Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese SS 14

4. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra II

(**Abgabe:** bis Montag 5.05.2014, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 4.1

Betrachten Sie die folgende Zahlenfolge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...$$

Die Zahlenfolge beginnt mit zwei Einsen und die Folgenglieder sind die Summe ihrer beiden Vorgänger. Diese Zahlen werden nach ihrem Entdecker Fibonacci-Zahlen genannt. Sie werden in der Regel mit F_i bezeichnet, wobei der Index i die laufende Nummer der Zahlen ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

Definition.

Eine reelle Matrix heißt **ganzzahlig**, wenn ihre Einträge ganze Zahlen sind.

Aufgabe 4.2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine ganzzahlige Matrix. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit ganzzahligem Vektor b hat eine ganzzahlige Lösung x.
ii) A hat eine ganzzahlige Inverse.
iii) $\det A \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 4.3

Sei $n \geq 2$ und sei $\mathrm{Sym}(n)$ die symmetrische Gruppe. Sei weiter $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$, $\sigma \neq \mathrm{id}$ beliebig.

i) Konstruieren Sie eine Transposition $\tau \in \mathrm{Sym(n)}$, so dass gilt: $\sigma \circ \tau(i) = i$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.
ii) Zeigen Sie mit Induktion nach n, dass sich die Abbildung σ als Komposition von Transpositionen schreiben lässt.

Aufgabe 4.4

i) Für $n \geq 2$ sei eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben, deren Einträge alle ungerade sind. Zeigen Sie mit Induktion nach n, dass $\det(A)$ eine gerade Zahl ist.
ii) Gegeben sei eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Einträge alle Vielfache einer Zahl $k \in \mathbb{Z}$ sind. Zeigen Sie, dass $\det(A)$ durch k^n teilbar ist.