§2 CAT(0)-Räume

1. __Def__ Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine __Geodäte__ in X ist eine isometrische Einbettung $\gamma : I \to X$, d.h. es gilt

$$d_X(\gamma(s), \gamma(t)) = |s-t| \quad \text{für alle } s,t \in I.$$

Wir nennen X __geodätisch__, wenn es für alle $u, v \in X$ eine __Geodäte γ von u nach v gibt__,

d.h. $\gamma : [0,\lambda] \to X$ Geodäte, $\gamma(0) = u$, $\gamma(\lambda) = v$, $\lambda = d(u,v)$

Schreibe kurz $u \xrightarrow{\gamma} v$.

__Beispiel__ (a) $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum

$$\gamma(s \cdot \lambda) = (1-s)u + s(v) \qquad \lambda = \|u-v\|$$

(b) M zush. vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ M ist geodätischer metrischer Raum (Hopf-Rinow)

[__Bem__ Ist M Riem. Mannf., so ist jede Geodäte im Sinne von §2.1 eine Riemannsche Geodäte, d.h. $\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = 0$ gilt. Ist α eine "Riemannsche Geodäte" $\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{\alpha} = 0\right)$ mit $\|\dot{\alpha}\| = 1$, so ist α __lokal__ eine Geodäte im Sinne von §2.1.]

<u>Beobachtung</u> Ist X ein metrischer Raum, $a,b,c \in X$, so gibt es wegen der Dreiecksungleichung $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\bar{a}-\bar{b}\|_2 = d(a,b)$, $\|\bar{b}-\bar{c}\|_2 = d(b,c)$, $\|\bar{c}-a\|_2 = d(c,a)$. Wir nennen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$ Vergleichspunkte. Vergleichspunkte sind nicht eindeutig aber eindeutig bis auf Kongruenz.

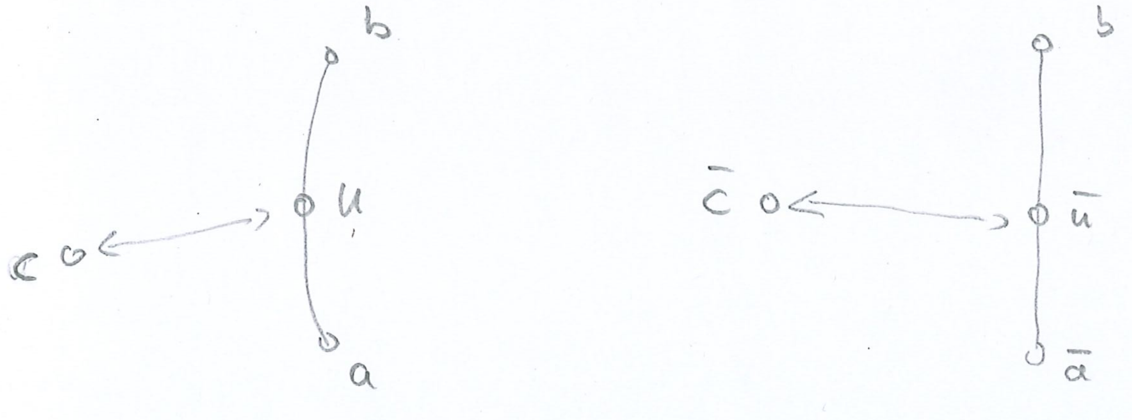
2. <u>Def</u> Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Wir nennen X einen <u>CAT(0)-Raum</u> (<u>C</u>artan-<u>A</u>lexandrov-<u>T</u>oponogov, Krümmung $\leq \underline{0}$), wenn gilt:

(i) X ist geodätisch

(ii) sind $a,b,c \in X$ mit Vergleichspunkten $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$ und ist $\gamma : a \to b$ eine Geodätische, $\lambda = d(a,b)$, so gilt für alle $t \in [0,\lambda]$, $u = \gamma(t)$, dass

$$d_X(u,c) \leq \|\bar{u}-\bar{c}\|_2$$

wobei $\bar{u} = (1-s)\bar{a} + s\bar{b}$ $\quad t = \lambda \cdot s$



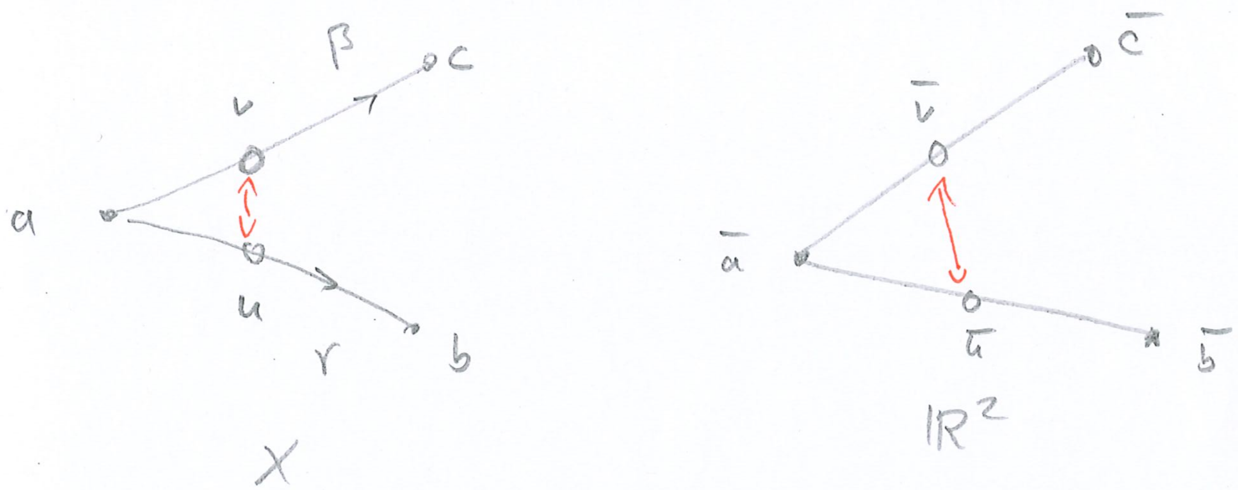
<u>Beispiel</u> • $(\mathbb{R}^m, \|.\|_2)$ ist CAT(0)-Raum (und jede konvexe Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^m$)

allgemein: $(V, \|.\|)$ Prä-Hilbertraum $\Rightarrow$ V ist CAT(0)-Raum.

• $(\mathbb{R}^m, \|.\|_p)$ ist für $p \neq 2$, $m \geq 2$ <u>kein</u> CAT(0)-Raum.

3. <u>Lemma</u> Sei (X, d_X) ein CAT(0)-Raum, seien $a, b, c \in X$ mit Geodäten $a \xrightarrow{\gamma} b$, $a \xrightarrow{\beta} c$, und Vergleichspunkte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$. Ist u auf γ, v auf β, so gilt

$$d_X(u,v) \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|_2$$



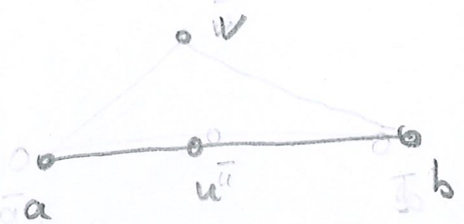
$u = \gamma(s \cdot d(a,b))$ $\quad$ $v = \beta(t \cdot d(a,c))$ $\quad$ $s, t \in [0,1]$

$\bar{u} = (1-s)\,\bar{a} + s\,\bar{b}$

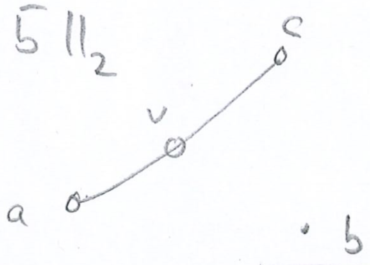
$\bar{v} = (1-t)\,\bar{a} + t\,\bar{c}$

Bew: Wir wählen einen weiteren Punkt $\bar{\bar{v}} \in \mathbb{R}^2$ mit $d(a,v) = \|\bar a - \bar{\bar v}\|_2$ $d(b,v) = \|\bar b - \bar{\bar v}\|_2$.

Dann gilt $d_X(u,v) \le \|\bar{\bar v} - \bar u\|_2$



$d_X(v,b) \le \|\bar v - \bar b\|_2$



Es genügt also zu zeigen: dann gilt $\boxed{\|\bar{\bar v} - \bar u\|_2 \le \|\bar v - \bar u\|_2}$.

OE $\bar a = (0,0)$, $\bar b = (\lambda, 0)$, $\bar c = (x,y)$

$\bar v = t(x,y)$ $\bar u = s(\lambda,0)$ $\bar{\bar v} = (p,q)$

$\Rightarrow t^2(x^2+y^2) = p^2+q^2$

$\|\bar b - \bar{\bar v}\|_2^2 \le \|\bar b - \bar v\|^2 \Rightarrow$

$\lambda^2 + p^2 + q^2 - 2\lambda p \le \lambda^2 + p^2 + q^2 - 2\lambda t x$

$\Rightarrow \lambda p \ge \lambda t x$ //

Nun

$\|\bar{\bar v} - \bar u\|_2^2 \overset{!}{\le} \|\bar v - \bar u\|_2^2$

$p^2+q^2+s^2\lambda^2 - 2s\lambda p \overset{!}{\le} p^2+q^2+s^2\lambda^2 - 2ts\lambda x$

$s\lambda p \overset{!}{\ge} st\lambda x$ (✓) □

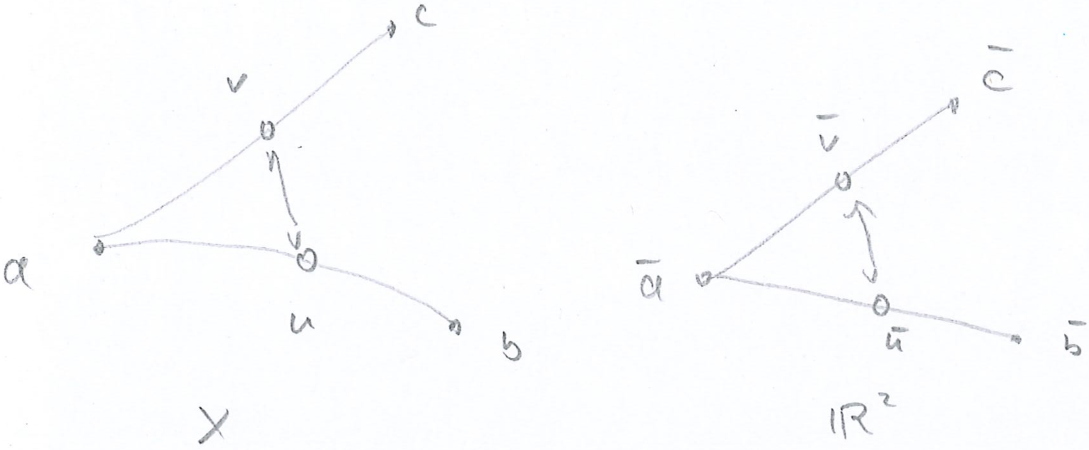
Korollar A Ein geodätisch metrischer Raum X ist genau dann ein CAT(0)-Raum, wenn für alle $a,b,c \in X$, alle Geodäten $a \xrightarrow{\gamma} b$, $a \xrightarrow{\beta} c$ und alle u auf γ, v auf β gilt

$$d(u,v) \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|_2 ,$$

wobei $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$ Vergleichspunkte sind,

$u = \gamma(s \cdot d(a,b))$ $\quad$ $v = \beta(t \cdot d(a,c))$

$\bar{u} = (1-s)\bar{a} + s\bar{b}$ $\quad$ $\bar{v} = (1-t)\bar{a} + t\bar{c}$



"$\underbrace{\text{Dreiecke}}_{\text{in } X}$ sind nicht dicker als Dreiecke in $\mathbb{R}^2$" $\square$

Bem Diese Charakterisierung von CAT(0)-Räumen wird oft als Definition benutzt.

<u>Korollar B</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, seien $a \xrightarrow{\alpha} b$ und $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ Geodäten, $\lambda = d(a,b)$, $\mu = d(a',b')$. Dann gilt für $s \in [0,1]$

$$d_X(\alpha(s\lambda), \alpha'(s\mu)) \leq (1-s)\, d_X(a,a') + s\, d_X(b,b'),$$

d.h. die <u>Metrik ist konvex</u>.

<u>Beweis</u> Sei α'' eine weitere Geodäte, $a \xrightarrow{\alpha''} b'$, $\nu = d(a,b')$.

Es gilt $d_X(\alpha(s\lambda), \alpha''(s\nu)) \leq s \cdot d(b,b')$

$$d_X(\alpha''(s\nu), \alpha'(s\mu)) \leq (1-s) \cdot d(a,a')$$

$\square$

<u>Korollar C</u> Ein CAT(0) Raum ist <u>eindeutig geodätisch</u>, d.h. zu $a, b \in X$ gibt es <u>genau eine</u> Geodäte $a \xrightarrow{\alpha} b$. $\square$

4. <u>Def</u> Sei X ein CAT(0)-Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt <u>konvex</u>, wenn für alle $a, b \in A$ die eindeutige Geodäte $a \xrightarrow{\alpha} b$ in A verläuft, $\alpha(t) \in A$ für alle $0 \leq t \leq d(a,b)$.

Klar: konvexe Teilmengen von CAT(0)-Räumen sind wieder CAT(0)-Räume.

Satz Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $A \subseteq X$ konvex und metrisch vollständig. Dann gibt es zu jedem $p \in X$ genau ein $a \in A$ mit

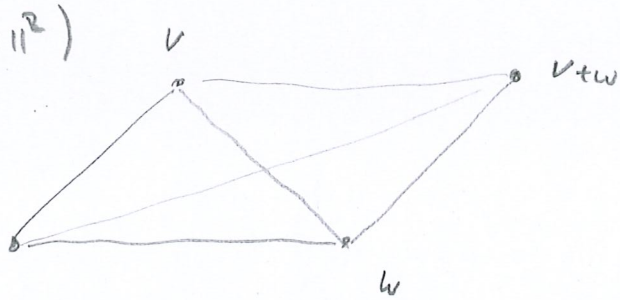
$$d(p,a) = d(p,A) = \inf\{d(p,x) \mid x \in A\}$$

Wir schreiben $a = \mathrm{proj}_A(p)$ Projektion von p auf A.

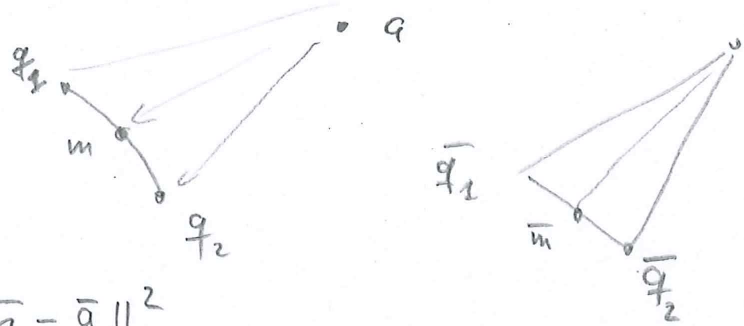
Beweis Geometrische Vorüberlegung. Sei $v, w \in \mathbb{R}^2$

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

(Parall.



Sei $r = d(p,A)$. Sind $q_1, q_2 \in A$ mit Mittelpunkt m



so gilt $r^2 \leq \|\bar{m} - \bar{a}\|_2^2$

Ist $d(a, q_1) \leq r + \varepsilon$
$d(a, q_2) \leq r + \varepsilon$

so folgt $2(\|\bar{q}_1 - \bar{a}\|_2^2 + \|\bar{q}_2 - \bar{a}\|_2^2) = 4\|\bar{m} - \bar{a}\|_2^2 + \|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\|_2^2$

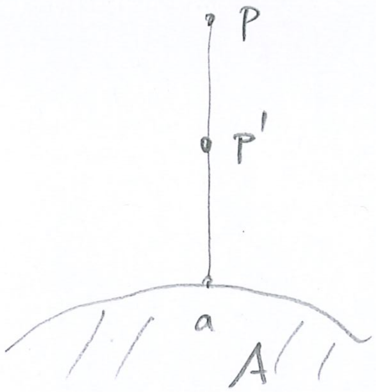
$$4 \cdot (r+\varepsilon)^2 \geq 4r^2 + d(q_1, q_2)^2$$

$$\Rightarrow d(q_1, q_2)^2 \leq 8r\varepsilon + 4\varepsilon^2$$

Ist also $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $\lim_n d(q_n, a) = r$, so ist diese Folge eine Cauchyfolge in A, mit Grenzwert $a \in A$.

Ist $a' \in A$ ein weiterer Punkt mit $d(a', p) = d(p, A)$, so folgt $d(a, a')^2 \leq 0$ $\square$ #

__Bem__ Ist p' ein Punkt auf der Geodäte $p \xrightarrow{\alpha} a$, so gilt $\mathrm{proj}_A(p') = a$, denn:



$$d(p', b) < d(p', a) \quad \text{für } b \in A$$
$$\Rightarrow d(p, b) \leq d(p, p') + d(p', b) < d(p, a) \;↯$$

$\square$

5. __Satz__ Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $A \subseteq X$ vollständig und konvex. Dann ist die Retraktion

$$X \longrightarrow A, \quad p \longmapsto \mathrm{proj}_A(p) \qquad 1\text{-Lipschitz}.$$

Für $s \in [0,1]$ und $p \in X$ sei $h_s(p)$ der Punkt auf der Geodäte $p \xrightarrow{\alpha} \mathrm{proj}_A(p) = q$ mit

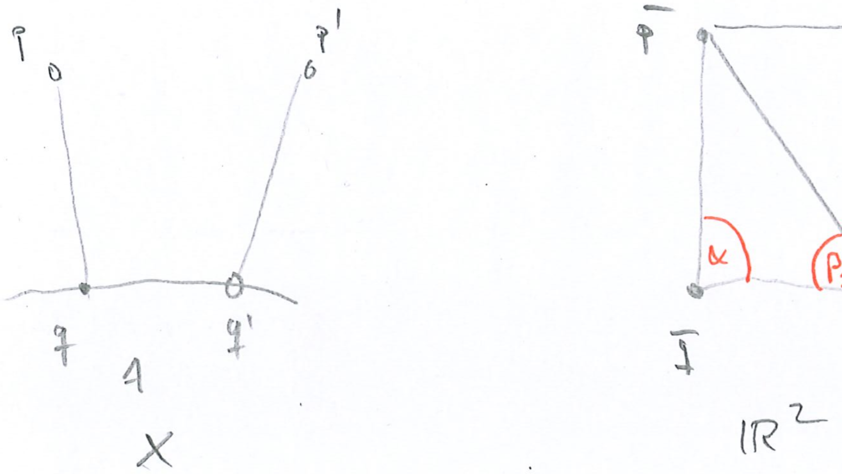
$$(1-s)\, d(p, q) = d(h_s(p), q)$$

Dann ist $h : X \times [0,1] \to X$ eine Homotopie zwischen id_X und proj_A, die A punktweise festlässt.

<u>Beweis</u> Sei $p, p' \in X$ mit $q = \mathrm{proj}_A(p)$ und $q' = \mathrm{proj}_A(q')$.

<u>Beh</u>: $d(q,q') \leq d(p,p')$. OE $q \neq q'$, $p \neq q$, $p' \neq q'$

Betrachte Vergleichsdreieck zu $p - q - q'$ und $q' - p' - p$



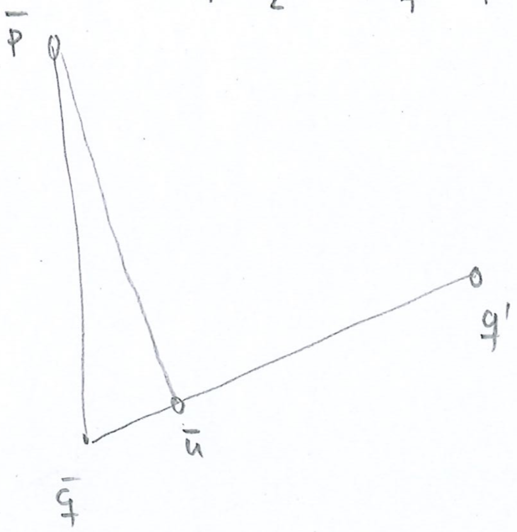
$\beta = \beta_1 + \beta_2$

<u>Beh(a)</u>: $\alpha \geq \pi/2$.

Denn sonst gibt es auf dem Segment $\bar{q} - \bar{q}'$ ein $\bar{u}$

mit $\|\bar{u} - \bar{p}\|_2^2 < \|\bar{q} - \bar{p}\|_2^2 \Rightarrow d(p,u) \leq \|\bar{u} - \bar{p}\|_2 < d(p,q)$

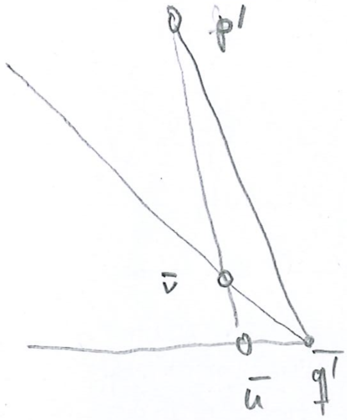
$u \in A$ ↯



Wenn $q' = p'$ fertig.

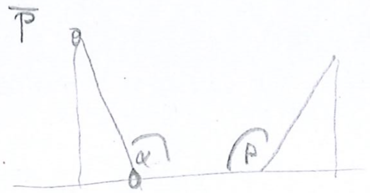
Beh (b) $\beta \geq \pi/2$

Denn sonst gibt es auf dem Segment $\bar{q} - \bar{q}'$ ein $\bar{u}$ mit $\| \bar{u} - \bar{p}' \|^2 < \| \bar{q}' - \bar{p}' \|^2$. beliebig nah bei $\bar{q}'$.



Nun gilt

$$\begin{aligned} d(p', u) &\leq d(p', v) + d(v, u) \\ &\leq \| \bar{p}' - \bar{v} \|_2 + \| \bar{v} - \bar{u} \|_2 \\ &= \| \bar{p}' - \bar{u} \|_2 < \| \bar{p}' - \bar{q}' \|_2 \\ &= d(p', q') \quad ↯ \end{aligned}$$



Nun OE $\bar{q} = (0,0)$ $\quad \bar{q}' = (0, r)$

$\bar{p} = (x, y)$ $\quad \bar{p}' = (x', y')$

$\Rightarrow x \leq 0$ weil $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$

$$\underbrace{0 \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \beta_2 \leq \pi}$$

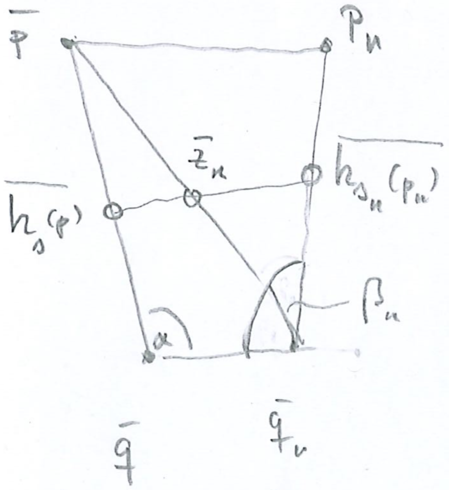
$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq 3\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x' \geq r$$

$\Rightarrow d(\bar{p}, \bar{q}) \geq r$ $\square$

Beh: $h : X \times [0,1] \to X$ ist stetig.

Sei $p \in X$, $s \in [0,1]$, $\lim_n p_n = p$, $\lim_n s_n = s$.



Zwei Vergleichsdreiecke, wie eben

Für $n >> 0$ ist $\beta_n \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} d(h_s(p), h_{s_n}(p_n)) &\leq d(h_s(p), z_n) \\ &\quad + d(z_n, h_{s_n}(p)) \\ &\leq \| \overline{h_s(p)} - \overline{h_{s_n}(p_n)} \|_2 \end{aligned}$$

[α hängt auch von n ab]

Besseres Argument auf der folgenden Seite!

Ein besserer Beweis, dass $h: X \times [0,1] \to X$ stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$, $p \in X$, $s \in [0,1]$. Sei $q \in B_\varepsilon(p)$ und $|t-s| < \varepsilon$. Wegen der Konvexität der Metrik gilt

$$d(h_s(p), h_s(q)) \leq (1-s)\, d(p,q) + s \cdot \underbrace{d(\mathrm{proj}_A(p), \mathrm{proj}_A(q))}_{\leq d(p,q)}$$
$$\leq \varepsilon.$$

Weiter ist

$$d(h_s(q), h_t(q)) \leq \varepsilon\, d(q, \mathrm{proj}_A(q))$$
$$\leq \varepsilon\,(2\varepsilon + d(p, \mathrm{proj}_A(p)))$$

$$\Rightarrow d(h_s(p), h_t(q)) \leq \varepsilon + \varepsilon\,(2\varepsilon + d(p, \mathrm{proj}_A(p)))$$

$\Rightarrow$ h ist stetig im Punkt (p,s). $\square$

$$\overline{h_t(p)} = (1-t)\,\bar{p} + t\,\bar{q} \qquad \lim_n \bar{p}_n = \bar{p}$$

$$\overline{h_s(p_n)} = (1-t)\,\bar{p}_n + t\,\bar{q}_n \qquad \Rightarrow \lim_n \bar{q}_n = \bar{q}$$

$$\Rightarrow \lim_n \overline{h_{s_n}(p_n)} = \overline{h_s(p)} \qquad \square$$

<u>Korollar</u> Jeder nicht leere CAT(0)-Raum X ist kontrahierbar.

<u>Beweis</u> Wähle $a \in X$, setze $A = \{a\}$.

6. <u>Def</u> Sei X ein metrischer Raum, sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ Teilmenge. Der <u>Radius</u> von A ist

$$\mathrm{rad}(A) = \inf\{ r > 0 \mid \text{es gibt } p \in X \text{ mit } A \subseteq B_r(p) \}.$$

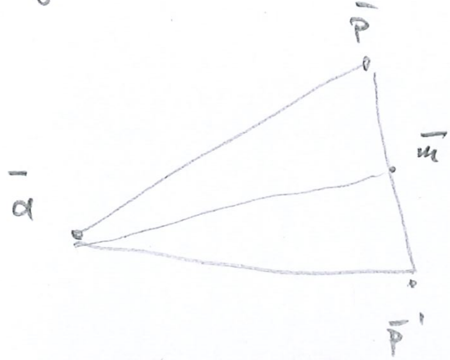
Wenn es kein r, p gibt mit $B_r(p) \supseteq A$, so ist $\mathrm{rad}(A) = \infty$.

<u>Theorem</u> (Bruhat-Tits-Satz) Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ beschränkt. Dann gibt es <u>genau ein</u> $p \in X$ mit $A \subseteq \overline{B}_r(p)$, $r = \mathrm{rad}(A)$. Man nennt p das <u>Zentrum</u> von A.

<u>Beweis</u> Da A beschränkt ist, folgt $r = \mathrm{rad}(A) < \infty$.

Angenommen, $p, p' \in X$ mit $B_{r+\varepsilon}(p) \cap B_{r+\varepsilon}(p') \supseteq A$.

Sei m der Mittelpunkt von $p \to p'$. Dann existiert $a \in A$ mit $d(m,a) \geq r$. Mit Parallelogrammgleichung im Vergleichsdreieck folgt



$$2\left(\|\bar a-\bar p'\|_2^2+\|\bar a-\bar p\|_2^2\right)=\|\bar p-\bar p'\|_2^2+4\|\bar a-\bar m\|_2^2$$

$$4(r+\varepsilon)^2 \geq 4r^2+d(p,p')^2$$

$$8r\varepsilon+4\varepsilon^2 \geq d(p,p')^2$$

Ist also $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit

$\overline{B}_{r_n}(p_n) \supseteq A$, $\lim r_n = r$, so ist dies eine Cauchy-Folge, mit Grenzwert $p \in X$ und $\overline{B}_r(p) \supseteq A$. Das Argument oben zeigt mit $\varepsilon = 0$, dass der Punkt p eindeutig ist. $\square$

7. <u>Def</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei

$$G \times X \to X, \quad (g,p) \longmapsto g(p)$$

eine Gruppenwirkung. Die Wirkung heißt <u>isometrisch</u>, wenn für alle $g \in G$, $p,q \in X$ gilt

$$d(p,q) = d(g(p),g(q))$$

Die <u>Fixpunktmenge</u> der Wirkung ist $X^G = \{p \in G \mid g(p)=p$ für alle $g \in G\}$. Die <u>Bahn</u> von $p \in X$ ist $G(p) = \{g(p) \mid g \in G\} \subseteq X$

8. Theorem (Bruhat-Tits-Fixpunktsatz)

Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $G \times X \to X$ eine isometrische Gruppenwirkung. Dann sind äquivalent: (i) es gibt eine beschränkte G-Bahn in X

(ii) jede G-Bahn in X ist beschränkt

(iii) $X^G \neq \emptyset$, es gibt Fixpunkte

Beweis (iii) $\Rightarrow$ (ii): $p \in X^G$, $q \in X \Rightarrow$

$$d(p, g(q)) = d(g(p), g(q)) = d(p,q) \Rightarrow G(q) \subseteq \overline{B}_r(p)$$

für $r = d(p,q)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) klar

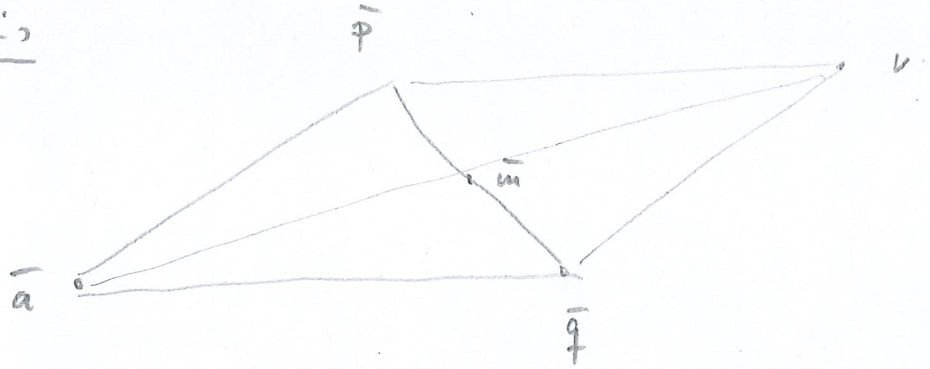
(i) $\Rightarrow$ (iii) Angenommen, $G(q) \subseteq X$ ist beschränkt. Sei p das Zentrum von $G(q)$. Für $g \in G$ ist dann $g(p)$ das Zentrum von $g(G(q)) = G(q) \Rightarrow g(p) = p$ für alle $g \in G$ $\square$

9. Die CN-Ungleichung

Lemma (Bruhat-Tits) Sei X ein CAT(0)-Raum. Seien $p, q, a \in X$, sei m der Mittelpunkt von p und q. Dann gilt die CN-Ungleichung (courbure négative)

$$2 \cdot d(a,m)^2 \leq d(a,p)^2 + d(a,q)^2 - \frac{1}{2} d(p,q)^2$$

Beweis



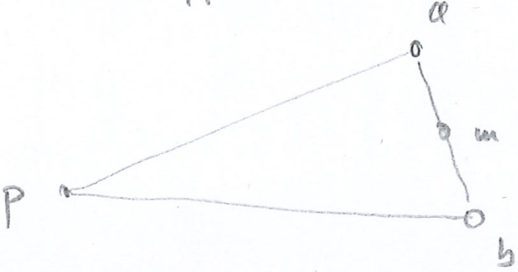
$$2(\|\bar{a}-\bar{q}\|_2^2 + \|\bar{a}-\bar{p}\|_2^2) = \|\bar{p}-\bar{q}\|_2^2 + \underbrace{\|\bar{a}-v\|_2^2}_{=4\|\bar{a}-\bar{m}\|^2}$$

$$\Rightarrow d(a,q)^2 + d(a,p)^2 \geq \frac{1}{2} d(p-q)^2 + 2\, d(a,m)^2 \qquad \square$$

Korollar Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, seien $A, B \subseteq X$ beschränkt mit Zentren $a, b \in X$, und $r = \mathrm{rad}(A)$, $s = \mathrm{rad}(B)$. Wenn $A \subseteq B$, so gilt

$$d(a,b)^2 \leq 2(r^2 - s^2)$$

Bew: Für $a=b$ ist nichts zu zeigen. Sonst sei m der Mittelpunkt von $a \to b$. Dann ist m nicht das Zentrum von A, also gibt es $p \in A$ mit $d(m,p) > r$



$$\Rightarrow 2 \cdot r^2 < 2 \cdot d(m,p)^2 \leq d(a,p)^2 + d(b,p)^2 - \frac{1}{2} d(a,b)^2$$
$$\leq r^2 + s^2 - \frac{1}{2} d(a,b)^2$$

$\square$

$\#$

Lemma: Sei X CAT(0)-Raum, sei $A \subseteq X$ konvex, vollständig und beschränkt. Dann liegt das Zentrum von A in A.

Bew: Sei p das Zentrum von A; $q = \mathrm{proj}_A(p)$.
Für alle $a \in A$ gilt $d(a,p) \geq d(a,q) \Rightarrow A \subseteq \overline{B}_r(q)$, $r = \mathrm{rad}(A) \Rightarrow p = q$ $\square$

10. Def Ein metrischer Raum X heißt sphärisch vollständig, wenn gilt: für alle Folgen $(p_n, r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $p_n \in X$, $r_n > 0$ mit $\overline{B}_{r_0}(p_0) \supseteq \overline{B}_{r_1}(p_1) \supseteq \dots$ gilt $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{r_n}(p_n) \neq \emptyset$.

Bem (a) jeder sphärisch vollständige Raum ist vollständig (ÜA)

(b) jeder eigentliche metrische Raum (engl. proper metric space) ist sphärisch vollständig

(eigentlich heißt: jede abg. beschr. Menge ist kompakt) (ÜA)

Satz Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abg. beschränkten konvexen nicht leeren Teilmengen mit $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Dann ist $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Beweis. Setze $r_n = \mathrm{rad}(A_n)$, z_n Zentrum von A_n. Die Folge $r_0, r_1, \dots$ ist monoton fallend, also existiert $r = \lim_n r_n$.

Weiter gilt $d(z_n, z_{n+1})^2 \leq 2(r_n^2 - r_{n+1}^2) \Rightarrow$

$d(z_n, z_{n+k})^2 \leq 2(r_n^2 - r_{n+k}^2) \leq 2(r_n^2 - r^2)$, d.h. die z_n bilden eine Cauchyfolge, mit $z = \lim_n z_n$. Nun gilt $z_n \in A_n$ nach dem vorigen Lemma, also $z \in A_n$ für alle n, da A_n abgeschlossen ist. $\square$

Korollar Ist X ein vollst. CAT(0)-Raum, so ist X sphärisch vollständig.

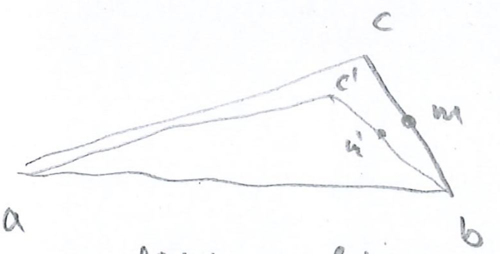
11. Satz Sei X ein geodätischer metrischer Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist CAT(0)-Raum

(ii) X erfüllt die CN-Ungleichung: für alle $a, p, q \in X$ mit m Mittelpunkt von $p \to q$ gilt

$$2\, d(a,m)^2 \le d(a,p)^2 + d(a,q)^2 - \frac{1}{2} d(p,q)^2.$$

Bew: Nach §2.9 gilt: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Angenommen, (ii) gilt. Elementargeometrische Vorüberlegung.



m', m Mittelpunkte

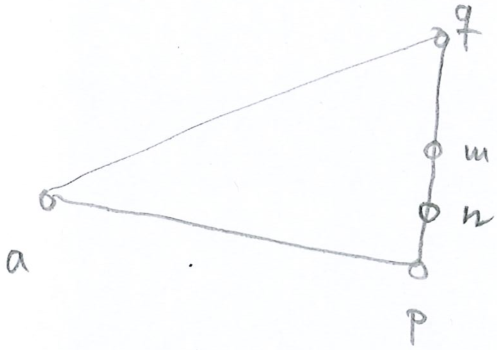
Zwei Dreiecke, $\|c-b\|_2^2 = \|c'-b\|_2^2$

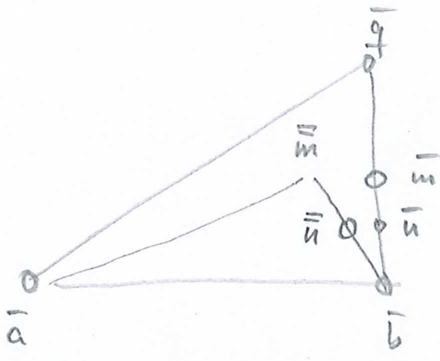
$\|a-c\|_2^2 \ge \|a-c'\|_2^2$

$\Rightarrow \|a-m'\|_2^2 \le \|a-m\|_2^2$

$\uparrow$ Parallelogrammgleichung.

Jetzt $a, p, q \in X$ mit Vergleichspunkten $\bar a, \bar p, \bar q$ in $\mathbb{R}^2$





CN $\Rightarrow d(a,m) \le \|\bar a - \bar m\|_2^2$ für Mittelpunkt m.

jetzt $\bar{\bar m}$ mit $\|\bar a - \bar{\bar m}\|_2 = d(a,m)$, $\|\bar b - \bar{\bar m}\|_2 = d(m,b)$

CN $\Rightarrow d(a,n) \le \|\bar a - \bar{\bar n}\|_2 \le \|\bar a - \bar n\|_2$ usw

Ist $d(p,q) = r$, so folgt für jedes $t \in [0,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ ($t = k \cdot 2^{-l}$, $k,l \in \mathbb{Z}$), dass $d(a, \gamma(\lambda t)) \leq \|\bar{a} - (1-t)\bar{p} - t\bar{q}\|_2$, $\lambda = d(p,q)$

$\gamma : p \to q$ Geodät. Da $[0,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ dicht ist, gilt die Ungleichung für alle $t \in [0,1]$, d.h. X ist CAT(0)-Raum. $\square$

<u>Korollar</u> Ein vollständiger metrischer Raum X ist genau dann ein CAT(0)-Raum, wenn gilt:

(i) X hat Mittelpunkte, d.h. $\forall p,q \in X \; \exists \, m \in X$

$$d(p,m) = d(m,q) = \frac{1}{2} d(p,q)$$

und

(ii) Ist $a, p, q, m \in X$ mit $d(p,m) = d(m,q) = \frac{1}{2} d(p,q)$, so gilt $2 \cdot d(a,m)^2 \leq d(a,p)^2 + d(a,q)^2 - \frac{1}{2} d(p,q)^2$

<u>Beweis</u> Aus (i) und der Vollständigkeit von X folgt, dass X geodätisch ist (ÜA). Nun benutze Satz §2.11. $\square$

12. <u>Def</u> Ein metrischer Raum X hat <u>ungefähre Mittelpunkte</u> (approximate midpoints), wenn es für alle $p,q \in X$, $\varepsilon > 0$ ein $m \in X$ gibt mit

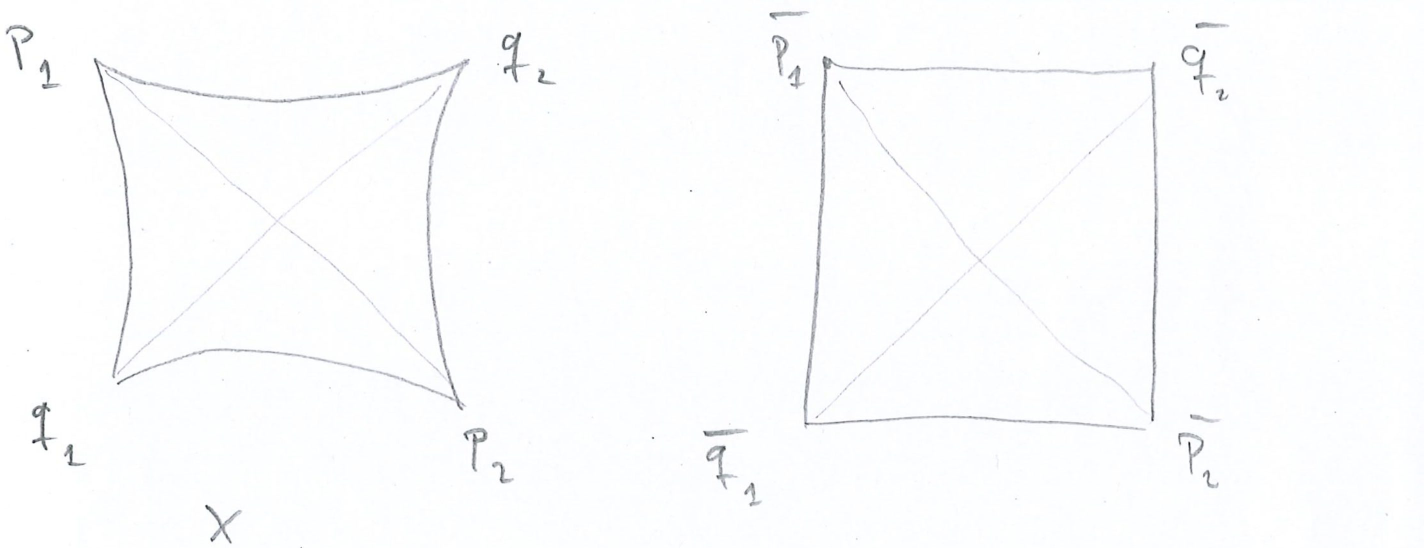
$$d(p,m),\ d(m,q) \leq \frac{1}{2} d(p,q) + \varepsilon$$

Er erfüllt die <u>CAT(0)-4-Punkt Bedingung</u>, falls für alle 4-Tupel (p_1, q_1, p_2, q_2) Punkte $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2 \in \mathbb{R}^2$ existieren mit:

$$d(p_i, q_j) = \|\bar{p}_i - \bar{q}_j\|_2 \quad i,j = 1,2$$

$$d(p_1, p_2) \leq \|\bar{p}_1 - \bar{p}_2\|_2$$

$$d(q_1, q_2) \leq \|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\|_2$$

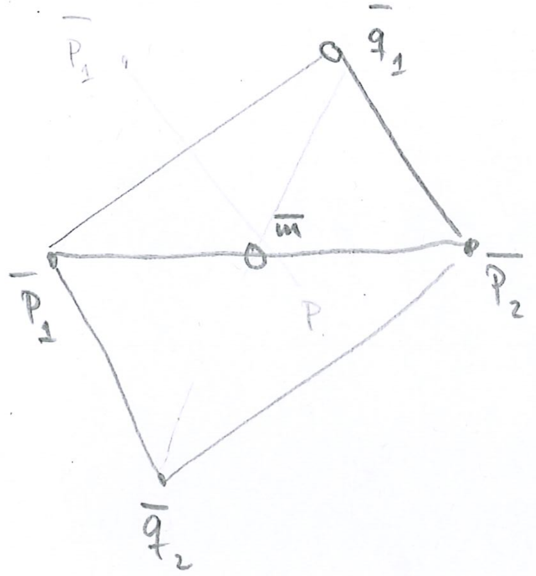


<u>Lemma</u> Jeder CAT(0)-Raum X hat ungefähre Mittelpunkte und erfüllt die CAT(0) 4-Punkt Bedingung.

<u>Beweis</u> Sei $p,q \in X$, sei m der Mittelpunkt von $p \to q$. Dann gilt $d(p,m) = d(m,q) = d(p,q)/2$.

Sei $p_1, q_1, p_2, q_2 \in X$. Wähle Vergleichsdreieck zu

$p_1 - p_2 - q_1$ und $p_1 - p_2 - q_2$ wie folgt in $\mathbb{R}^2$

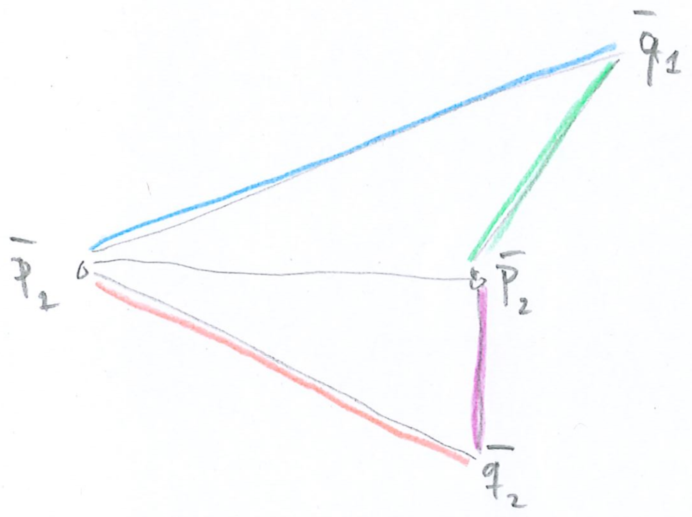


<u>1. Fall</u> Das Viereck in $\mathbb{R}^2$ ist konvex. Sei $\bar{m} \in \mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt der Diagonalen, sei m auf $p_1 \to q_2$ der entsprechende Punkt. Es gilt

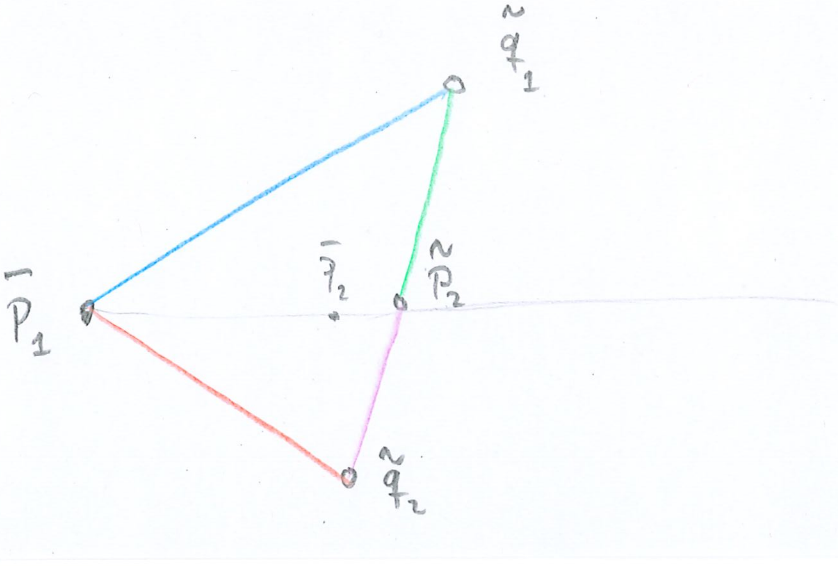
$$d(q_1, q_2) \leq d(q_1, m) + d(m, q_2) \underset{\substack{\uparrow \\ CAT(0)}}{\leq} \|\bar{q}_1 - \bar{m}\|_2 + \|\bar{m} - \bar{q}_2\|_2$$

$$= \|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\| \qquad (\checkmark)$$

<u>2. Fall</u> Der Innenwinkel bei $\bar{p}_2$ ist $> \pi$



Betrachte das Viereck



das durch Verschieben von $\bar{p}_2$ zu $\tilde{p}_2$ entsteht, mit gleichen Seitenlängen. Es gilt

$$\|\bar{p}_1 - \tilde{p}_2\|_2 \geq \|\bar{p}_1 - \bar{p}_2\|_2 = d(p_1, p_2) \quad \text{sowie}$$

$$\|\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\|_2 = \|\tilde{q}_1 - \tilde{p}_2\|_2 + \|\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2\|_2 = \|\bar{q}_1 - \bar{p}_2\|_2 + \|\bar{p}_2 - \bar{q}_2\|_2$$

$$= d(q_1, p_2) + d(p_2, q_2) \geq d(q_1, q_2) \,. \qquad (\checkmark)$$

<u>3. Fall</u> Der Innenwinkel bei $\bar{p}_2$ ist $> \pi$ (genauso)

$\square$

13. <u>Theorem</u> Sei X vollständiger metrischer Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist CAT(0)-Raum
(ii) X hat ungefähre Mittelpunkte und erfüllt die CAT(0) 4-Punkt Bedingung.

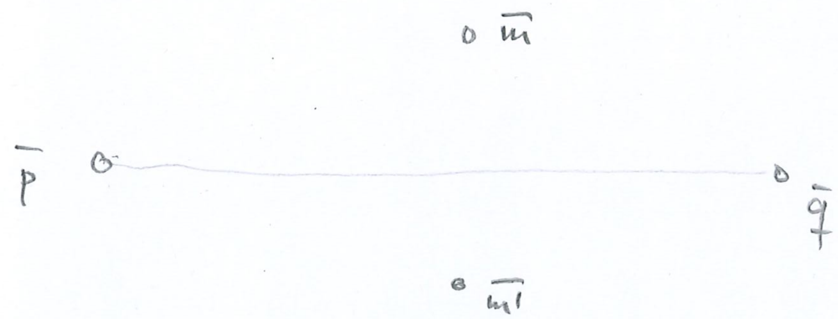
<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) mit Lemma §2.12.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

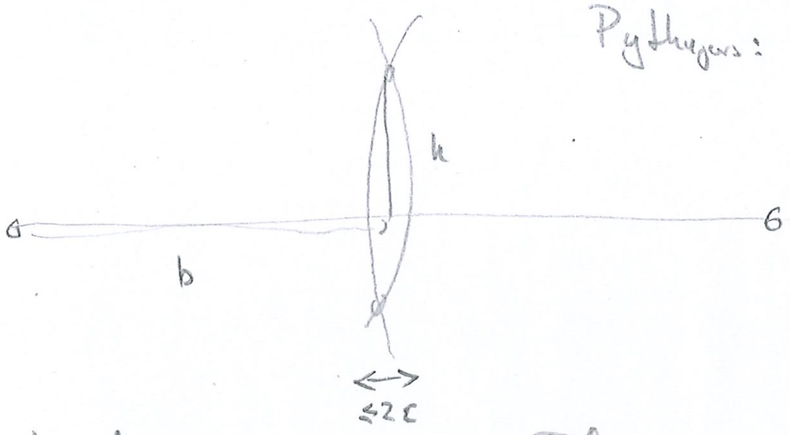
<u>Beh(a)</u> <u>X hat Mittelpunkt.</u> Sei $p, q \in X$, $\varepsilon > 0$.

Angenommen, $m, m' \in X$ mit $d(p,m), d(m',q) \leq \underbrace{\tfrac{1}{2} d(p,q)}_{=r} + \varepsilon$

Betrachte (p, m, q, m') mit CAT(0)-4-Punkt Bedingung.



Es gilt $\bar{m}, \bar{m}' \in \bar{B}_{r+\varepsilon}(\bar{p}) \cap B_{r+\varepsilon}(\bar{q})$



Pythagoras: $b^2 + h^2 = (r+\varepsilon)^2 \quad b \geq r$

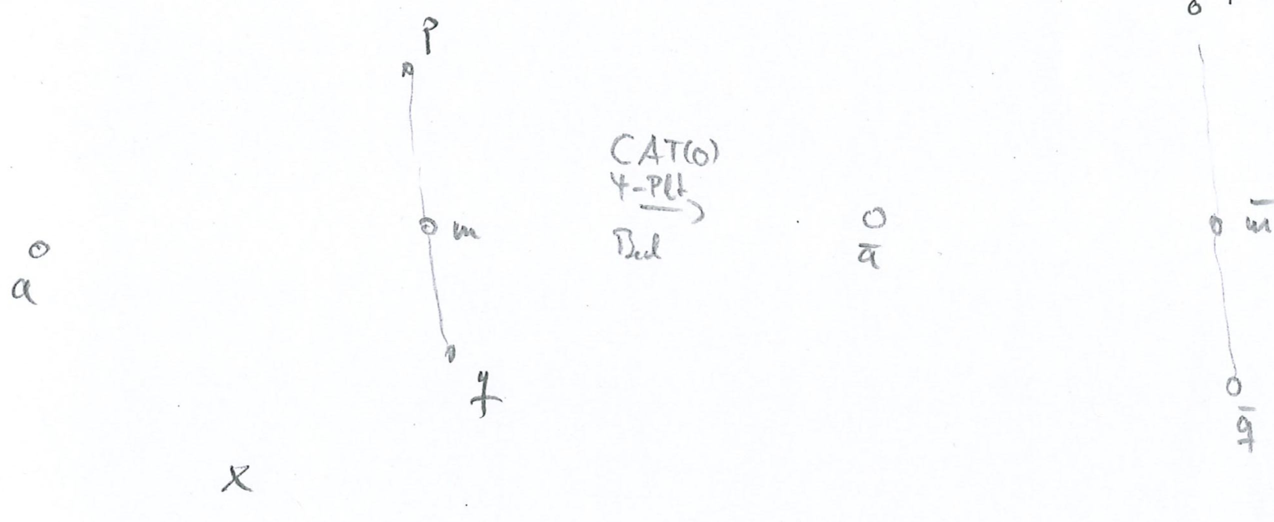
$h^2 + r^2 \leq r^2 + 2r\varepsilon + \varepsilon^2$

$\Rightarrow \|\bar{m} - \bar{m}'\|_2^2 \leq 2r\varepsilon + 5\varepsilon^2$

Ist also $(m_i)_{i \geq 1}$ eine Folge in X mit $d(p, m_i), d(m_i, q) \leq \frac{1}{2} d(p,q) + \frac{1}{i}$, so ist es eine Cauchy-Folge, mit Grenzwert $m \in X$. Es gilt

$d(p,m), d(m,q) \leq \frac{1}{2} d(p,q) \Rightarrow d(p,m) = d(m,q) = \frac{1}{2} d(p,q)$

Beh (b) X erfüllt CN-Ungleichung.



$\|\bar{p} - \bar{q}\| \geq d(p,q) = d(p,m) + d(m,q) = \|\bar{p} - \bar{m}\|_2 + \|\bar{m} - \bar{q}\|_2$

$\Rightarrow \bar{m}$ ist Mittelpunkt von $\bar{p} - \bar{q}$. Jetzt $d(a,m) \leq \|\bar{a} - \bar{m}\|_2$

$\Rightarrow$ CN-Ungleichung gilt $\square$

Parallelogramm-Gleichung

14. Theorem Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $i : X \hookrightarrow Z$ Vervollständigung von X. Dann ist Z ein CAT(0)-Raum.

Beweis Via i fassen wir X als dichten Teilraum in Z auf. Wir zeigen, dass Z die Bedingungen aus §2.13 erfüllt.

Sei $p, q \in Z$, sei $\varepsilon > 0$, sei $p', q' \in X$ mit
$$d(p,p') \leq \varepsilon/2, \quad d(q,q') \leq \varepsilon/2$$
sei $m \in X$ der Mittelpunkt. Dann gilt
$$d(p,m) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{1}{2} d(p',q'), \quad d(q,m) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{1}{2} d(p',q')$$
$$d(p',q') \leq d(p,q) + \varepsilon \Rightarrow d(p,m), d(q,m) \leq \tfrac{1}{2} d(p,q) + \varepsilon$$

Sei $(a,b,c,d) \in Z^4$, wähle Folgen $(a_i)\,(b_i)\,(c_i)\,(d_i)$ in X, die gegen a,b,c,d konvergieren, mit CAT(0)-Punkte Vergleichspunkten $(\bar a_i, \bar b_i, \bar c_i, \bar d_i)$. OE $\bar a_i = (0,0)$ für alle i. Dann sind die Folgen $(\bar a_i, \bar b_i, \bar c_i, \bar d_i) \in (\mathbb{R}^2)^4$ beschränkt, also OE konvergent. Im Grenzwert $(\bar a, \bar b, \bar c, \bar d)$ folgt die CAT(0)-4-Punkt Bedingung. □