Prof. Dr. L. Kramer
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 13/14

5. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Freitag 22.11.2013, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Multiple Choice (Präsenzaufgabe)

1. Seien A, B Mengen. Falls $A \subseteq B$ ist, dann gilt $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
   - ☐ wahr
   - ☐ falsch
2. Seien A, B Mengen. Falls $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ist, dann gilt $A \subseteq B$.
   - ☐ wahr
   - ☐ falsch
3. Seien $(M_j)_{j\in J}$, $(N_j)_{j\in J}$ zwei Familien von Mengen. Weiter sei $f_j : M_j \to N_j$ für jedes $j \in J$ eine surjektive Abbildung. Dann ist
   $$\prod_{j\in J} f_j : \prod_{j\in J} M_j \to \prod_{j\in J} N_j$$
   mit
   $$(\xi_j)_{j\in J} \mapsto (f_j(\xi_j))_{j\in J}$$
   eine surjektive Abbildung.
   - ☐ wahr
   - ☐ falsch
4. Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in A$ und für jedes $n \in A$ gelte: $(n+1) \in A$ oder $(n-1) \in A$. Dann gilt $A = \mathbb{N}$.
   - ☐ wahr
   - ☐ falsch

Aufgabe 5.1

Sei X eine nichtleere Menge und $(H := \{f : X \to X\}, \circ)$ die Halbgruppe aller Abbildungen mit Komposition von Abbildungen als Verknüpfung.

i) Zeigen Sie, dass H genau dann abelsch ist, wenn $\#X = 1$ ist.

ii) Zeigen Sie, dass H genau dann kürzbar ist, wenn $\#X = 1$ ist.

iii) Zeigen Sie, dass eine eindeutige Teilmenge $S \subseteq H$ existiert mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $(S, \circ)$ ist eine Gruppe.
   (b) Ist $K \subseteq H$ mit $(K, \circ)$ eine Gruppe, dann ist $K \subseteq S$.

   (*Hinweis:* Skript § 0.6.)

Aufgabe 5.2

Zeigen Sie, dass die $ax + b$-Halbgruppe H

$$H = \{\tau(a,b) \mid a \in \mathbb{Z} - \{0\}, b \in \mathbb{Z}\}$$

mit

$$\begin{aligned} \tau(a,b) : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

kürzbar ist.

Aufgabe 5.3

Definition: Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $U \subseteq G$ heißt eine Untergruppe von G, falls gilt:

i) $e \in U$.

ii) Für alle $u, v \in U$ ist $u * v \in U$.

ii) Für alle $u \in U$ ist $u^{-1} \in U$.

Sei U eine nichtleere Teilmenge einer Gruppe $(G, *)$, und es gelte $u * v^{-1} \in U$ für alle $u, v \in U$. Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 5.4

Sei $(G, *)$ eine Gruppe und sei $g * g = 1$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass $(G, *)$ abelsch ist.