Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese SS 14

8. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra II

(**Abgabe:** bis Montag 02.06.2014, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 8.1

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent mit Nilpotenzgrad d. Zeigen Sie, dass gilt: $d \leq n$.

Aufgabe 8.2

Sei $V = C^\infty(0,3)$ der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $(0,3)$. Seien weiter

$$\begin{aligned} U_1 &= \{f \in V \mid f(1) = f(2) = f(3/2) = 0\}, \\ U_2 &= \left\{f \in V \mid f(x) = ax^2 + bx + c \text{ für } a, b, c \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 Unterräume sind und dass gilt: $V = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe 8.3

Definition: Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt Involution, wenn gilt: $f \circ f = id_V$.

Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und f eine Involution. Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{v \in V \mid f(v) = v\}, \\ V_2 &:= \{v \in V \mid f(v) = -v\}. \end{aligned}$$

i) Zeigen Sie, dass gilt: $V = V_1 \oplus V_2$.
ii) Zeigen Sie, dass es eine Basis B von V gibt, so dass die Darstellungsmatrix von f bezüglich B folgende Gestalt hat

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.4

Sei $V = \mathbb{R}_3[T]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 und

$$\phi : V \to V$$

die lineare Abbildung

$$f \mapsto f' + Tf''$$

für $f \in V$.

i) Zeigen Sie, dass ϕ nilpotent ist und bestimmen Sie den Nilpotenzgrad.
ii) Bestimmen Sie eine Basis von V wie im Skript §5, Theorem 12.