Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese SS 14

12. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra II

(**Abgabe:** bis Montag 7.07.2014, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 12.1

Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$. Weiter definieren wir

$$f : V \times V \to \mathbb{R}$$

wie folgt

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 3x_1y_2 + 5x_2y_1$$

für $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

i) Zeigen Sie, dass f eine Bilinearform ist.
ii) Berechnen Sie die Gram-Matrix von f bezüglich $B = \{(1, 2),\ (3, 4)\}$.

Aufgabe 12.2

Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$. Weiter definieren wir

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

wie folgt

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto y_1y_2$$

für $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

i) Zeigen Sie, dass g eine symmetrische Bilinearform ist.
ii) Berechnen Sie das Radikal von g.

Aufgabe 12.3

Gegeben sei ein K-Vektorraum V und zwei symmetrische Bilinearformen $k, l : V \times V \to K$. Zeigen Sie: Wenn für alle $v \in V$ gilt $k(v, v) = l(v, v)$, dann folgt $k = l$.

Hinweis: $h(u + v, u + v) = l(u + v, u + v)$. Beachten Sie, dass in dem Körper K gilt $1 + 1 \neq 0$.

Aufgabe 12.4

Sei $V = C[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ mit der Bilinearform

$$h(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Zeigen Sie: Wenn $f \neq 0$ ist, dann gilt $h(f, f) > 0$.