</u> Die Rechenregeln aus § 4.4 gelten auch für <u>Zeilen</u> statt Spalten, d.h. Vertauschen von zwei Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante, etc. Außerdem gilt

$$\det(X) = \sum_{g \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sign}(g) \prod_{i=1}^{n} \xi_{i,g(i)}$$

In vielen Büchern zur Linearen Algebra findet man diese Formel und es werden Zeilen statt Spalten verändert – das ist also egal.

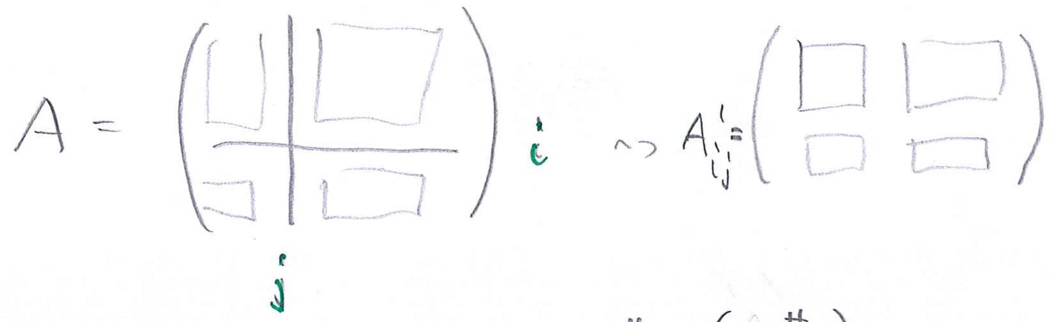
<u>Beweis</u> Die Zeilen von A^T sind die Spalten von A. $\square$

<u>Bemerkung</u>: Für $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times l}$ gilt $(AB)^T = B^T A^T$

(direkte Rechnung)

13. Die Komplementärmatrix

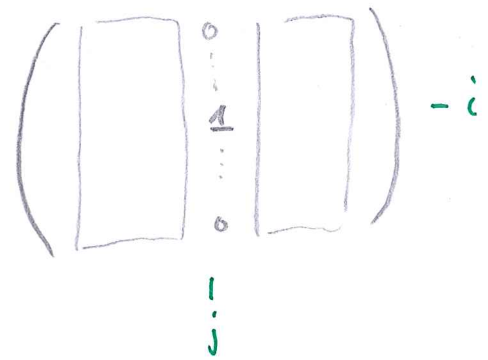
Für $A \in K^{n\times n}$ sei $A'_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht

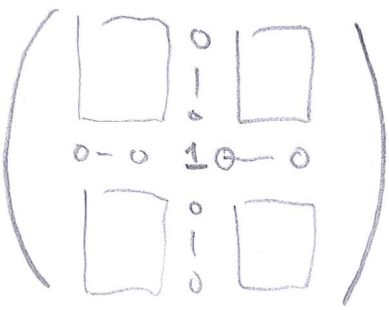
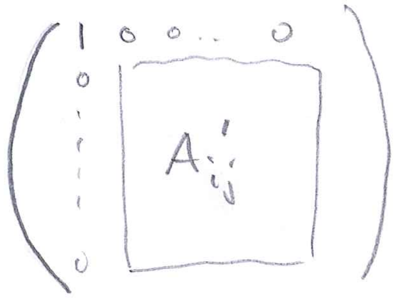


Wir definieren eine Matrix $A^{\#} = (\alpha^{\#}_{ij})_{i,j=1\ldots n}$

durch $\alpha^{\#}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'_{\underbrace{ji}})$ ← beachte Reihenfolge

Es gilt dann mit $A = (a_1, \ldots, a_n)$ $a_i \in K^n$

$\det(a_1, \ldots, \underset{j}{e_i}, \ldots a_n) = \det$ 

$\overset{\S 4.4.ii}{=} \det$  $\overset{(A)\ \S 4.12}{=} (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det$ 

$= \alpha^{\#}_{ji}$ nach § 4.4 (iv), bringe A'_{ij} auf Dreiecksform

Satz Für die Komplementärmatrix $A^\#$ zu A gilt

$$A\cdot A^\# = A^\#\cdot A = \det(A)\cdot \mathbb{1}_n$$

Beweis Der Eintrag an der Stelle (i,j) von $A^\#\cdot A$ ist gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^\#_{ik}\cdot\alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \det(a_1 \dots \overset{i}{e_k} \dots a_n)\cdot \alpha_{kj}$$

$$= \det\Big(a_1,\dots,\underset{i}{\sum_{k=1}^{n} e_k\alpha_{kj}},\dots a_n\Big) = \det(a_1,\dots,\underset{i}{a_j}\dots a_n)$$

$$= \begin{cases}\det(A) & \text{wenn } i=j\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \quad\rightsquigarrow\quad A^\# A = \det(A)\cdot \mathbb{1}_n$$

Wegen $(A^T)^\# = (A^\#)^T$ folgt

$$(A\cdot A^\#)^T = (A^\#)^T\cdot A^T = (A^T)^\# A^T = \det(A^T)\cdot \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow A A^\# = \det(A)$$

□

Korollar Wenn $A\in K^{n\times n}$ invertierbar ist, so gilt

$$A^{-1} = \det(A)^{-1}A^\#$$

□

<u>Bsp</u> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\#} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Probe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Schnelles Invertieren von 2×2-Matrizen.

<u>Korollar</u> (Laplace-Entwicklung)

Sei $X \in K^{n\times n}$ sei $1 \leq i \leq n$. Dann gilt

$$\det(X) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, \xi_{ij} \det(X_{ij}')$$

<u>Beweis</u> $\det(X) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\, \xi^{\#}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \xi_{ij} \det(X_{ij}')$

□

Eine entsprechende Formel gilt für Spalten.

<u>Beispiel</u>

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Sarrus

$= 1\cdot(4\cdot 1\cdot 8 - 4\cdot 1\cdot 7 - 1\cdot 1\cdot 6) - 2(3\cdot 1\cdot 8 + 1\cdot 1\cdot 7 - 1\cdot 1\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot 7)$

$= -2 - 2\cdot 5 = -12$

14. Eigenwert, Eigenraum, Eigenvektoren

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, sei $\lambda \in K$. Wir setzen

$$\mathrm{Eig}(\varphi,\lambda) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\} = \ker(\varphi - \mathrm{id}\cdot\lambda) \subseteq V$$

Wenn gilt $\mathrm{Eig}(\varphi,\lambda) \neq \{0\}$, dann heißt λ <u>Eigenwert</u> von φ und $\mathrm{Eig}(\varphi,\lambda)$ heißt dann <u>Eigenraum</u> von φ zum Eigenwert λ.

Die Vektoren $v \in V$ mit

(i) $v \neq 0$

(ii) $\varphi(v) = v\lambda$

heißen <u>Eigenvektoren</u> zum Eigenwert λ.

<u>Lemma</u> Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, sei $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent: (i) λ ist Eigenwert von φ

(ii) $\det(\varphi - \mathrm{id}\cdot\lambda) = 0$

Beweis: Klar nach §4.7 Thm (ii). $\square$ #

<u>Bem</u> Es gilt: φ ist injektiv genau dann, wenn 0 kein Eigenwert von φ ist.

Ganz entsprechend definieren wir für eine Matrix $X \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$

$$\mathrm{Eig}(X,\lambda) = \{ v \in K^n \mid Xv = v\lambda \} = \{ v \in K^n \mid (X - \mathbb{1}_n \cdot \lambda) v = 0 \}$$

sowie Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume von X.

Die Menge aller Eigenwerte ist das <u>Spektrum</u> von φ (bzw X)

$$\mathrm{Spec}(\varphi) = \{ \lambda \in K \mid \mathrm{Eig}(\varphi,\lambda) \neq \{0\} \},$$
$$\mathrm{Spec}(X) = \{ \lambda \in K \mid \mathrm{Eig}(X,\lambda) \neq \{0\} \}$$

15. <u>Beispiele</u>

(a) K Körper, $V = K^2$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(X - \mathbb{1}_2 \cdot \lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

also $\mathrm{Spec}(X) = \{ \lambda \in K \mid \lambda^2 = -1 \}$

Das hängt offensichtlich sehr von K ab:

$K = \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(X) = \emptyset$

$K = \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(X) = \{ \pm i \}$ $\quad i^2 = -1$ vgl § 1.10

$K = \mathbb{F}_2 \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(X) = \{ 1 \}$ $\quad 1 = -1$ vgl § 1.9

(b) $K = \mathbb{R}$, $V = C^\infty(0,1) = \{ f : (0,1) \to \mathbb{R} \mid$
f beliebig oft diff'bar $\}$

Das ist ein reeller Vektorraum (Analysis 14.7)

Definiere $D : C^\infty(0,1) \to C^\infty(0,1)$ durch
$Df = \frac{df}{dt} = f'$. Das ist eine lineare
Abbildung,
$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g'$$
$$D(f \cdot \lambda) = (f \cdot \lambda)' = f' \cdot \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sei $f_\lambda(t) = \exp(\lambda t) \rightsquigarrow f_\lambda' = f_\lambda \cdot \lambda$. also
gilt $\mathrm{Spec}(D) = \mathbb{R}$ (!)

Allerdings ist $C^\infty(0,1)$ unendlich dimensional.
Wir werden sehen, dass für endlich dimensionale
Vektorräume gilt
$$\# \mathrm{Spec}(\varphi) \leq \dim(V)$$

Ziel: Untersuche $\det(\mathrm{id} \cdot \lambda - \varphi)$ in
Abhängigkeit von $\lambda \in K$. Dazu brauchen
wir Polynome

16. <u>Def</u> Sei R ein kommutativer Ring, sei $T \notin R$. Sei $R[T]$ die Menge aller Folgen $p: \mathbb{N} \to R$, bei denen nur endlich viele Einträge $p_j \neq 0$ sind. Zu jeder solchen Folge p gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$p = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_m, \underbrace{0, 0, \dots}_{\text{ab hier nur noch Nullen.}})$$

Schreibe formal $p = p_0 + p_1 \cdot T + p_2 \cdot T^2 + \dots + p_m T^m$

Wir definieren zwei Verknüpfungen auf $R[T]$ durch

$$p + q = r \qquad r_i = p_i + q_i$$

$$p \cdot q = s \qquad s_i = \sum_{j=0}^{i} p_j \cdot q_{i-j}$$

d.h.

$$(p_0 + p_1 T + \dots + p_m T^m) + (q_0 + q_1 T + \dots + q_n T^n)$$

$$= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) T + (p_2 + q_2) T^2 + \dots$$

$$(p_0+p_1T+\dots+p_mT^m)\cdot(q_0+\dots+q_nT^n) =$$

$$p_0q_0 + (p_0q_1+p_1q_0)T + (p_0q_2+p_1q_1+p_2q_0)T^2 + \dots$$

Mit diesen beiden Verknüpfungen wird $R[T]$ ein kommutativer Ring, der *Polynomring* über R in der *Variablen* T.

Die Elemente von $R[T]$ heißen *Polynome* in T, die Folgeglieder p_i heißen *Koeffizienten* des Polynoms p.

Das Einselement von $R[T]$ ist $1 \in R[T]$ (entspricht der Folge $(1,0,0,\dots)$), das Nullelement ist die Nullfolge $(0,0,\dots)$.

Wenn wir $\lambda \in R$ identifizieren mit der Folge $(\lambda,0,0,\dots) \in R[T]$, so wird R ein Teilring von $R[T]$.

Dem Polynom T^k entspricht die Folge

$$(0,\dots,0,\underset{k}{1},0,\dots)$$

Exkurs Warum haben wir ein Polynom nicht (wie in der Analysis) als eine Abbildung

$$\lambda \mapsto p_0 + p_1\lambda + \dots + p_m \lambda^m \quad , \quad R \to R$$

definiert?

Weil z.B. über dem Körper $\mathbb{F}_2$ gilt

$$\lambda \mapsto \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{F}_2$$

d.h. das Polynom $T + T^2$ beschreibt über $\mathbb{F}_2$ die Nullabbildung, obwohl die Koeffizienten nicht Null sind. Das wäre im Folgenden ungünstig.

Zurück zu den Polynomen. Der Grad eines Polynoms $p \neq 0$ ist $\deg(p) = \max\{k \mid p_k \neq 0\}$, setze $\deg(0) = -\infty$. Mit unserer Konvention gilt: $\deg(p) \leq 0 \iff p = \lambda \in R$

Offensichtlich gilt also genau für $p, q \in R[T]$, dass

$$\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$$

$$\deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$$

Ein Polynom p vom Grad $\deg(p) = m \geq 0$ heißt <u>normiert</u>, wenn gilt $p_m = 1$, also

$$p = p_0 + p_1 T + \ldots + T^m$$

17. <u>Nullstellen von Polynomen und der Einsetzungshomomorphismus</u>.

Sei $\lambda \in R$. Wir definieren eine Abbildung

$$ev_\lambda : R[T] \to R$$

durch

$$ev_\lambda(p) = p_0 + p_1 \lambda + \ldots + p_m \lambda^m = p(\lambda)$$

den <u>Einsetzungshomomorphismus</u> #

<u>Satz</u> Für jedes $\lambda \in R$ ist ev_λ ein Ringhomomorphismus, d.h.

$$ev_\lambda(1) = 1$$

$$ev_\lambda(p+q) = ev_\lambda(p) + ev_\lambda(q)$$

$$ev_\lambda(p \cdot q) = ev_\lambda(p) \cdot ev_\lambda(q)$$

<u>Beweis</u> Das ist klar, so wie $+$ und $\cdot$ in $R[T]$ definiert sind. $\square$

Ein Element $\lambda \in R$ heißt <u>Nullstelle</u> von $p \in R[T]$, wenn gilt $ev_\lambda(p) = p(\lambda) = 0$.

Anders gesagt: λ ist Nullstelle von p
$\iff p \in \ker(ev_\lambda)$.

<u>Beobachtung</u>: Ist λ Nullstelle von $p \in R[T]$ und ist $q \in R[T]$ beliebig, so gilt $(p \cdot q)(\lambda) = p(\lambda) \cdot q(\lambda) = 0$

18. <u>Das charakteristische Polynom einer Matrix</u>

Sei $X \in K^{n \times n}$ mit Einträgen $\xi_{ij} \in K$, $n \geq 1$

Setze $r_{ij} = \begin{cases} -\xi_{ij} & \text{wenn } i \neq j \\ T - \xi_{ii} & \text{wenn } i = j \end{cases}$ $\quad r_{ij} \in K[T]$

Das <u>charakteristische Polynom</u> von X ist

$$\chi_X = \sum_{\sigma \in Sym(n)} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} r_{\sigma(i),i} \quad \in K[T]$$

Offensichtlich gilt für jedes $\lambda \in K$

$$\chi_X(\lambda) = \det(\mathbb{1}_n \cdot \lambda - X)$$

Satz Die Eigenwerte von $X \in K^{n\times n}$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_X.

Beweis Es gilt $\chi_X(\lambda) = 0 \iff \det(\mathbb{1}\lambda - X) = 0$
$\iff \mathrm{rk}(\mathbb{1}\lambda - X) < n \iff$ es gibt $v \in K^n$, $v \neq 0$ mit $Xv = v\cdot\lambda$ $\square$

Die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms ist im allgemeinen schwierig. Für Polynome von Grad 2 gibt es die "Mitternachtsformel" / "pq-Formel", für Polynome von Grad 3 und 4 gibt es die sogenannten Cardanischen Formeln (Cardano 16 Jhd).

Für Grad ≥ 5 gibt es aus mathematischen Gründen keine allgemeine Lösungsformel (Galois, 19 Jhd).

→ Einführung in die Algebra

Für $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ kann man Nullstellen numerisch sehr genau bestimmen (näherungsweise!)