§ 6. Symmetrische Bilinearformen und Orthogonalität

Voraussetzung in diesem Kapitel: K ist ein Körper, in dem gilt $2 = 1+1 \neq 0$, z.B. $K = \mathbb{R}$.

1. Def Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $h : V \times V \to K$ heißt Bilinearform, wenn für alle $u, v, w \in V$ und $a \in K$ gilt

$$h(u, v+w) = h(u,v) + h(u,w)$$
$$h(u+v, w) = h(u,w) + h(v,w)$$
$$h(ua, v) = a\,h(u,v) = h(u, va)$$

Eine Bilinearform h heißt symmetrisch, wenn für alle $u, v \in V$ gilt $h(u,v) = h(v,u)$.

Beispiele (a) $V = K^n$, $X \in K^{n \times n}$

$$h(u,v) = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} u_i \xi_{ij} v_j$$

ist Bilinearform. Sie ist symmetrisch genau dann, wenn für alle i,j gilt $\xi_{ij} = \xi_{ji}$, d.h. genau dann, wenn $X^T = X$ gilt.

X^T transponierte Matrix, vgl. § 4.12.

(b) $V = C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$h(f,g) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ ist symmetrische Bilinearform.

2. <u>Definition</u> Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, sei $h : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Die <u>Gram-Matrix</u> (J.P. Gram, dänischer Mathematiker) von h bezüglich B ist $G_B(h) = (\gamma_{ij})_{i,j=1 \dots n}$

$$\gamma_{ij} = h(b_i, b_j)$$

Die Gram-Matrix bestimmt h eindeutig, denn: $u = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i \quad v = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$

$$\Rightarrow h(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} h(b_i u_i, b_j v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i \gamma_{ij} v_j$$

h Bilinearform

Umgekehrt existiert zu jeder Matrix $X \in K^{n \times n}$ eine Bilinearform h mit $G_B(h) = X$, nämlich

$$h(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i \xi_{ij} v_j$$

<u>Lemma</u> Ist $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ eine andere Basis von V, so gilt

$$G_C(h) = S^T G_B(h) S \qquad G_B(h) = (r_{ij})_{i,j=1\dots n}$$

mit $S = {}_B M_C(\mathrm{id}_V)$

<u>Beweis</u> $u = \sum_{i=1}^n b_i u_i = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{u}_i \quad \leadsto \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}$

$$v = \sum_{j=1}^n b_j v_j = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{v}_j \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$$

$$h(u,v) = \sum_{i,j=1}^n u_i r_{ij} v_j = (u_1 \dots u_n)\, G_B(h) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(S \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} \right)^T G_B(h)\, S \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$$

$$= (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)\, S^T G_B(h) S \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} \qquad \square$$

3. <u>Satz</u> Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des K-Vektorraums V, sei $h: V \times V \to K$ eine Bilinearform. Dann sind äquivalent:

(i) h ist symmetrisch, d.h. $h(u,v) = h(v,u)$ für alle $u, v \in V$

(ii) $G_B(h)$ ist symmetrisch, d.h. $G_B(h)^T = G_B(h)$

<u>Bew.</u> Setze $r_{ij} = h(b_i, b_j)$, $G_B(h) = (r_{ij})_{i,j=1\dots n}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $h(b_i, b_j) = h(b_j, b_i) \Rightarrow r_{ij} = r_{ji}$ für alle i,j also $G_B(h)^T = G_B(h)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $u = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i$ $\quad v = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$

$$h(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i r_{ij} v_j = \sum_{i,j=1}^{n} u_i r_{ji} v_j = \sum_{i,j=1}^{n} v_j r_{ji} u_i$$

$$= h(v,u) \qquad \square$$

#

4. Orthogonalität

Sei $h: V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, sei $u, v \in V$. Wir nennen u und v orthogonal (rechtwinklig), wenn gilt $h(u,v)$ und schreiben
senkrecht

$$u \perp_h v = u \perp v$$

Ist $P \subseteq V$ eine Teilmenge, so ist

$$P^{\perp_h} = P^{\perp} = \{ z \in V \mid h(z,v) = 0 \text{ für alle } v \in P \}$$

sowie $w^{\perp} = \{ z \in V \mid h(z,w) = 0 \}$ für $w \in V$.

Bsp $V^{\perp} = \{ z \in V \mid h(z,v) = 0 \text{ für alle } v \in V \}$ ist das Radikal von V.

$$0^{\perp} = \{ z \in V \mid h(0,z) = 0 \} = V$$

Lemma Für jede Teilm. $P \subseteq V$ ist $P^{\perp}$ ein Unterraum von P.

Beweis Sei $u, v \in P^{\perp}$, $a \in K$. Dann gilt für alle $w \in P$, dass

$$h(u+va, w) = \underbrace{h(u,w)}_{=0} + \underbrace{h(v,w)}_{=0} a = 0$$

also $u+v\alpha \in P^\perp$. Weiter gilt $0 \in P^\perp$, damit ist $P^\perp$ ein Unterraum. □

Insbesondere ist das Radikal $V^\perp$ ein Unterraum. Wir nennen h <u>nicht ausgeartet</u>, wenn gilt $V^\perp = \{0\}$, d.h. wenn es zu jedem $v \neq 0$ ein u gibt mit $h(u,v) \neq 0$.

5. <u>Lemma</u> Sei h eine symmetrische Bilinearform. Wenn h nicht die Nullabbildung ist, gibt es $w \in V$ mit

$$h(w,w) \neq 0.$$

<u>Beweis</u> Nach Voraussetzung gibt es $u,v \in V$ mit $h(u,v) \neq 0$. Es gilt

$$2 \cdot h(u,v) + h(v,v) + h(u,u) = h(u+v,u+v)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot h(u,v) = h(u+v,u+v) - h(u,u) - h(v,v) \neq 0$$

Mindestens einer der Vektoren $u, v, u+v$ hat also die gewünschte Eigenschaft. □

Hier haben wir (zum erst Mal) $2 \neq 0$ benutzt.

<u>Def</u> Sei V endlich dimensional und sei h eine symmetrische Bilinearform. Eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ heißt <u>Orthogonalbasis</u>, wenn für alle $i \neq j$ gilt $h(b_i, b_j) = 0$, d.h. wenn

$$G_B(h) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} \qquad \delta_1, \dots, \delta_n \in K$$

<u>Satz</u> Wenn gilt $\dim V = n \geq 1$, so gibt es zu h eine Orthogonalbasis.

<u>Beweis</u> Induktion nach n.

$n = 1 \rightsquigarrow$ keine Bedingung, Behauptung gilt.

Sei jetzt $n > 1$, die Behauptung gelte in kleineren Dimensionen.

<u>1. Fall</u> $h = 0$ Nullabbildung $\rightsquigarrow$ <u>jede</u> Basis ist Orthogonalbasis, fertig

<u>2. Fall</u> $h \neq 0$, dann gibt es $w \in V$ mit $h(w, w) = \delta \neq 0$. Setze $W = w^\perp$.

Es folgt $wK \cap W^\perp = \{0\}$, denn $w \notin w^\perp$ (weil $h(w,w) \neq 0$)

Für jedes $v \in V$ gilt

$$v = \underbrace{w \cdot \delta^{-1} \cdot h(w,v)}_{\in wK} + \underbrace{(v - w \cdot \delta^{-1} h(w,v))}_{\in W = w^\perp}$$

denn $h(w, v - w \cdot \delta^{-1} h(w,v)) = h(w,v) - \underbrace{h(w,w)\delta^{-1}}_{=1} h(w,v)$
$= 0$

$\Rightarrow V = wK \oplus W$. Nach Induktionsannahme hat W eine Orthogonalbasis $\{b_2, b_3, \dots, b_n\}$.

Setze $b_1 = w$. $\square$

<u>Korollar</u> Sei $X \in K^{n \times n}$ symmetrisch, $X = X^T$. Dann gibt es $S \in GL_n(K)$ mit

$$S^T X S = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}$$

$\square$

6. <u>Satz</u> Sei h symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen K-Vektorraum V, sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthogonalbasis. Sei $J = \{i \mid h(b_i, b_i) = 0\}$
$\subseteq \{1, \dots, n\}$

Dann gilt

$$V^{\perp} = \langle \{ b_j \mid j \in J \} \rangle$$

Beweis Sei $W = \langle \{ b_j \mid j \in J \} \rangle$. Für $w \in W$ $v \in W$ gilt $h(v,w) = h(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j)$

$= \sum_{j \in J} v_j h(b_j, b_j) w_j = 0$, also $W \subseteq V^{\perp}$.

Sei $v \in V - W \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ $v_k \neq 0$ für ein $k \in \{1,\dots,n\} - J \Rightarrow h(v, b_k) = h(b_k, b_k) v_k \neq 0$

$\Rightarrow v \notin V^{\perp}$ also $V^{\perp} \subseteq W$ $\square$

Korollar Sei h symmetrische Bilinearform auf V, sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis. Dann ist h genau dann nicht ausgeartet, wenn gilt $\det(G_B(h)) \neq 0$.

Beweis Nach dem vorig. Satz ist das richtig, wenn B eine Orthogonalbasis ist. Im allgemeinen gibt es $S \in GL_n(K)$ mit

$$S^T G_B(h) S = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}$$

nach § 6.5 und $\delta_1 \cdots \delta_n = \det(S^T) \cdot \det(G_B(h)) \det(S)$

$= \underbrace{\det(S)^2}_{\neq 0} \det(G_B(h)) \neq 0$

gilt genau dann, wenn h nicht ausgeartet ist. □

7. Die orthogonale Gruppe

Sei h eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Die <u>orthogonale Gruppe</u> von h ist

$$O(h) = \left\{ \varphi \in GL(V) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{für alle } u,v \in V \text{ gilt} \\ h(u,v) = h(\varphi(u),\varphi(v)) \end{array} \right\}$$

Das ist wirklich eine Gruppe, denn:

$id_V \in O(h)$ (klar)

$\psi, \varphi \in O(h)$ $\quad u,v \in V$ $\quad$ wähle $\tilde{u}, \tilde{v}$ mit $\varphi(\tilde{u}) = u$ $\quad \varphi(\tilde{v}) = v$

$$h(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = h(\tilde{u}, \tilde{v}) = h(u,v)$$

$$h(\varphi \circ \psi(u), \varphi \circ \psi(v)) = h(\psi(u), \psi(v)) = h(u,v)$$ □

Das lässt sich auch für Matrizen formulieren: sei $G = (r_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrisch, $G^T = G$ mit $\det(G) \neq 0$. Dann ist

$$h : K^n \times K^n \to K, \quad (u,v) \mapsto u^T G v$$

sym. Bilinearform, nicht ausgeartet

Für $A \in GL_n(K)$ gilt

$A \in O(h) \Leftrightarrow$ für alle $u, v \in K^n$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} (Au)^T G A v = u^T G v \\ \quad \| \\ u^T A^T G A v \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \S 6.2}}{\Leftrightarrow} A^T G A = G$$

also $O(h) = \{ A \in GL_n(K) \mid A^T G A = G \}$

Wichtiger Spezialfall: $G = \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow h(u,v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u^T v$ "<u>Standard-Skalarprodukt</u>" auf K^n

Die zugehörige orthogonale Gruppe heißt

$$O(n) = \{ A \in GL_n(K) \mid A^T A = \mathbb{1} \}$$
$$= \{ A \in GL_n(K) \mid A^{-1} = A^T \}$$

Beachte: $A = (v_1, \dots, v_n)$ $\quad v_i \in K^n$ Spaltenvektoren

dann gilt: $A \in O(n) \Leftrightarrow A^T A = \mathbb{1}$

$$\Leftrightarrow v_i^T \cdot v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Bemerkung</u> Auch für eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform h kann es Vektoren $v \neq 0$ geben mit $h(v,v) = 0$.

<u>Beispiel</u> $V = K^2$ $h(u,v) = u_1 v_1 - u_2 v_2$

$$h\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 1^2 - 1^2 = 0$$

Solche Vektoren heißen <u>isotrop</u> (bezüglich h).

Wir spezialisieren jetzt auf den Fall $K = \mathbb{R}$.

8. <u>Definition</u> Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $h: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann heißt h <u>positiv definit</u>, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt $h(v,v) > 0$. Wenn für alle $v \in V - \{0\}$ gilt $h(v,v) < 0$ heißt h <u>negativ definit</u>.
Solche Bilinearformen sind also nicht ausgeartet.
<u>Beachte</u> Es gibt sym. Bilinearformen, die weder positiv noch negativ definit sind.

Eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ heißt <u>Orthonormalbasis</u>, wenn für alle i,j gilt

$$h(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Orthonormalbasen sind nützlich. Zum Beispiel gilt dann für $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot h(b_i, v) \quad , \text{denn: } v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

$$\Rightarrow \quad h(b_j, v) = v_j$$

<u>Lemma</u> Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis für h. Dann ist h positiv definit.

<u>Beweis</u> Sei $v \in V - \{0\}$, $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \Rightarrow$

$$h(v,v) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 > 0 \qquad \square$$

9\. <u>Algorithmus</u> (Das Gram-Schmidt-Verfahren)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $\{c_1, \ldots, c_n\}$ eine Basis von V, sei h eine positiv definite symmetrische Bilinearform.

Setze $b_1 = c_1$, $\delta_1 = \sqrt{h(b_1, b_1)}$, $\hat{b}_1 = b_1 \cdot \delta_1^{-1}$

[Dann gilt $h(\hat{b}_1, \hat{b}_1) = 1$]

$$b_2 = c_2 - \hat{b}_1 \cdot h(\hat{b}_1, c_2) \qquad \delta_2 = \sqrt{h(b_2, b_2)}$$

[Dann gilt $b_2 \perp \hat{b}_1$]

$\hat{b}_2 = b_2 \cdot \delta_2^{-1}$ [Dann $h(\hat{b}_2, \hat{b}_2) = 1$]

$b_3 = c_3 - \hat{b}_1 \cdot h(\hat{b}_1, c_3) - \hat{b}_2 \cdot h(\hat{b}_2, c_3)$

$\delta_3 = \sqrt{h(b_3, b_3)}$ $\quad \hat{b}_3 = b_3 \cdot \delta_3^{-1}$

$\vdots$

$b_n = c_n - \hat{b}_1 \cdot h(\hat{b}_1, c_n) - \dots - \hat{b}_{n-1} \cdot h(\hat{b}_{n-1}, c_n)$

$\delta_n = \sqrt{h(b_n, b_n)}$ $\quad \hat{b}_n = b_n \delta_n^{-1}$

Dann ist $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n$ eine Orthonormalbasis von V, denn: $h(\hat{b}_i, \hat{b}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und $\langle \{\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n\} \rangle = \langle \{b_1, \dots, b_n\} \rangle = \langle \{c_1, \dots, c_n\} \rangle = V$

□

10. Korollar (Iwasawa-Zerlegung / QR-Zerlegung)

Sei $X \in GL_n \mathbb{R}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Matrizen $Q \in O(n)$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

$\alpha_i > 0$ für alle i, $N = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

mit $X = QAN = QR$ $\quad (R = AN)$

<u>Beweis</u> <u>Existenz</u> von Q, A, N

Schreibe $X = (c_1, \dots, c_n)$ $c_i \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektor

Wende das Gram-Schmidt-Verfahren an

$$b_j = c_j - \sum_{i=1}^{j-1} c_i \varrho_{ij} \Rightarrow (b_1, \dots, b_n) = (c_1 \dots c_n)\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n) = (c_1, \dots, c_n)\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$\delta_i := \sqrt{h(b_i, b_i)} > 0$

$$\Rightarrow X = Q \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{= N}$$

$$\boxed{\text{Denn } c_j = b_j + \sum_{i=1}^{j-1} c_i \varrho_{ij} = b_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_i \sigma_{ij} \quad \text{für geeignete } \sigma_{ij} \in \mathbb{R}}$$

<u>Eindeutigkeit</u> von Q, A, N. Angenommen

$QAN = \tilde{Q}\tilde{A}\tilde{N}$ wie oben $\Rightarrow$

$$\underbrace{Q^{-1}\tilde{Q}}_{\in O(n)} = \underbrace{A N \tilde{N}^{-1} \tilde{A}^{-1}}_{= \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}}$$

Aus $Q^{-1}\tilde{Q} \in O(n)$ folgt

$(Q^{-1}\tilde{Q})^T = (Q^{-1}\tilde{Q})^{-1}$, also

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

damit $Q^{-1}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon_i = \pm 1$

Rechte Seite:

$$A N \tilde{N}^{-1} \tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \tilde{\alpha}_1^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \tilde{\alpha}_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_i = \alpha_i \tilde{\alpha}_i^{-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 1$

$\Rightarrow \quad Q^{-1}\tilde{Q} = \mathbb{1}_n \quad \Rightarrow \quad \alpha_i \tilde{\alpha}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \tilde{A}$

$\Rightarrow \quad N = \tilde{N}$ $\qquad \square$ #

Beachte: der Existenzbeweis benutzt Gram-Schmidt und ist konstruktiv.

11. Theorem (Sylvesters Trägheitssatz)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei h eine symmetrische Bilinearform. Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthogonalbasis von V,

sei
$$m_+ = \#\{i \mid \delta_i > 0\} \qquad \delta_i := h(b_i, b_i)$$
$$m_- = \#\{i \mid \delta_i < 0\}$$
$$m_0 = \#\{i \mid \delta_i = 0\}$$

(also $n = m_+ + m_0 + m_-$)

Dann gilt
$$m_+ = \max\{k \mid U \subseteq V \text{ } k\text{-dim. Unterraum und } h \text{ positiv definit auf } U\}$$
$$m_- = \max\{k \mid U \subseteq V \text{ } k\text{-dim Unterraum und } h \text{ negativ definit auf } U\}$$
$$m_0 = \dim(V^\perp)$$

Beweis Sei
$$W_+ = \langle\{b_i \mid \delta_i > 0\}\rangle$$
$$W_- = \langle\{b_i \mid \delta_i < 0\}\rangle$$
$$W_0 = V^\perp = \langle\{b_i \mid \delta_i = 0\}\rangle \text{ vgl §6.6.}$$

$V = W_+ \oplus W_0 \oplus W_-$, für jeden Vektor $v \in W_0 \oplus W_-$ gilt $h(v,v) \leq 0$. Ist also $U \subseteq V$ Unterraum, h positiv definit auf U, so folgt $U \cap (W_0 \oplus W_-) = \{0\}$ $\Rightarrow$

$$\dim(U) \leq n - (m_0 + m_-) = m_+$$

Andererseits ist h positiv definit auf W_+, vgl. § 6.8. Damit folgt die Behauptung über m_+. Der Beweis für m_- geht genauso $\square$ #

Korollar Das Tripel (m_+, m_0, m_-) hängt nur von h ab, nicht von der gewählten Orthogonalbasis. Man nennt (m_+, m_0, m_-) die Signatur von h.

Der Satz § 6.5 über die Existenz einer Orthogonalbasis lässt sich für $K = \mathbb{R}$ verstärken.

12. Theorem (über Hauptachsentransformationen)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $n \geq 1$. Seien g und h symmetrische Bilinearformen auf V und sei g positiv definit. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V bezüglich g, die gleichzeitig eine Orthogonalbasis für h ist.

Beweis Induktion nach $n \geq 1$.

$n=1$: Wähle $v \in V - \{0\}$ $\quad \delta = \sqrt{g(v,v)} > 0$, $b_1 = v\delta^{-1}$ fertig. $\square$

Induktionsschritt Wir nehmen an, die Behauptung gilt in kleinerer Dimension.

1) Setze $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$ Einheitssphäre. Nach dem Satz von Heine-Borel ist S kompakt. Sei $\{c_1, \dots, c_n\}$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich g. Die Abbildung

$$q: S \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto v = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \longmapsto h(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i h(c_i, c_j) x_j$$

ist stetig. Da S kompakt ist, nimmt sie in einem Punkt $y \in S$ ein Maximum an. Setze $b_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \in V$ sowie $W = b_1^{\perp g} = \{w \in V \mid g(b_1, w) = 0\}$

2) Beh: Für alle $w \in W$ gilt $h(b_1, w) = 0$

Beweis. Sei $w \in W - \{0\}$. Setze $\hat{w} = w \cdot \delta^{-1}$ mit $\delta = \sqrt{g(w,w)} > 0$. Schreibe

$\hat{w} = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$. Es folgt $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in S$

weil $g(\hat{w}, \hat{w}) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 1$.

Definiere $c : \mathbb{R} \to V$ durch

$$c(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i (y_i \cdot \cos(t) + z_i \cdot \sin(t)) = b_1 \cdot \cos(t) + \hat{w} \cdot \sin(t)$$

Wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$ folgt $y \cdot \cos(t) + z \cdot \sin(t) \in S$

Betrachte
$$\begin{aligned}\beta(t) &= h(c(t), c(t)) \\ &= h(b_1, b_1)\cos^2(t) + h(\hat{w}, \hat{w})\sin^2(t) \\ &\quad + 2h(b_1, \hat{w})\sin(t)\cdot\cos(t)\end{aligned}$$

Die Funktion β hat in $t = 0$ ein Extremum, denn $\beta(0) = q(b_1)$. Also verschwindet dort die Ableitung $\dot{\beta}(0) = 0 \implies$

$$\dot{\beta}(0) = 2 \cdot h(b_1, \hat{w}) = 0$$ $\square$

3) Nach Induktionsannahme gibt es eine Basis $b_2, \ldots, b_n$ von W mit

$$g(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$h(b_i, b_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

Nach 2) gilt $g(b_1, b_i) = 0 = h(b_1, b_i)$

für $i = 2, 3, \ldots, n$ $\square$

#

13. Korollar (Spektralsatz) Sei $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gibt es $A \in O(n)$ mit

$$A^T X A = A^{-1} X A = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} \qquad \delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}$$

Insbesondere gibt es eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ (bezüglich $g(x,y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ "Standard-Skalarprodukt"), die aus Eigenvektoren des Endomorphismus

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad v \longmapsto Av$$

besteht. Die Eigenwerte von X sind also $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Beweis Setze $h(x,y) = x^T X y$ und $g(x,y) = x^T y$. Nach Theorem §6.12 gibt es eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich g, die eine Orthogonalbasis bezüglich h ist. Setze

! $A = {}_{B_n}M_B(id) = (b_1, \dots, b_n) \in O(n)$ $\quad B_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis

$A^{-1} = {}_{B}M_{B_n}(id) = A^T$

und
$$A^{-1} X A = A^T X A = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}$$

□

14. <u>Definition</u> Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.
Wir schreiben $P \geq 0$, wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $v^T P v \geq 0$. Nach dem Spektralsatz und dem Trägheitssatz gilt $P \geq 0$ genau dann, wenn P symmetrisch ist und keine negativen Eigenwerte hat.

<u>Lemma</u> Angenommen, es gilt $P \geq 0$. Dann gibt es genau ein $Q \geq 0$ mit $Q^2 = P$.

<u>Beweis</u> <u>Existenz.</u> Nach dem Spektralsatz existiert $A \in O(n)$ mit $A^T P A = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} = D$, $\delta_i \geq 0$
also $P = ADA^T$. Setze $E = \begin{pmatrix} \sqrt{\delta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\delta_n} \end{pmatrix}$, es folgt für $Q = AEA^T$, dass $Q^T = Q$ und $Q \geq 0$, sowie $Q^2 = AEA^TAEA^T = AE^2A^T = ADA = P$.

<u>Eindeutigkeit</u> Angenommen, $\tilde{Q} \geq 0$ mit $\tilde{Q}^2 = P$. Nach dem Spektralsatz gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von $\tilde{Q}$. Jeder Eigenvektor von $\tilde{Q}$ ist auch Eigenvektor von $P = \tilde{Q}^2$ und damit auch Eigenvektor von Q, also

$$\tilde{Q} v = v\lambda \Rightarrow Pv = v\lambda^2 \Rightarrow Qv = v\sqrt{\lambda^2} = v\lambda$$

Da die Eigenvektoren $\underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{von } \tilde{Q}}$ erzeugen, gilt $Q = \tilde{Q}$. □

15. Theorem (Polarzerlegung / Cartan-Zerlegung)

Sei $X \in GL_n \mathbb{R}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Matrizen $Q \in O(n)$ und $P \geq 0$ mit $X = QP$.

Beweis **Existenz** über den Ansatz $X^T X = P Q^T Q P = P^2$.

Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $v^T X^T X v \geq 0$, also $X^T X \geq 0$. Sei $P \geq 0$ mit $P^2 = X^T X$. Es folgt $\det(P) = \det(X^T X) = \det(X^T)\det(X) = \det(X)^2 > 0$.

Setze $Q = X P^{-1}$, dann gilt $Q^T Q = (P^{-1})^T X^T X P^{-1}$
$= (P^{-1})^T P^2 P^{-1} = (P^{-1})^T P = (P^{-1})^T P^T = (P P^{-1})^T = \mathbb{1}_n$
also $Q \in O(n)$.

Eindeutigkeit Angenommen, $X = \tilde{Q}\tilde{P}$ ist solche eine Zerlegung. Es folgt $X^T X = \tilde{P}^2$ und nach §6.14 folgt $\tilde{P} = P$, damit $\tilde{Q} = Q$ □