§ 1 Erinnerung: Metrische Räume

In diesem Kapitel legen wir einige grundlegende Begriffe fest und erinnern an ein paar Konstruktionen.

1. Def Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$d_X : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$$ heißt Pseudometrik,

wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt

(1) $d_X(x,y) = d_X(y,x)$

(2) $d_X(x,x) = 0$

(3) $d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z)$ $\quad [\Rightarrow d_X(x,z) \geq |d_X(x,y) - d_X(y,z)|]$

Falls zusätzlich gilt

(4) $d_X(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

so heißt d_X Metrik. Manchmal ist es nützlich, den Wertebereich zu erweitern zu $[0,\infty]$, mit der Konvention
(a) $\infty \geq t$ für alle $t \in [0,\infty]$
(b) $\infty + t = \infty$ für alle $t \in [0,\infty]$.

Dann sprechen wir von einer erweiterten Metrik.

Wir setzen

$$B_r(x) = \{ y \in X \mid d_X(x,y) < r \}$$
$$\overline{B}_r(x) = \{ y \in X \mid d_X(x,y) \leq r \}$$

Jede (Pseudo-) Metrik induziert eine Topologie auf X wie folgt:

$$U \subseteq X \text{ offen} \overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 \; B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

Diese Topologie ist Hausdorffsch $\Leftrightarrow$ d_X ist Metrik.

Ein metrischer Raum (X, d_X) ist vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

2. Beispiele

(a) $\mathbb{R}^m$ mit p-Norm, $1 \le p < \infty$

$$\|v\|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |v_j|^p \right)^{1/p}$$

$$\|v\|_\infty = \max \{ |v_j| \mid j = 1, \dots, m \} \qquad p = \infty$$

ist normierter Vektorraum, sogar Banachraum

d.h. vollständiger normierter Vektorraum

(Metrik: $d(u,v) = \|u - v\|_p$) $\boxed{\text{ÜA}}$

(b) (X, d) metrischer Raum $\Rightarrow$ dann ist

auch (X, d^ε) metrischer Raum für $0 < \varepsilon \le 1$

mit $d^\varepsilon(x,y) = d(x,y)^\varepsilon$ $\boxed{\text{ÜA!}}$

(c) X topologischer Raum (z.B. metrischer Raum)

$$C_b(X, \mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt und stetig} \}$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in X \}$$

Dann ist $(C_b(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein

normierter Vektorraum und sogar ein Banachraum.

$\boxed{\text{ÜA}}$

3. <u>Def</u> Sei X, Y metrische Räume, sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Wenn es $L \geq 0$ gibt so, dass für alle $u, v \in X$ gilt $d_Y(f(u), f(v)) \leq L\, d_X(u,v)$ so heißt f <u>L-Lipschitz (stetig)</u>. ($\Rightarrow$ stetig!)

(ii) Wenn für alle $u, v \in X$ gilt

$$d_Y(f(u), f(v)) = d_X(u,v)$$

so heißt f <u>isometrische Einbettung</u>

(iii) wenn (ii) gilt und wenn f bijektiv ist, so heißt f Isometrie.

<u>Bsp</u> $X = Y = \mathbb{R}^m$, Metriken

$$d_X(u,v) = \sum_{j=1}^{m} |u_j - v_j| \qquad (1\text{-Norm})$$

$$d_Y(u,v) = \max\{ |u_j - v_j| \mid 1 \leq j \leq m \} \qquad (\infty\text{-Norm})$$

$f = id \Rightarrow X \xrightarrow{id} Y$ ist 1-Lipschitz

$Y \xrightarrow{id} X$ ist m-Lipschitz

Die <u>Isometriegruppe</u> eines metrischen Raums (X, d) ist $\mathrm{Isom}(X) = \{ f: X \to X \mid f \text{ Isometrie} \}$

Der folgende Satz ist erstaunlich und nützlich.

4. <u>Theorem</u> (Kuratowskis Einbettungssatz)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, sei $p \in X$. Dann ist die Abbildung

$$s : X \longrightarrow C_b(X, \mathbb{R})$$
$$x \longmapsto s_x$$

$$s_x(u) = d_X(x,u) - d_X(p,u)$$

eine isometrische Einbettung.

Jeder metrische Raum lässt sich isometrisch in einen Banachraum einbetten.

<u>Beweis:</u> $d_X(x,p) \geq |d_X(x,u) - d_X(p,u)| = |s_x(u)|$

$\Rightarrow s_x \in C_b(X, \mathbb{R})$

$$|s_x(u) - s_y(u)| = |d_X(x,u) - \cancel{d_X(p,u)} - d_X(y,u) + \cancel{d_X(p,u)}|$$
$$\leq d_X(x,y)$$

$\Rightarrow s$ ist 1-Lipschitz.

Setzt man $u = x$, so erhält man Gleichheit $\Rightarrow s$ ist isometrische Einbettung. $\square$

Erinnerung: ein top. Raum X heißt <u>separabel</u>, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subseteq X$ gibt.

Lemma Ist $Y \subseteq X$ dicht im top. Raum X, so ist die Abbildung

$$C_b(X) \to C_b(Y), \quad f \mapsto f|_Y$$

eine isometrische Einbettung.

Beweis Klar: $\|f|_Y\|_\infty \leq \|f\|_\infty \Rightarrow$ die Abbildung ist 1-Lipschitz. Ist $\|f\|_\infty = r$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $|f(x)| > r - \varepsilon$. Setze $U = \{y \in X \mid |f(y)| > r - \varepsilon\} \Rightarrow U \neq \emptyset$ ist offen $\Rightarrow$ $U \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow$ es gibt $y \in Y$ mit $|f(y)| > r - \varepsilon$ $\Rightarrow \|f|_Y\|_\infty \geq r - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ □

Korollar (Fréchet) Jeder separable metrische Raum X ist isometrisch zu einem Unterraum von $l_\infty(\mathbb{N})$ (Raum der beschränkten reellen Folgen, mit Norm $\|c\|_\infty = \sup\{|c_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$)

Beweis Sei $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ dicht.

Betrachte $X \xrightarrow[\text{Kuratowski}]{} C_b(X) \xrightarrow[\text{Lemma}]{} C_b(D) \to l_\infty(\mathbb{N})$

$p = x_0$, $\quad x \mapsto (s_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$

$$s_k(x) = d_X(x, x_k) - d_X(x, x_0)$$

weiter wie eben □

#

Wir betrachten zwei Anwendungen von Kuratowskis Einbettungssatz.

5. <u>Satz</u> Seien X, Z metrische Räume, sei $Y \subseteq X$ dicht und sei $f : Y \to Z$ L-Lipschitz für ein $L \geq 0$. Wenn Z vollständig ist, so hat f eine eindeutige L-Lipschitz Fortsetzung $F : X \to Z$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, "F"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> Die Eindeutigkeit ist klar, da F stetig und $Y \subseteq X$ dicht ist. Sei $x \in X$. Dann gibt es eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y mit $\lim_n y_n = x$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also $N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(y_n, x) \leq \varepsilon$ für $n \geq N$.
Es folgt $d_Y(f(y_n), f(y_m)) \leq L\, d_X(y_n, y_m) \leq 2\varepsilon \cdot L$ für $n, m \geq N \Rightarrow f(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in Z.
Setze $z = \lim_n f(y_n)$. Ist $y \in B_r(x) \cap Y$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ N mit $d(y, y_n) \leq r + \varepsilon$ für $n \geq N$
$\Rightarrow d(f(y), f(y_n)) \leq L(r + \varepsilon)$ für $n \geq N$
$\Rightarrow d(f(y), z) \leq L \cdot r$. Damit ist z unabhängig von der gewählten Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, setze $F(x) = z \rightsquigarrow F|_Y = f$.
Ist $u, v \in X$ so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ $u', v' \in Y$ mit $u' \in B_\varepsilon(u) \cap Y$ $\quad v' \in B_\varepsilon(v) \cap Y$

$$\begin{aligned} d_Y(F(u), F(v)) &\leq d_Y(F(u), F(u')) + d_Y(F(u'), F(v')) + d_Y(F(v'), F(v)) \\ &\leq L(2\varepsilon + d_X(u', v')) \leq L(4\varepsilon + d_X(u, v)) \end{aligned}$$ $\square$

$\Rightarrow F$ ist L-Lipschitz.

<u>Def</u> Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Eine <u>Vervollständigung</u> von X ist eine isometrische Einbettung $i: X \to Y$ in einen vollständigen metr. Raum Y mit dichtem Bild, $\overline{i(X)} = Y$.

<u>Thm</u> Sei (X, d_X) ein metr. Raum.

(a) Es gibt eine Vervollständigung von X

(b) Sind $X \xrightarrow{i} Y$ und $X \xrightarrow{j} Z$ Vervollständigungen, so gibt es genau eine Isometrie $f: Y \to Z$ mit $f \circ i = j$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle f} & \\ Z & & \end{array}.$$

<u>Bew</u> (a) Betrachte die Kuratowski-Einbettung $\iota: X \to C_b(X, \mathbb{R})$, setze $Y = \overline{\iota(X)}$. Da $C_b(X, \mathbb{R})$ vollständig ist, ist Y vollständig.

(b) Betrachte
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \\ Z & & \end{array}.$$
Via i können wir X mit $i(X) \subseteq Y$ identifizieren. Der vorige Satz liefert $f: Y \to Z$ 1-Lipschitz mit $f \circ i = j$.

Auf der dichten Teilmenge $i(X)$ gilt:

$$d_Z(f(u), f(v)) = d_Y(u, v)$$

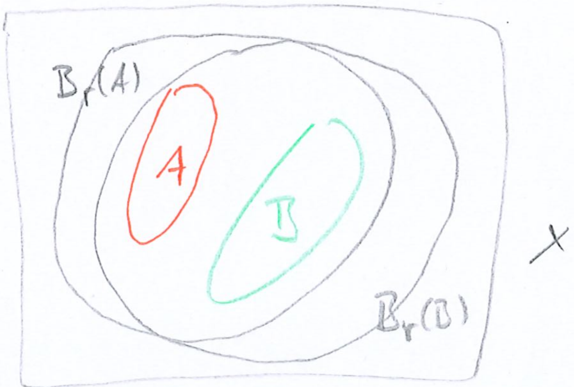
Da f stetig ist, gilt für alle $u,v \in Y$, dass $d_Z(f(u), f(v)) = d_Y(u,v)$, d.h. f ist isometrische Einbettung.
Weiter ist $f(Y) \subseteq Z$ vollständig, also abgeschlossen in Z.
Da $f(i(X)) = j(X) \subseteq Z$ dicht ist, ist $f(Y) = Z$, damit ist f bijektiv. Da $i(X) \subseteq Y$ dicht ist, ist f eindeutig. $\square$

6. **Def** Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ Teilmenge. Für $r > 0$ setze $B_r(A) = \bigcup_{a \in A} B_r(a)$, die r-Umgebung von A. Offensichtlich gilt dann

$$B_r(B_s(A)) \subseteq B_{r+s}(A)$$

Für $A, B \subseteq X$ definieren wir den Hausdorff-Abstand

$$Hd(A,B) = \inf\{ r > 0 \mid A \subseteq B_r(B) \text{ und } B \subseteq B_r(A) \} \in [0,\infty]$$



Offensichtlich gilt
$Hd(A,B) = Hd(B,A) \geq 0$
$Hd(A,A) = 0$

Sind $A, B, C \subseteq X$ mit

$Hd(A,B) < r$, $Hd(B,C) < s$, so ist

$C \subseteq B_s(B)$, $B \subseteq B_r(A) \Rightarrow C \subseteq B_s(B_r(A)) \subseteq B_{r+s}(A)$

genauso $A \subseteq B_{r+s}(C) \Rightarrow Hd(A,C) \leq Hd(A,B) + Hd(B,C)$

Damit ist Hd eine erweiterte Pseudometrik auf $\mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge von X).

Beachte: $Hd(\emptyset, A) = \infty$ für $A \neq \emptyset$.

<u>Lemma</u> Es gilt $Hd(A,B) = 0$ gdw $\bar{A} = \bar{B}$.

<u>Beweis</u> Es gilt $\bigcap \{ B_r(A) \mid r > 0 \} = \{ x \in X \mid B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ für alle $r > 0 \} = \bar{A}$. Ist also $Hd(A,B) = 0$, so folgt $B \subseteq \bar{A}$ und $A \subseteq \bar{B} \Rightarrow \bar{A} = \bar{B}$. Weiter gilt $Hd(A, \bar{A}) = 0 = Hd(B, \bar{B}) \Rightarrow Hd(\bar{A}, \bar{B}) \leq Hd(A,B) = 0$ $\square$

<u>Korollar</u> Der Hausdorffabstand ist eine erweiterte Metrik auf der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X.

Setze $\mathfrak{M}(X) = \{ A \subseteq X \mid A \text{ abg}, A \neq \emptyset \}$.

Dann ist die Abbildung

$$i : X \longrightarrow \mathfrak{M}(X)$$
$$p \longmapsto \{p\}$$

eine abgeschlossene isometrische Einbettung.

<u>Beweis</u> Aus dem Lemma folgt, dass Hd auf den abgeschlossenen Teilmengen eine erweiterte Metrik ist.

Ist $d(u,v) = r$, so gilt $u \in B_{r+\varepsilon}(v)$ $v \in B_{r+\varepsilon}(u)$ für alle $\varepsilon > 0 \Rightarrow Hd(\{u\},\{v\}) \leq r$. Für $s < r$ ist $\{u\} \not\subseteq B_s(\{v\}) \Rightarrow Hd(\{u\},\{v\}) \geq r \Rightarrow i$ isometrische Einbettung.

Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in A so, dass $(\{a_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}(X)$ konvergiert gegen $B \subseteq X$.
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es n mit $B \subseteq B_\varepsilon(a_n) \Rightarrow$ $B = \{b\}$ für ein $b \in X$. Es folgt $\lim_n a_n = b \Rightarrow b \in A$ $\Rightarrow \{b\} \in i(A)$. $\square$

<u>Bem</u>: Wenn X beschränkt ist, so ist $Hd(A,B) < \infty$ für alle $A, B \subseteq X$, $A, B \neq \emptyset$. Folglich ist $\mathfrak{M}(X)$ ein metrischer Raum, wenn X beschränkt ist.

7 <u>Theorem</u>: Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist vollständig,
(ii) $\mathfrak{M}(X)$ ist vollständig.

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) folgt direkt aus dem vorigen Korollar.
(i) $\Rightarrow$ (ii): sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X.
Durch Übergang auf eine Teilfolge können wir annehmen, dass gilt $Hd(F_n, F_{n+1}) < 2^{-n}$ (denn: eine CF konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge hat!)
Zu jedem $x_i \in F_i$ existiert $x_{i+1} \in F_{i+1}$ mit $d(x_i, x_{i+1}) \leq 2^{-i}$. Betrachte die Menge aller Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit: (a) $x_i \in F_i$
(b) $d(x_i, x_{i+1}) < 2^{-i}$ für alle i.

Jede dieser Folgen ist Cauchyfolge in X und jeder Punkt $y \in F_n$ kommt in solch einer Folge vor.
Sei $F \subseteq X$ die Menge aller Grenzwerte dieser Cauchyfolgen.

__Beh__ $\lim_n Hd(F_n, F) = \lim_n Hd(F_n, \overline{F}) = 0$

__Denn:__ Für $\varepsilon > 0$ gibt es $N \geq 0$ so, dass $\sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j} < \varepsilon/2$. Ist $(x_n)_{n \in \omega}$ eine der Folgen oben, mit Grenzwert x, so gilt für alle $n \geq N$, dass

$$d(x_n, x) \leq \varepsilon/2 \Rightarrow x \in B_\varepsilon(F_n) \text{ und } x_n \in B_\varepsilon(F)$$

Da jedes $y \in F_n$ in solch einer Folge vorhanden, folgt $Hd(F_n, F) \leq \varepsilon$. Damit folgt die Behauptung. □

8. __Theorem__ Ist X ein metrischer Raum, so sind äquivalent:
(i) X ist kompakt
(ii) $\mathfrak{M}(X)$ ist kompakt.

__Beweis__ (ii) $\Rightarrow$ (i) wieder mit Korollar §1.6.
(i) $\Rightarrow$ (ii): ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist (d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Überdeckung durch ε-Bälle, vgl Dugundji $\underline{\overline{\text{XIV}}}$ 3.5)
Da X kompakt ist, ist X vollständig $\Rightarrow \mathfrak{M}(X)$ auch vollständig.

Sei $\varepsilon > 0$, sei $S \subseteq X$ endlich mit $B_\varepsilon(S) = X$. Für $A \in \mathfrak{M}(X)$ sei $T = S \cap B_\varepsilon(A)$. Es folgt $T \subseteq B_\varepsilon(A)$ und $A \subseteq B_\varepsilon(T)$. Für die endliche Menge $\mathfrak{M}(S) = \{T \subseteq S \mid T \neq \emptyset\}$ gilt folglich $\mathfrak{M}(X) \subseteq B_\varepsilon(\mathfrak{M}(S))$. Damit ist $\mathfrak{M}(S)$ total beschränkt, also kompakt. $\square$

9. Bemerkungen

(i) Ist X metr. Raum, $A \subseteq X$ kompakt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $S \subseteq A$ mit $Hd(S, A) \leq \varepsilon$. Kompakte Mengen lassen sich (metrisch) beliebig genau durch endliche Mengen approximieren.

(ii) Jeder kompakte metrische Raum X ist separabel, denn: für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es $S_k \subseteq X$ endlich mit $Hd(S_k, X) < 2^{-k}$. Damit ist $S = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k$ abzählbare dichte Teilmenge.

(iii) Für jeden kompakten metrischen Raum X existiert folglich eine isometrische Einbettung $i : X \longrightarrow l_\infty(\mathbb{N})$ nach Fréchets Einbettungssatz §1.4.

(iv) Für kompakte metrische Räume X, Y definieren wir den <u>Gromov-Hausdorff-Abstand</u>

$$GHd(X,Y) = \inf \{ Hd(A,B) \mid A,B \subseteq l_\infty(\mathbb{N}) \text{ kompakt mit } A \underset{\text{isometrisch}}{\cong} X \text{ und } B \underset{\text{isometrisch}}{\cong} Y \}.$$

Damit ist GHd eine Pseudometrik auf der Klasse aller kompakten metrischen Räume. Es gilt $GHd(X,Y) = 0$ gdw $X \underset{\text{isometrisch}}{\cong} Y$.

→ Wir kommen später darauf zurück. $\square$

#