Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

2. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra II

(**Abgabe:** bis Dienstag 22.04.2014, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 2.1

Eine reelle Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

heißt ein magisches Quadrat, falls alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und die beiden Diagonalsummen miteinander übereinstimmen.

i) Zeigen Sie, dass die Menge M aller magischen Quadrate ein $\mathbb{R}$-Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

ii) Zeigen Sie, dass die drei Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von M bilden.

Aufgabe 2.2

Berechnen Sie den Rang der folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.3

Sei K ein Körper und und sei $n \geq 2$. Wir definieren

$$U := \left\{ A = (a_{ij}) \in K^{n\times n} \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \right\}.$$

i) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $K^{n\times n}$ ist und bestimmen Sie die Dimension von U.

ii) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in U$ gilt $AB - BA \in U$.

iii) Gilt für $A, B \in U$ auch immer $AB \in U$?

Aufgabe 2.4

Wenden Sie den Algorithmus zur Berechnung von Determinantenfunktionen auf die reelle Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

an.