Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

6. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra II

(**Abgabe:** bis Montag 19.05.2014, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 6.1

Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung

$$K \to \mathrm{Quot}(K)$$
$$r \mapsto \frac{r}{1}$$

für $r \in K$ ein Körperisomorphismus ist.

Aufgabe 6.2

Gegeben sei die reelle Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -18 \\ -4 & 7 & -16 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von X.
ii) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von X.

Aufgabe 6.3

Sei $V := \mathbb{R}_3[T]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3.

i) Zeigen Sie, dass die Menge $B = \left\{1, T, T^2, T^3\right\}$ eine Basis von V ist.
ii) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\Phi : V \to V$$

mit

$$p \mapsto 5T^2p'' + Tp' + p$$

für $p \in V$.
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der Basis B und berechnen Sie die Determinante von Φ.

Aufgabe 6.4

Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Wenn jeder Vektor $v \in V, v \neq 0$ ein Eigenvektor von f ist, dann existiert $\lambda \in K$ so dass gilt:

$$f = id_V \cdot \lambda.$$

***Aufgabe:**

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **idempotent** wenn gilt: $A \cdot A = A$.

i) Geben Sie ein Beispiel $A \neq 0, \mathbb{1}_n$ einer idempotenten Matrix an.
ii) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ idempotente Matrizen. Zeigen Sie, dass $A + B$ genau dann idempotent ist, wenn gilt: $AB = BA = 0$.