

# § 3 Konstruktion und Beispiel

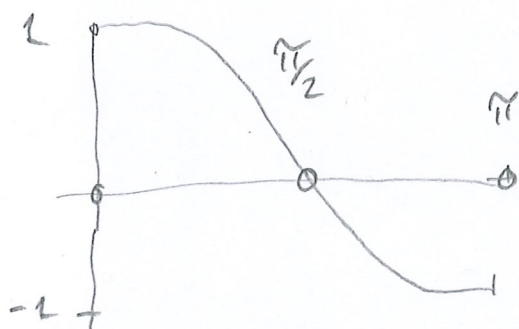
1. Erinnerung: Die Winkelmetrik auf der Sphäre

Sei  $\langle, \rangle$  das Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^m$ ,  
 $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^m u_j v_j$ ,  $\|u\|_2 = \langle u, u \rangle^{1/2}$ . Setze

$S^{m-1} = \{ u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\|_2 = 1 \}$  Einheitskugel.

Cauchy-Schwarz:  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$  und Gleichheit gilt, genau, wenn  $u, v$  linear abhängig sind.

Für  $u, v \in S^{m-1}$  definieren wir den sphärischen Abstand  $d(u, v) \in [0, \pi]$  durch  $\cos(d(u, v)) = \langle u, v \rangle$ . Man nennt  $d$  auch die Winkelmetrik.



Klar:  $d(u, v) = d(v, u) \geq 0$   
 $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 1$   
 $\Leftrightarrow u = v$

Satz Die Winkelmetrik ist ein Metrik  $(S^m, d)$  ist vollständig. Für  $m \geq 2$  ist die Metrik geodätisch

Beweis Wir zeigen die Dreiecksungleichung. Sei  $u, v, w \in S^{m-1}$ ,

OE sind die drei Punkte paarweise verschieden. Sei  $\alpha = d(u, v)$ ,  $\beta = d(u, w)$ ,  $\gamma = d(v, w)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma > 0$

Schritt  $v = \cos(\alpha)u + \sin(\alpha)v_\perp$   $\|v_\perp\|_2 = 1 = \|w_\perp\|_2$   
 $w = \cos(\beta)u + \sin(\beta)w_\perp$   $\langle u, v_\perp \rangle = 0 = \langle u, w_\perp \rangle$ .

Nun gilt

$$\langle v, w \rangle = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \langle v_{\perp}, w_{\perp} \rangle$$

$$\geq \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha+\beta)$$

Ist  $\alpha+\beta \geq \pi$ , so  $\alpha+\beta \geq r$ . Ist  $\alpha+\beta \leq \pi$ , so

$$\cos(r) \geq \cos(\alpha+\beta) \Rightarrow r \leq \alpha+\beta \quad \square$$

Da  $S^{m-1}$  kompakt ist, ist die Metrik  $d$  vollständig.

Ist  $u, v \in S^{m-1}$ ,  $u \neq \pm v$  schil  $v = \cos(\alpha)u + \sin(\alpha)v_{\perp}$

wie oben, siehe  $c(t) = \cos(t)u + \sin(t)v_{\perp}$   $\mapsto c: u \rightarrow v$

Geodäte. Ist  $u = -v$  und  $m \geq 2$  wähle  $v \in u^{\perp}$ ,  $\|v\|_2 = 1$ ,

$$c(t) = \cos(t)u + \sin(t)v. \quad \square$$

Bem  $(S^{m-1}, d)$  ist nicht CAT(0), denn  $S^{m-1}$  ist nicht kontrahierend. Für  $m \geq 2$  wird die CN-Umkehr nicht erfüllt:

$p, q, a \in S^{m-1}$  mit  $p = -q$  und  $a \perp p$ .

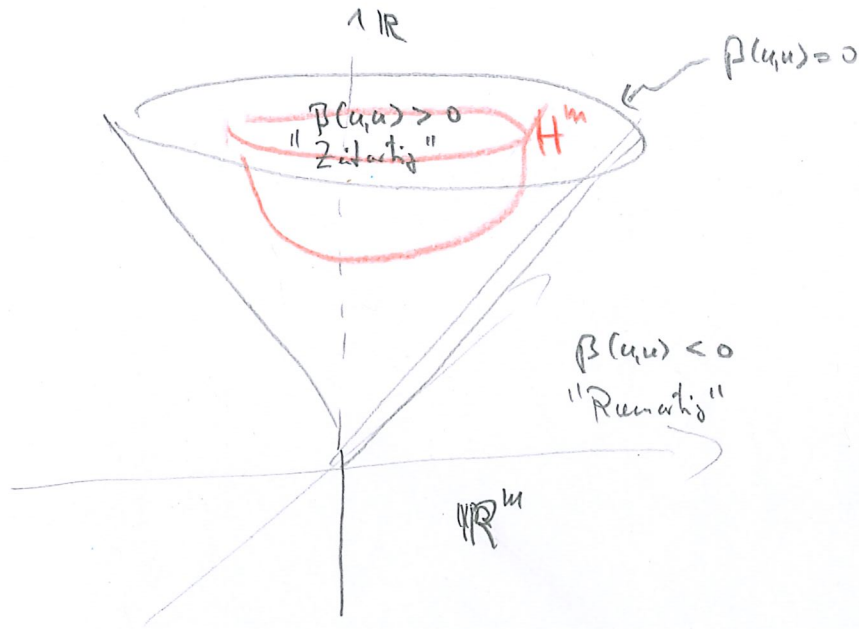
Für  $m = -a$  gilt  $2 \cdot d(m, a)^2 = 2 \cdot \pi^2$

$$d(p, a)^2 + d(q, a)^2 - \frac{1}{2}d(p, q)^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2} = 0$$

## 2. Der Hyperbolische Raum $H^m$ , $m \geq 1$ .

Für  $u = (u_0, u_1) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m$  definiere  $\beta(u, v) = u_0 v_0 - \langle u_1, v_1 \rangle$   
 $v = (v_0, v_1) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m$

$$\text{Set } H^m = \left\{ u \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m \mid u_0 > 0 \text{ und } \beta(u, u) = 1 \right\}$$



Diffco mapping  
 $H^m \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 $(u_0, u_1) \mapsto u_1$  mit  
 Inverse  
 $w \mapsto (\sqrt{1 + \|w\|^2}, w)$

Lemma A Ist  $\beta(u, u) > 0$  und  $\beta(u, v) = 0, v \neq 0$ ,  
 so ist  $\beta(v, v) < 0$ .

Beweis OE  $u_0 = 1$ . Wenn  $v_0 = 0$ , so  $\beta(v, v) < 0$   
 Wenn  $v_0 \neq 0$ , so OE  $v_0 = 1 \Rightarrow 1 = \langle u_1, v_1 \rangle \leq \|u_1\|_2 \cdot \|v_1\|_2$   
 $\Rightarrow \|v_1\|_2 > 1$ , weil  $\|u_1\|_2 < 1 \Rightarrow \beta(v, v) < 0$  □

Lemma B Ist  $u, v \in H^m$ , so ist  $\beta(u, v) \geq 1$   $\Leftrightarrow u = v$ .

Beweis  $u_0 \cdot v_0 = \sqrt{1 + \|u_1\|_2^2} \cdot \sqrt{1 + \|v_1\|_2^2} \geq 1 + \|u_1\|_2 \cdot \|v_1\|_2$   
 $\beta(u, v) = \frac{1}{u_0 v_0} \geq \frac{1}{1 + \|u_1\|_2 \cdot \|v_1\|_2} = \frac{1}{1 + \langle u_1, v_1 \rangle} = \frac{1}{1 + \langle u, v \rangle} \geq 1$

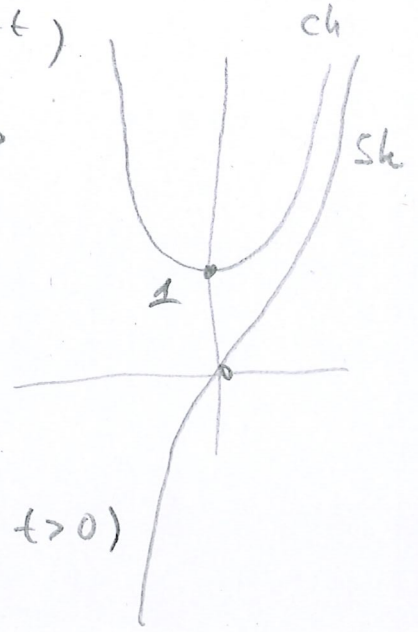
Wenn Gleichheit gilt, so folgt  $u_1 = v_1 \Rightarrow u_0 = v_0$  □



Wir definieren die hyperbolische Metrik auf  $H^m$  (40)  
 wie folgt. Erinnerung:  $ch(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

$$sh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

$$ch^2 - sh^2 = 1, \quad ch' = sh', \quad ch > \frac{1}{2} \cdot \exp$$



Definiere  $d$  durch:

$$d(u, v) \geq 0 \quad \text{und} \quad ch(d(u, v)) = \rho(u, v).$$

Da  $ch$  streng monoton ist ( $ch'(t) > 0$  für  $t > 0$ )  
 umkehrbar ( $ch(t) > \frac{1}{2}e^t$ ) und stetig, ist

$ch: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  ein Homöomorphismus. Nach  
 Lemma B ist  $\rho(u, v) \geq 1 \Rightarrow d$  ist wohldefiniert.

Wird  $d(u, v) = d(v, u) \geq 0$  und

$$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow \rho(u, v) = 1 \stackrel{\text{Lemma B}}{\Leftrightarrow} u = v$$

Satz Der hyperbolische Raum  $(H^m, d)$  ist ein  
 geodätisch metrischer Raum.

Beweis Dreiecksungleichung Sei  $u, v, w \in H^m, O \in E$

$u, v, w$  paarweise verschieden. Sei  $s = d(u, v)$   
 $t = d(u, w)$   
 $r = d(v, w)$

$$v = ch(s)u + sh(s)v_{\perp}$$

$$s, t, r > 0$$

$$w = ch(t)u + sh(t)w_{\perp}$$

$$\rho(u, v_{\perp}) = 0 = \rho(u, w_{\perp})$$

$$\rho(v_{\perp}, v_{\perp}) = -1 = \rho(w_{\perp}, w_{\perp})$$



7/41

Dann:  $\tilde{v} = v - \frac{\rho(u,v)}{\text{ch}(s)} u \Rightarrow v = \text{ch}(s)u + \tilde{v} \quad \rho(\tilde{v}, u) = 0$   
 $\rho(v, v) = \text{ch}^2(s) + \rho(\tilde{v}, \tilde{v}) = 1$   
 $\Rightarrow \rho(\tilde{v}, \tilde{v}) = -\text{sh}^2(s)$ , set  $v_{\perp} = \frac{1}{\text{sh}(s)} \tilde{v}$

Setzt  $\text{ch}(r) = \rho(v, w) = \text{ch}(s) \cdot \text{ch}(t) + \text{sh}(s) \cdot \text{sh}(t) \rho(v_{\perp}, w_{\perp})$

Da  $\rho$  auf  $u^{\perp}$  nach Lemma A negativ definit ist, gilt

$$\rho(v_{\perp}, w_{\perp})^2 \leq \rho(v_{\perp}, v_{\perp}) \cdot \rho(w_{\perp}, w_{\perp}) = 1$$

Also  $\text{ch}(r) \leq \text{ch}(s) \text{ch}(t) + \text{sh}(s) \text{sh}(t) = \text{ch}(s+t)$

$\Rightarrow r \leq s+t$  □

$H^m$  ist geodätisch  $u, v \in H^m \quad u \neq v$ .

Dann  $v = \text{ch}(s)u + \text{sh}(s)v_{\perp}$  wie oben  
 $s = d(u, v)$

$c(t) = \text{ch}(t)u + \text{sh}(t)v_{\perp}$  Kurve in  $H^m$  (\*)

$$\begin{aligned} \rho(c(t), c(r)) &= \text{ch}(t)\text{ch}(r) - \text{sh}(t)\text{sh}(r) \\ &\quad - \text{ch}(t)\text{ch}(-r) + \text{sh}(t)\text{sh}(-r) = \text{ch}(|t-r|) \end{aligned}$$

$\Rightarrow c$  ist Geodät in  $H^m$ , □

(\*)  $\rho(c(t), c(t)) = 1$  nach Konstruktion

$\Rightarrow c(t)_0 \neq 0$  für alle  $t \quad c(0)_0 > 0$

$\Rightarrow c(t)_0 > 0$  für alle  $t$ .

Lemma  $G^d(H^m, d)$  ist eigentlich und insbesondere vollständig.

Beweis Für  $r > 0$  und  $u \in H^m$  gilt

$$\bar{B}_r(u) = \left\{ \text{ch}(s)u + \text{sh}(s)w \mid 0 \leq s \leq r \text{ und } \begin{matrix} \beta(u, w) = 0 \\ \beta(w, w) = -1 \end{matrix} \right\}$$

Da  $\beta$  auf  $u^\perp$  negativ definit ist, ist die Menge kompakt. Also ist  $(H^m, d)$  eigentlich. □

Beobachtung: Ist  $u \in H^m$ ,  $r > 0$ ,  $v, w \in u^\perp$  mit

$$\beta(v, v) = -1 = \beta(w, w) \text{ so gilt für}$$

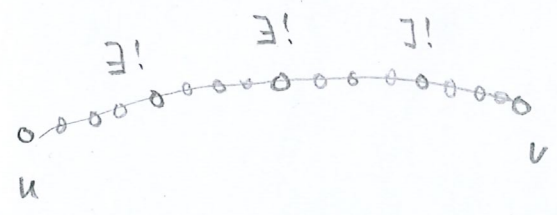
$$\begin{aligned} x &= \text{ch}(r)u + \text{sh}(r)v \\ y &= \text{ch}(r)u + \text{sh}(r)w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x, y) = 2r &\Leftrightarrow \text{ch}(2r) = \text{ch}(r)\text{ch}(r) - \text{sh}(r)\text{sh}(r)\beta(v, w) \\ &\Leftrightarrow \beta(v, w) = -1 \Leftrightarrow v = -w \end{aligned}$$

d.h.  $u$  ist der eindeutige Mittelpunkt von  $x$  und  $y$ ,

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{\beta(x, y)}}$$

Es folgt: Geodäten in  $H^m$  sind eindeutig.



#

3. Sei  $u \in H^m$ , sei  $V = u^\perp = \{v \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m \mid \beta(v, u) = 0\}$ . Nach § 3.2 Lemma A ist  $\beta$  auf  $V \cong \mathbb{R}^m$  negativ definit. Für  $v \in V$  setze wir  $\|v\| = \sqrt{-\beta(v, v)}$ . Damit ist  $(V, \|\cdot\|)$  isomorph zum euklidisch  $\mathbb{R}^m$   $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ . Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi: V \rightarrow H^m \text{ durch } \varphi(v) = \operatorname{ch}(\|v\|)u + \operatorname{sh}(\|v\|)\hat{v}$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|}v. \text{ Wegen } \operatorname{ch}(t) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \text{ und}$$

$$\operatorname{sh}(t) = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots = t \left( 1 + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + \dots \right) \text{ ist } \varphi \text{ glatt}$$

(beliebig oft diffbar). Für  $v \in V$  mit  $\|v\| = 1$  ist

$t \mapsto \varphi(tv)$  eine Geodäte. (\*)

Bem Es gilt  $V \cong T_u H^m$  und  $\varphi$  ist die Riemannsche Exponentialabbildung der Metrik  $g(v, v) = -\beta(v, v)$

Lemma  $\varphi$  ist ein Diffeomorphismus. Die Umkehrabbildung  $\varphi: H^m \rightarrow V$  ist 1-Lipschitz.

Beweis Sei  $w \in H^m \Rightarrow w = \operatorname{ch}(r)u + \operatorname{sh}(r)w_\perp$   
 $r = d(u, w)$ ,  $w_\perp \in V$ ,  $\|w_\perp\| = 1$  wie in § 2.2  
 $\Rightarrow w = \varphi(rw_\perp) \Rightarrow \varphi$  surjektiv. Weiter ist

$$\varphi(v) = \left( 1 + \frac{\|v\|^2}{2} + \dots \right) u + \underbrace{\left( 1 + \frac{\|v\|^2}{3!} + \frac{\|v\|^4}{5!} + \dots \right)}_{\frac{\operatorname{sh}(\|v\|)}{\|v\|}} v$$

$\Rightarrow \varphi$  injektiv  $\Rightarrow \varphi$  glatte Bijektion.



\* Ist  $v \in V = u^\perp$ , so folgt für  $\varphi(v) = \operatorname{ch}(\|v\|)u + \operatorname{sh}(\|v\|)\hat{v}$

denn:  $c(t) = \operatorname{ch}(t)u + \operatorname{sh}(t)\hat{v} \implies \rho(c(t), c(t)) = 1$

$c(0) = u_0 > 0$  wäre  $c(t) < 0$  für ein  $t$ , so  
 gäbe es  $t$  mit  $c(t) = 0 \nexists \rho(c(t), c(t)) = 1$ .

Wir berechnen die Ableitung von  $\varphi$ .

(44)

(a)  $v(t) = v + t \hat{v}$

$$\frac{d}{dt} \varphi(v(t)) \Big|_{t=0} = \operatorname{sh}(\|v\|)u + \operatorname{ch}(\|v\|)\hat{v}$$

(b)  $v(t) = \cos(t)v + \sin(t)w$ ,  $w \in V$ ,  $\rho(v,w) = 0$   $\|w\| = \|v\|$   
 $\|v(t)\| = \|v\| = \text{const.}$

$$\frac{d}{dt} \varphi(v(t)) \Big|_{t=0} = \operatorname{sh}(\|v\|)\hat{w}$$

$$= \frac{\operatorname{sh}(\|v\|)}{\|v\|} \cdot w$$

$\Rightarrow D\varphi$  hat in jedem Punkt  $v \in V$  maximale Rang  $\Rightarrow \varphi$  ist  
 Diffcomplett. Sei  $\varphi: H^m \rightarrow V$  die Umkehrabbildung.

Sei  $p, q \in H^m$ . Dann gibt es eine glatte Geodäte  $c: p \rightarrow q$

$c: [0, h] \rightarrow H^m$ ,  $h = d(p, q)$  mit  $\beta(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = -1$

$\forall t \in [0, h]$ . Setz  $\tilde{c} = \varphi \circ c: [0, h] \rightarrow V$ ,  $\tilde{c}$  glatt.

$\dot{c}(t) = D\varphi(\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}(t)$ . Schritte

$\tilde{c}(t) = v \in V$   $\dot{\tilde{c}}(t) = a \cdot \hat{v} + b \cdot w$   $\rho(v,w) = 0$   
 $\|w\| = 1$

$\dot{c}(t) = D\varphi(\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}(t) = a \cdot \operatorname{sh}(\|v\|)u + a \operatorname{ch}(\|v\|)\hat{v}$   
 $+ b \cdot \frac{\operatorname{sh}(\|v\|)}{\|v\|} w$

$\Rightarrow -1 \geq \beta(D\varphi(\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}(t), D\varphi(\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}(t))$   
 $= -a^2 \operatorname{sh}^2(\|v\|) - a^2 \operatorname{ch}^2(\|v\|) - b^2 \frac{\operatorname{sh}^2(\|v\|)}{\|v\|}$   
 $= -a^2 - b^2 \cdot \frac{\operatorname{sh}^2(\|v\|)}{\|v\|} \leq -(a^2 + b^2)$   
 $\geq 1$

$1 \geq a^2 + b^2 = \|\dot{\tilde{c}}(t)\|$

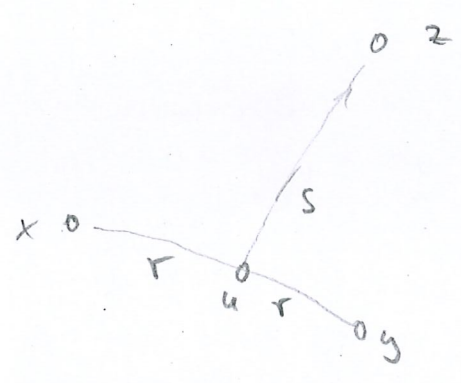
$\|c(h) - c(0)\| = \left\| \int_0^h \dot{c}(t) dt \right\| \leq \int_0^h \|\dot{c}(t)\| dt \leq h$



Theorem  $(H^m, d)$  ist ein euklidischer CAT(0)-Raum.  
 (Ausbeson. ist  $H^m$  vollständig.)

Beis. Wir haben schon gezeigt:  $H^m$  ist ein euklidischer  
 und geodätisch Raum. Sei  $u \in H^m, w, v \in V = u^\perp$  wie im  
 $r > 0$

Lemma,  $x = ch(r)u + sh(r)v \quad z = ch(s)u + sh(s)w$   
 $y = ch(r)u - sh(r)v$



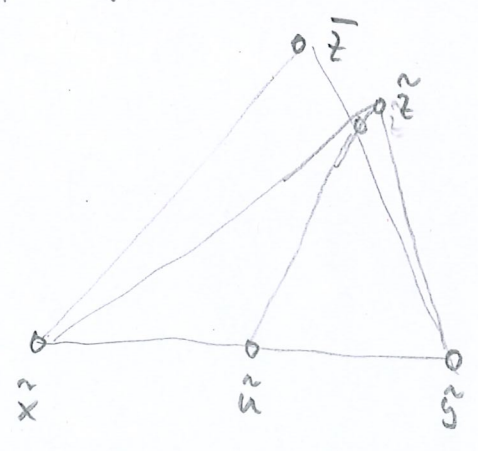
Dann ist  $u$  der eindeutige  
 Mittelpunkt von  $x$  und  $y$ . Setz

$\tilde{z} = \psi(z) \quad \tilde{u} = \psi(u) = 0$   
 $\tilde{x} = \psi(x)$   
 $\tilde{y} = \psi(y)$

$\Rightarrow \|\tilde{x} - \tilde{y}\| = 2r \quad \|\tilde{u} - \tilde{z}\| = s \quad \|\tilde{x} - \tilde{z}\| \leq d(x, z)$   
 $\|\tilde{y} - \tilde{z}\| \leq d(y, z)$

Ist also  $\tilde{z} \in V$  mit  $\|\tilde{z} - \tilde{x}\| = d(x, z) \geq \|\tilde{z} - \tilde{x}\|$   
 $\|\tilde{z} - \tilde{y}\| = d(y, z) \geq \|\tilde{z} - \tilde{y}\|$

Also  $\|\tilde{z} - \tilde{u}\| \geq \|\tilde{z} - \tilde{u}\| = d(z, u)$  vgl. § 2.11.



Also erfüllt  $H^m$  die  
 CN-Ungleichung. □



4. Definition Ein metrischer Raum  $(X, d)$  hat nicht positive Krümmung oder ist lokal CAT(0), wenn jedes Punkt  $p \in X$  ein Umgebungs  $U$  hat, so dass  $(U, d)$  ein CAT(0)-Raum ist.

5. Satz Ein Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  besteht aus einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer Riemannschen Metrik  $g$ , d.h. Für jedes  $p \in M$  ist

$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  eine positiv definite Bilinearform und  $g_p$  hängt glatt von  $p$  ab (die Matrixkoeffizienten  $g_{ij,p}$  in lokalen Koordinaten hängen glatt von  $g$  ab). Der

Levi-Civita Zusammenhang ist  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$   
 $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$   
 ( $\rightarrow$  Koszul-Formel)

Der Krümmungstensor  $R$  ist durch

$$(R(X, Y)Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

$$R(X, Y) + R(Y, X) = 0$$

$$g(R(X, Y)Z, W) + g(R(X, Y)W, Z) = 0$$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

$$g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, W)X, Y)$$

Für  $p \in M$ ,  $X, Y \in T_p M$ , linear unabhängig  
ist die Schnittkrümmung in  $p$  der Ebene  $H = \text{span}\{X, Y\}$

$$K(H) = \frac{g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \in \mathbb{R}$$

(hängt nur von  $H$  ab,  
nicht von der Basis  $X, Y$ )

Man sagt,  $(M, g)$  hat nicht-positive Schnittkrümmung,  
wenn für alle  $p \in M$  & alle 2-dimensionalen  $H \subseteq T_p M$  gilt  
 $K(H) \leq 0$ .

- ┌ I. Chavel, Riemannian Geometry ───┐
- B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry
- └ ◊ Bücher wählen ein anderes Vorzeichen für R ◊ ─┘

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen:  $(M, g)$  Riem.  
Manif. mit nicht-positiver Schnittkrümmung  $\Rightarrow (M, d)$   
hat nicht-positive Krümmung im Sinne von §3.4.

Die Metrik  $d$  ist definiert durch

$$d(p, q) = \inf \{ L(c) \mid c: [0, 1] \rightarrow M \text{ stw. glatt} \}$$
$$L(c) = \int_0^1 g(c'(t), c'(t))^{1/2} dt$$

(wenn  $M$  zusammenhängend ist).

#



6. Ist  $c: [a,b] \rightarrow M$  glatt, so ist ein glattes Vektorfeld  $X$  längs  $c$  ein glattes Abbildung

$$X: [a,b] \rightarrow TM \text{ mit } X_t \in T_{c(t)} M \quad \forall t \in [a,b].$$

Der Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$  induziert ein richtiges Differentialoperator  $\frac{D}{dt}$  auf solche Vektorfelder, mit

$$\frac{D}{dt} X = \nabla_{\dot{c}(t)} X \quad \text{falls } X \text{ glattes Vektorfeld auf } M \text{ ist.}$$

Es gilt für glatte Vektorfelder  $X, Y$  längs  $c$ , dass

$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = g\left(\frac{D}{dt} X, Y\right) + g\left(X, \frac{D}{dt} Y\right).$$

Die Kurve  $c$  heißt Riemannsche Geodäte, falls gilt

$$\frac{D}{dt} \dot{c} = 0. \quad \text{Es folgt } \frac{d}{dt} g(\dot{c}, \dot{c}) = 0, \text{ Riemannsche}$$

Geodäten haben konstante Geschwindigkeit. (gew.)

Die DGL  $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$  ist ein (nicht lineare) DGL

2. Ordnung. Der Existenz- und Eindeigkeitsatz für gew. DGL

sagt: Für jedes  $p \in M$  gibt es ein off.  $\mathcal{O}$ -Umgebung

$U \subseteq T_p M$  und ein glattes Abbildung

$$\exp_p: U \rightarrow M \quad \text{so, dass für jedes}$$

$X \in U$  die Kurve  $c(t) = \exp_p(tX)$  ein Riem. Geodäte ist

$$[0,1] \text{ ist, mit } \dot{c}(0) = X \quad \text{und} \quad c(0) = p.$$

Man nennt  $\exp_p$  die Riemannsche Exponentialfunktion.



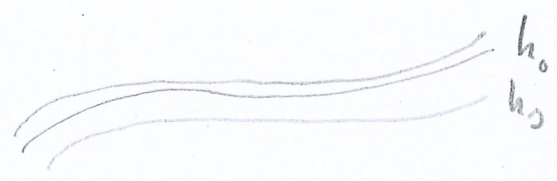
7. Jacobi Felder. Sei  $c: [0, r] \rightarrow M$  ein Riemannsch Geodät. Ein glattes Vektorfeld  $J$  längs  $c$  heißt Jacobi Feld, wenn gilt

$$R(J, \dot{c})\dot{c} + \left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J = 0 \quad (\text{Jacobi-Gleichung})$$

Das ist ein lineares gew. DGL 2-ter Ordnung. Folglich gibt es für jedes  $X, Y \in T_p M$ ,  $p = c(0)$  genau ein Jacobi-Feld  $J$  mit  $J_0 = X$ ,  $\frac{\nabla}{dt} J \Big|_{t=0} = Y$ .

Sei  $J(c)$  der 2m-dimensionalen Vektorraum der Jacobi-Felder längs  $c$ ,  $m = \dim(M) \geq 2$ .

Die Jacobi-Gleichung über stammt von einem Variationsprinzip. Sei  $h: [0, r] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  glatt,  $(t, s) \mapsto h_s(t)$ . Man nennt  $h$  geodätische Variation, wenn  $h_s$  für jedes  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  ein Riemannsch Geodät ist.



Dann gilt: setzt man  $c(t) = h_0$  und für  $t \in [0, r]$

$$J_t = \frac{d}{ds} (h_s(t)) \Big|_{s=0}, \text{ so ist } J \text{ ein Jacobi-Feld.}$$

Jedes Jacobi-Feld entsteht aus einer geodätischen Variation.

Beobachtung zu Jacobi-Feldern Si  $c: [0, r] \rightarrow M$  Riem. Geodäte  $c'(0) \neq 0$

(a) Si  $\alpha: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$  Abbildg. Dann ist  $\alpha(t)\dot{c}(t) = J_\alpha$  genau dann ein Jacobi-Feld, wenn  $\alpha$  glatt ist mit  $\alpha'' = 0$  ( $\Leftrightarrow \alpha(t) = a + b \cdot t, a, b \in \mathbb{R}$ ).

Denn:  $\alpha(t)\dot{c}(t)$  glatt  $\Leftrightarrow \alpha(t) = \frac{g(\dot{c}(t), \alpha(t)\dot{c}(t))}{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}$  glatt

$$R(J_\alpha, \dot{c}) = 0 \quad \frac{D}{dt} J_\alpha = \alpha'(t) \dot{c}(t) \quad \frac{D^2}{dt^2} J_\alpha = \alpha'' \cdot \dot{c}(t)$$

(b) Ist  $J \in J(c)$ , so auch  $X_t = g(\dot{c}(t), J_t) \dot{c}(t) \in J(c)$ .

$$\text{Denn: } R(X_t, \dot{c}(t)) = 0 \quad \frac{D}{dt} X_t = g(\dot{c}(t), \frac{D}{dt} J_t) \dot{c}(t)$$

$$\frac{D^2}{dt^2} X_t = g(\dot{c}(t), \frac{D^2}{dt^2} J_t) \dot{c}(t) = -g(\dot{c}(t), R(J_t, \dot{c}(t)) \dot{c}(t)) = 0$$

(c) Setze wie  $J''(c) = \{ J \in J(c) \mid J_t = \alpha(t) \dot{c}(t) \forall t \}$ ,  
so folgt  $J(c) = J^\perp(c) \oplus J''(c)$

$$J^\perp(c) = \{ J \in J(c) \mid g(\dot{c}(t), J_t) = 0 \forall t \}$$

$$\text{und } \dim J^\perp(c) = \dim J(c) - 2 = 2m - 2, \quad m = \dim(\pi) \geq 2$$

Lemma Si  $X$  ein glattes Vektorfeld längs ein glatte

Kurve  $c: [0, r] \rightarrow M$ , mit  $X_0 = 0$ . Dann gilt

$$\left. \frac{D}{dt} X_t \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} X_t$$

Beis. Si  $\gamma_0 \in T_{c(0)} M$ , so Setze  $\gamma_0$  fort zu glatte Vektorfeld

$\gamma$  längs  $c$ , mit  $\frac{D}{dt} \gamma = 0 = 0$  (das geht)

$$\text{Nun } \frac{d}{dt} g(\gamma_t, X_t) = g(\gamma_t, \frac{D}{dt} X_t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} g(\gamma_t, X_t)$$





8. Theorem (Ranch) Sei  $(M, g)$  ein Riemannsch  
 Mannigfaltigkeit, sei  $c: [0, r] \rightarrow M$  ein Riemannsch  
 Geodät mit  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 1$ . Sei  $J \in J^\perp(c)$ ,  
 sei  $\delta \in \mathbb{R}$  ein oben Schmelz der Schnittkurve  
 $K_{c(t)}$  längs  $c$ . Set  $\varphi(t) = \sqrt{g(J_t, J_t)}$ . Dann gilt:

- (i)  $\varphi''(t) + \delta \cdot \varphi(t) \geq 0$  für alle  $t$  mit  $\varphi(t) \neq 0$
- (ii) Der rechtsseitige Grenzwert  $\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi(t) - \varphi(0))$  existiert.

Ist  $\psi: [0, s] \rightarrow \mathbb{R}$  die eindeutige Lösung der DGL  
 $\psi'' + \delta \psi = 0$ ,  $\psi(0) = \varphi(0)$ ,  $\psi'(0) = \varphi'(0)$ , mit  $s \in [0, r]$   
 maximal mit  $\psi(t) > 0 \forall t \in (0, s)$ . Dann gilt  
 $\varphi(t) \geq \psi(t)$  für alle  $t \in [0, s]$ .

Bew

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\varphi(t)} \cdot g\left(\frac{D}{dt} J_t, J_t\right) \quad \text{wenn } \varphi(t) \neq 0$$

$$\varphi''(t) = \frac{-1}{\varphi(t)^2} \cdot \varphi'(t) \cdot g\left(\frac{D}{dt} J_t, J_t\right) + \frac{1}{\varphi(t)} \left( g\left(\frac{D^2}{dt^2} J_t, J_t\right) + g\left(\frac{D}{dt} J_t, \frac{D}{dt} J_t\right) \right)$$

$$= \frac{-1}{\varphi^3(t)} \cdot g\left(\frac{D}{dt} J_t, J_t\right)^2 + \frac{1}{\varphi(t)} \left( g\left(R(\dot{c}(t), J_t) \dot{c}(t), J_t\right) + g\left(\frac{D}{dt} J_t, \frac{D}{dt} J_t\right) \right)$$

$$\geq -\varphi(t) \cdot \delta + \frac{1}{\varphi^3(t)} \underbrace{\left( g(J_t, J_t) \cdot g\left(\frac{D}{dt} J_t, \frac{D}{dt} J_t\right) - g\left(\frac{D}{dt} J_t, J_t\right)^2 \right)}_{\geq 0 \text{ nach CSA}}$$

$$\geq -\varphi(t) \cdot \delta$$

Damit ist (i) gezeigt.



(ii) Ist  $J_0 \neq 0$ , so existiert  $\varphi'(0)$ .

Ist  $J_0 = 0$ , so ist  $\frac{d}{dt} J_t |_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} J_t$

und  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{g(t) J_t, t J_t} = \sqrt{g\left(\frac{d}{dt} J_t, \frac{d}{dt} J_t\right)}$ .

Sei  $\varphi$  Lsg von  $\varphi'' + \delta \varphi = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi(0)$   
 $\varphi'(0) = \varphi'(0)$ .

Es gilt  $(\varphi' \cdot \varphi - \varphi \cdot \varphi')' = \varphi'' \cdot \varphi + \varphi' \cdot \varphi' - \varphi' \cdot \varphi' + \varphi \cdot \varphi''$   
 $= (\varphi'' + \delta \varphi) \cdot \varphi$ . Auf  $(0, s)$  ist das  $\geq 0$ .

Folglich ist  $\varphi'(t) \varphi(t) - \varphi(t) \varphi'(t) \geq \varphi'(0) \varphi(0) - \varphi(0) \varphi'(0) = 0$

solange  $\varphi(t), \varphi'(t) > 0$ . Dann ist auch

$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' = \frac{\varphi'(t) \varphi(t) - \varphi(t) \varphi'(t)}{\varphi^2(t)} \geq 0$$

$\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = 1$  wenn  $\varphi(0) \neq 0$   $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t)}{\varphi'(t)} = 1$  sonst

$\Rightarrow \varphi'(t) \geq \varphi(t)$  solange  $\varphi(t), \varphi'(t) > 0$

$\Rightarrow \varphi'(t) \geq \varphi(t)$  auf  $[0, s]$ . □

Bemerkung: Die Lösung von  $\varphi'' + \delta \cdot \varphi = 0$

(a)  $\delta = 0$   $\varphi'' = 0 \Rightarrow \varphi(t) = a + bt$   $\varphi(0) = a$   
 $\varphi'(0) = b$

(b)  $\delta < 0$   $\omega = \sqrt{-\delta}$ ,  $\varphi(t) = a \cosh(\omega t) + \frac{b}{\omega} \sinh(\omega t)$   
 $\varphi(0) = a$   $\varphi'(0) = b$

(c)  $\delta > 0$   $\omega = \sqrt{\delta}$   $\varphi(t) = a \cos(\omega t) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega t)$   
 $\varphi(0) = a$   $\varphi'(0) = b$

Korollar Sei  $(M, g)$  ein Riem. Mant., sei

$c: [0, r] \rightarrow M$  ein Riem. Geodät mit  $g(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) = 1$ .

Angenommen,  $K \leq \delta$  gilt in jeder Punkt  $c(t)$ . Sei

$J \in J_{cc}^\perp$  mit  $J_0 = 0$ , sei  $\lambda = \sqrt{g\left(\frac{\nabla}{dt} J_t \Big|_{t=0}, \frac{\nabla}{dt} J_t \Big|_{t=0}\right)}$ .

Dann gilt: (i) ist  $\delta = 0$ , so ist  $\sqrt{g(J_t, J_t)} \geq \lambda t \quad \forall t \in [0, r]$

(ii) ist  $\delta < 0$ , so ist  $\sqrt{g(J_t, J_t)} \geq \frac{\lambda}{\omega} \text{sh}(\omega t) \quad \omega = \sqrt{-\delta}$   
 $\forall t \in [0, r]$

(iii) ist  $\delta > 0$ , so ist  $\sqrt{g(J_t, J_t)} \geq \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t), \omega = \sqrt{\delta}$   
 $\forall t \in [0, r] \cap [0, \frac{\pi}{\omega}]$

Beweis: Wie hat  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi'(0) = \lambda$  im vorige Thm.

□

#

9. Satz Sei  $(M, g)$  ein Riem. Mant., sei  $p \in M$ ,

sei  $U \subseteq T_p M$  der Definitionsbereich von  $\exp_p$ .

Dann gilt für  $X, Y \in T_p M$  mit  $tX \in U$ , dass

$$\frac{d}{ds} \exp_p(t(X+sY)) = J_t$$

wobei  $J_t$  das Jacobi-Feld längs  $c(t) = \exp(tX)$

ist mit  $J_0 = 0$  und  $\frac{\nabla}{dt} J_t \Big|_{t=0} = Y$ .



Bew: Betrachte die geodätisch Variation

$h_s(t) = \exp_p(t(X+sY))$ . Das zugehörige Jacobi Feld  $J$  erfüllt also  $J_t = \frac{d}{ds} \exp_p(t(X+sY)) \Big|_{s=0}$ .

Inskosch ist  $J_0 = 0$  und  $\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial h}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{s=0, t=0} = \frac{\nabla}{ds} (X+sY) \Big|_{s=0} = Y \Rightarrow \frac{\nabla}{dt} J_t \Big|_{t=0} = Y$  □

Korollar Sei  $(M, g)$  ein Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \leq \delta$ . Sei  $p \in M$ , sei  $U \subseteq T_p M$  der Definitionsbereich der Riemannsche Exponential Abbildung.

- (i) Wenn  $\delta \leq 0$ , so hat  $\exp_p: U \rightarrow M$  in jedem  $X \in U$  maximalen Rang  $m = \dim(M)$
- (ii) Wenn  $\delta > 0$ , so hat  $\exp_p: U \rightarrow M$  in jedem  $X \in U$  mit  $\sqrt{g(X, X)} < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  maximalen Rang. □

Wir brauchen nun ein Kriterium über Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Ist  $M$  zusammenhängend und ist  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine stetig gestrichelte glatte Kurve, so ist  $L(c) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$  die Länge von  $c$ .

Der Abstand  $d(p, q)$  ist das Infimum der Längen aller stetig gestrichelten glatten Kurven von  $p$  nach  $q$ . Wir nennen  $c$  eine

Kürzeste, falls  $d(c(0), c(1)) = L(c)$  gilt. Wenn

$c$  eine Kürzeste ist, so gibt es eine Riemannsche Geodäte

$\tilde{c}: [0, r] \rightarrow M$ , sodass  $c$  ein Reparametrisierung von  $\tilde{c}$  ist,

$dt = L(c) = L(\tilde{c})$ . Der metrische Raum  $(M, d)$  trägt die Topologie von  $M$ .



10. Satz Sei  $(M, g)$  ein Riem. Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ .

Dann gibt es ein Umgeb.  $W$  von  $p$  und ein  $\epsilon > 0$  so, dass für alle  $q_1, q_2 \in W$  mit  $d(q_1, q_2) < \epsilon$  genau ein kürzeste Geodäte von  $q_1$  nach  $q_2$  existiert. [Chavel §I.6]

Korollar Ist  $c$  ein Geodäte kurven  $d$  in  $M$ , so ist

$c$  ein Riemannsch Geodäte, mit  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 1$ .

Ist  $c$  ein Riemannsch Geodäte mit  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 1$ ,

so ist  $c$  lokal ein Geodäte ( $\forall t \exists \epsilon \mid s_1 - t, s_2 - t < \epsilon \implies d(c(s_1), c(s_2)) = |s_1 - s_2|$ )

Ist  $c$  ein Riemannsch Geodäte mit  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 1$ , die ein-kürzeste ist, so ist  $c$  ein Geodäte bzgl.  $d$ .

11. Theorem (Hopf-Rinow) Sei  $(M, g)$  ein reell. Riem. Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:

- (i) Für jedes  $p \in M$  ist  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert
- (ii) Für ein  $p \in M$  ist  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert
- (iii)  $(M, d)$  ist einfachlich
- (iv)  $(M, d)$  ist vollständig.

Wir sagen dann kurz,  $(M, g)$  ist ein vollständige

Riem. Mannf.. In diesem Fall gibt es für alle  $p, q \in M$

ein Riem. Geodäte  $c: [0, r] \rightarrow M$ ,  $c(0) = p$ ,  $c(r) = q$   $r = d(p, q)$

Inbesondere ist  $(M, d)$  dann geodätisch.

[Beweis Chavel §I.7]

12. Theorem Sei  $(M, g)$  ein vollständig Riem. Met.

Dann hat  $(M, d)$  Mittelwerts- und jedes Mittelpunkt  $z$  von  $p, q$  liegt auf einem (Riem.) Geodäten von  $p$  nach  $q$ .

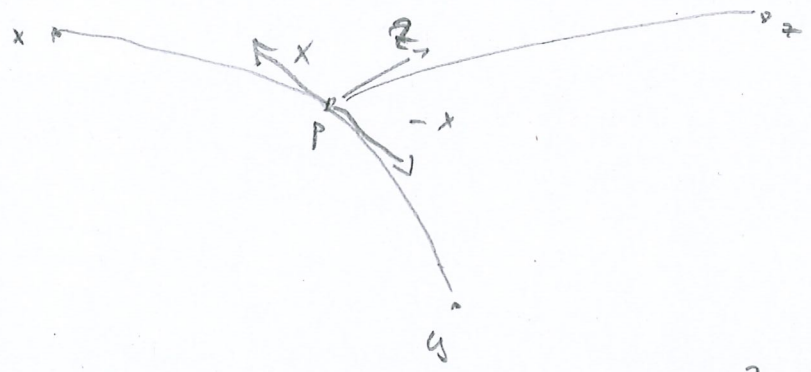
Falls für jedes  $p \in M, X, Y \in T_p M$  gilt  $d(\exp_p(X), \exp_p(Y))^2 \geq g(X-Y, X-Y)$ , so ist  $(M, d)$  ein CAT(0)-Raum.

Beis  $(M, d)$  ist Geodätisch, also gibt es Mittelpunkt.

Ist  $z$  Mittelpunkt von  $p, q$ , so gibt es ein Geodät  $c_1$  von  $p$  nach  $z$  und ein Geodät  $c_2$  von  $z$  nach  $q$ . Die Kombination  $c$  von  $c_1$  und  $c_2$  ist ein Geodät von  $p$  nach  $q$  (!), also ein Riem. Geodäte.

Sei  $x, y, z \in M$ ,  $p$  der Mittelpunkt von  $x$  und  $y$ .

$$\begin{aligned} \text{Somit } x &= \exp_p(X), & y &= \exp_p(-X) & g(X, X) &= d(x, p)^2 = d(y, p)^2 \\ z &= \exp_p(Z) & g(Z, Z) &= d(p, z)^2 & X, Z &\in T_p M \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Sei } \bar{Z} \in T_p M \text{ mit } & g(\bar{Z}-X, \bar{Z}-X) = d(x, z)^2 \geq g(Z-X, Z-X) \\ & g(\bar{Z}+X, \bar{Z}+X) = d(z, y)^2 \geq g(Z+X, Z+X) \end{aligned}$$

$\Rightarrow X, -X, \bar{Z}$  Verschiebung durch zu  $x, y, z$

Parallelogramm flächig  $\Rightarrow g(\bar{Z}, \bar{Z}) \geq g(Z, Z)$

Also ist  $(M, d)$  ein CAT(0)-Raum nach § 2.11.  $\square$



Wir wenden dies auf Riem. Mannf. mit  $K \leq 0$  an.

13. Theorem Sei  $(M, g)$  eine vollständig Riem. Mannf. mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$  in jedem Punkt  $p$ .

Dann ist die universelle Überlagerung  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  ein vollst. Riem. Mannf. mit  $K \leq 0$ , die Überlagerungsabbildung  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  ist lokal isometrisch und 1-Lipschitz. Weiter ist  $\tilde{M}$  diffeomorph zu  $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ .

Bew: Sei  $p \in M$ , setze  $\tilde{M} = T_p M$  und  $\pi = \exp_p$ .

Nach §3.9 hat  $\pi$  in jedem  $X \in T_p M$  volle Krümmung.

Wir definieren  $\tilde{g}$  auf  $\tilde{M}$  durch  $u, v \in T_p M$

$$\tilde{g}_u(x, y) = g(D\pi(u)(x), D\pi(u)(y))$$

Damit ist  $\pi$  eine lokale Isometrie. Weiter ist  $\tilde{M}$  vollständig, denn für  $0 \in \tilde{M}$  ist  $\exp_0: T_0 \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  die Identität (Ursprungspunkte in  $\tilde{M}$  sind Geodäten!).

Damit ist  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  eine Überlagerung.

[Chap. IV.1.2].

Ist  $p, q \in \tilde{M}$ ,  $c: [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  Kurve,  $c(0) = p$ ,  $c(1) = q$

$L(\pi \circ c) = L(c)$ ,  $\pi \circ c$  stückweise geod. von  $\pi(p)$  nach  $\pi(q)$ .

Ab.  $d_{\tilde{M}}(p, q) \geq d_M(\pi(p), \pi(q))$ .





14. Theorem (Cartan-Hadamard) Sei  $(M, g)$  ein vollständig Riem. Mant. mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$ ,  $\dim(M) \geq 2$ .

Dann hat  $(M, d)$  nicht positive Krümmung im Sinne von § 3.4.

Weiter sind äquivalent:

- (i)  $(M, d)$  ist CAT(0)
- (ii)  $M$  ist kontrahierbar
- (iii)  $M$  hat triviale Fundamentalgruppe
- (iv)  $M$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^m$ ,  $m = \dim(M)$

Beweis Es gilt (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Leftarrow$  (iv). #

Sei  $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$  die universelle Überlagerung, vgl § 3.13,  $\tilde{g}$  die entsprechende Riemannsche Metrik auf  $\tilde{M}$  so, dass  $\pi$  eine lokale Isometrie ist.

Beh.  $(\tilde{M}, d_{\tilde{M}})$  ist CAT(0)-Raum.

Denn: Sei  $\gamma \in \tilde{M}$ , betrachte  $\exp_{\gamma}: T_{\gamma} \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ .

Nach § 3.13 ist das ein Diffeomorphismus. Für  $X, Y \in T_{\gamma} \tilde{M}$

gilt  $\frac{d}{ds} \exp_{\gamma}(t(X+sY))|_{s=0} = J_t$ ,  $J_t$  Jacobi-Feld

längs  $c(t) = \exp_{\gamma}(tX)$ , vgl § 3.9. Ist  $g(X, X) = 1$

und  $g(X, Y) = 0$ , so folgt mit § 3.8 (Rund)

$$\sqrt{\tilde{g}(J_t, J_t)} \geq t \sqrt{\tilde{g}(Y, Y)} = \sqrt{\tilde{g}(tY, tY)}$$

so wie  $\tilde{g}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 1$ . Ist also  $Z \in T_{\gamma} \tilde{M}$ ,

so ist  $\tilde{g}(D \exp_{\gamma}(X)(Z), D \exp_{\gamma}(X)(Z)) \geq \tilde{g}(Z, Z)$ .

Ist nun  $x, y \in T_p(\tilde{M})$  beliebig,  $x = \exp_p(X)$   
 $y = \exp_p(Y)$

und ist  $c: [0, r] \rightarrow \tilde{M} \rightarrow$  Riem. Geodät,  $c(0) = x$   $r = d_{\tilde{M}}(x, y)$   
 $c(r) = y$

so sieht  $c(t) = \exp_p(\tilde{c}(t))$ ,  $\tilde{c}: [0, r] \rightarrow T_p \tilde{M}$   
 $\tilde{c}(0) = X$   
 $\tilde{c}(r) = Y$   
 $\sqrt{\tilde{g}(X-Y, X-Y)} = \int_0^r \sqrt{\tilde{g}(\dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t))} dt$

$\leq r$  weil  $\tilde{g}(\dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t)) \leq \tilde{g}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$

Nach § 3.12 ist  $(\tilde{M}, d_{\tilde{M}})$  ein CAT(0)-Raum  $\square$

Es folgt daraus:  $M$  ist lokal CAT(0)-Raum, weil lokal isometrisch zu  $\tilde{M}$ .

Was gilt nun: (iii)  $\Rightarrow M = \tilde{M} \Rightarrow M$  ist CAT(0), d.h. (iii)  $\Rightarrow$  (i) und (iii)  $\Rightarrow$  (iv), weil  $\tilde{M} \cong T_p \tilde{M}$  nach

§ 3.13.  $\square$

15. Bemerkungen (i) Es gibt (glatte) kompakte  $m$ -Mannigfaltigkeit  $M$ ,  $m \geq 5$  mit ein Metrik  $d$  nicht positive Krümmung, so, dass jede universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^m$  ist.  
Also existiert auf  $M$  keine Riem. Metrik  $g$  mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$  [Davis-Januszkiewicz]

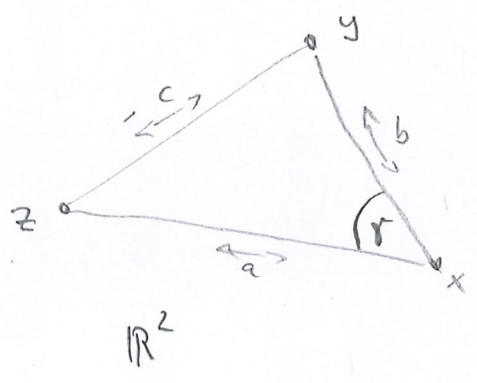
(ii) Es gibt glatte kompakte 4-Mannigfaltigkeit  $M$  mit ein Metrik  $d$  nicht positive Krümmung, die keine Riem. Metrik  $g$  besitzt mit  $K \leq 0$

[Sathaye]



Bemerkung Ist  $(M, g)$  ein Riemannsch Riemannsfaktori-  
 mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$ , so ist  $(M, d)$  ein  
 Raum nicht positiver Krümmung im Sinne von § 3.4.  
 Der Beweis ist ähnlich wie in 3.14, lokal.

16. Wir betrachte nun Winkel. Erinnerung an die Schule:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Es folgt:

DEF Sei  $x, y, z$  Punkte im metrisch Raum  $(X, d)$ ,  $y, z \neq x$

Wir definieren den Vergleichswinkel  $\bar{\Delta}_x(y, z) \in [0, \pi]$  durch

$$\cos(\bar{\Delta}_x(y, z)) = \frac{d(x, y)^2 + d(x, z)^2 - d(y, z)^2}{2 d(x, y) \cdot d(y, z)}$$

(Winkel bei  $\bar{x}$  im Vergleichsdreieck  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  in  $\mathbb{R}^2$ )

Sei  $c_i: [0, r_i] \rightarrow X$  Geodäten in  $X$ ,  $c_i(0) = p = c_2(0)$ ,  $(i=1, 2)$

$r_1, r_2 > 0$ . Der obere Winkel (Alexandrov-Winkel) ist

$$\Delta(c_1, c_2) = \limsup_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \bar{\Delta}_p(c_1(t_1), c_2(t_2))$$

Falls die Geodäten



Lemma Ist  $(X, d)$  ein CAT(0)-Raum,

$c_i: [0, r_i] \rightarrow X$  Geodäten,  $i=1, 2$ ,  $c_1(0) = c_2(0) = p$ , so gilt

für  $t_i \in (0, r_i]$

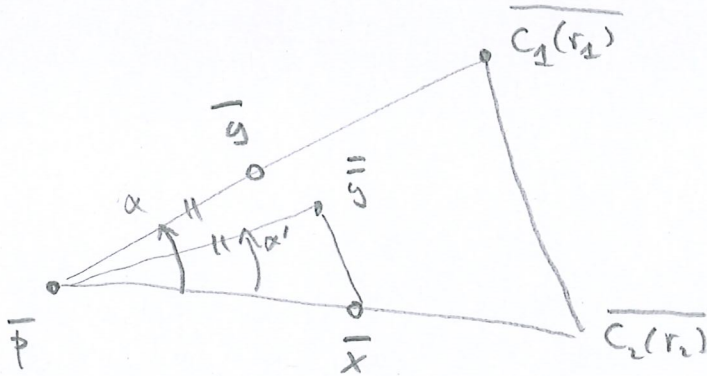
$$\overline{\angle}_p(c_1(t), c_2(t)) \leq \overline{\angle}(c_1(r_1), c_2(r_2))$$

und insbesondere

$$\angle(c_1, c_2) = \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \overline{\angle}(c_1(t_1), c_2(t_2))$$

Bew. Betrachte Vergleichsdreieck

$$\begin{aligned} \|\overline{y} - \overline{x}\| &\leq \|y - x\| \\ &= d(c_1(t_1), c_2(t_2)) \end{aligned}$$



$\alpha' \leq \alpha$  nach Cosinus-Satz.

$i=1, 2, 3, r_i > 0$

17. Satz Sei  $c_i: [0, r_i] \rightarrow X$  Geodäten im metrischen Raum  $(X, d)$  mit  $p = c_1(0) = c_2(0) = c_3(0)$ . Dann gilt die "Dreiecksungleichung"

$$\angle(c_1, c_3) \leq \angle(c_1, c_2) + \angle(c_2, c_3)$$

Beweis Angenommen, das ist falsch. Dann gibt es  $\delta > 0$

mit  $\angle(c_1, c_3) > \angle(c_1, c_2) + \angle(c_2, c_3) + 3\delta$ .

Es gibt  $\varepsilon > 0$  so, dass es gilt:  $c_1, c_2, c_3: (0, \varepsilon) \rightarrow X$

$$\overline{F}_p(c_1(t_1), c_2(t_2)) < F(c_1, c_2) + \delta \quad \forall t_1, t_2 \in (0, \varepsilon)$$

$$\overline{F}_p(c_2(t_2), c_3(t_3)) < F(c_2, c_3) + \delta \quad \forall t_2, t_3 \in (0, \varepsilon)$$

Wahl gibt es  $t_1, t_3 \in (0, \varepsilon)$  mit

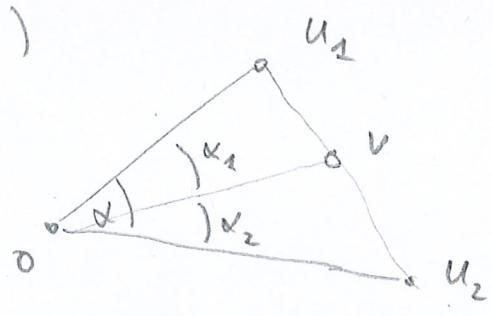
$$F(c_1, c_3) < \overline{F}_p(c_1(t_1), c_3(t_3)) + \delta$$

Sei  $u_1, u_3 \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|u_i\|_2 = c_i \quad i=1,3$  und

$$F_0(u_1, u_2) = \alpha \quad \text{mit}$$

$$\overline{F}_0(c_1(t_1), c_3(t_3)) > \alpha > F(c_1, c_3) - \delta$$

(Es folgt  $\alpha < \pi$ .)



Es gilt nun  $\|u_1 - u_3\|_2 < d(c_1(t_1), c_3(t_3))$  sowie

$$\alpha > F(c_2, c_2) + F(c_2, c_3) + 2\delta$$

Also existiert  $v$  auf der Strecke  $u_1 u_2$  mit

$$F_0(u_1, v) = \alpha_1 > F_0(c_1, c_2) + \delta$$

$$F_0(v, u_3) = \alpha_2 > F_0(c_2, c_3) + \delta$$

Nun gilt  $t_i = \|v\|_2 \leq \max\{\|u_1\|_2, \|u_3\|_2\} < \varepsilon$  (CSU)

$$\Rightarrow \overline{F}_p(c_1(t_1), c_2(t_2)) < F_0(u_1, v) \Rightarrow d(c_1(t_1), c_2(t_2)) < \|u_1 - v\|$$

$$\overline{F}_p(c_2(t_2), c_3(t_3)) < F_0(v, u_3) \Rightarrow d(c_2(t_2), c_3(t_3)) < \|u_3 - v\|$$

$$\Rightarrow d(c_1(t_1), c_3(t_3)) > \|u_1 - u_3\| = \|u_1 - v\| + \|v - u_3\|$$

$$> d(c_1(t_1), c_2(t_2)) + d(c_2(t_2), c_3(t_3)) \quad \square$$



18. Satz Sei  $(X, d)$  ein geodätischer metrischer Raum. (63)

Dann sind äquivalent: (i)  $X$  ist CAT(0)-Raum

(ii) Sind  $c_i: [0, r_i] \rightarrow X$  Geodäten,  $r_i > 0$ ,  $i=1,2$ ,  $c_1(0) = c_2(0) = p$ ,  
so gilt für alle  $t_i \in (0, r_i]$ , dass

$$\overline{\angle}_p(c_1(t_1), c_2(t_1)) \leq \overline{\angle}_p(c_1(r_1), c_2(r_1))$$

(iii) Sind  $c_i: [0, r_i] \rightarrow X$  Geodäten,  $r_i > 0$ ,  $i=1,2$ ,  $c_1(0) = c_2(0) = p$   
so gilt für den oben Winkel

$$\angle(c_1, c_2) \leq \overline{\angle}_p(c_1(r_1), c_2(r_1))$$

(iv) Sind  $c_i: [0, r_i] \rightarrow X$  Geodäten,  $r_i > 0$ ,  $i=1,2$ ,  $c_1(0) = c_2(0) = p$   
und sind  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$  Vektoren mit  $\|u_i\|_2 = r_i$  und

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \cos(\alpha), \quad \alpha = \angle(c_1, c_2), \text{ so ist}$$

$$\|u_1 - u_2\| \leq d(c_1(r_1), c_2(r_1)).$$

Beweis (i)  $\Rightarrow$  (ii) mit Lemma § 3.16.

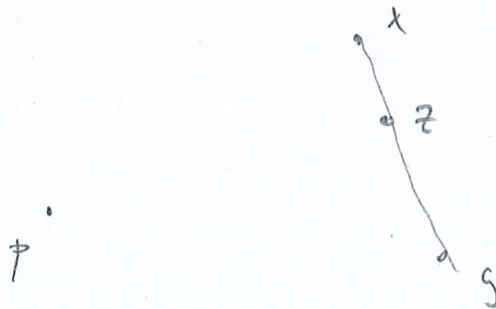
(ii)  $\Rightarrow$  (iii) nach Definition.

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) nach Cosinus-Satz.

Zeig (iii)  $\Rightarrow$  (i) Sei  $p, x, y \in X$   $p \neq x, y$ ,  $x \neq y$ .

Sei  $c: [0, r] \rightarrow X$  Geodät von  $x$  nach  $y$ . Sei  $z = c(s)$

für  $s \in (0, r)$ .





Sei  $\bar{p}, \bar{x}, \bar{y}$  Vergleichsdreieck,  $\bar{z}$  auf Strecke  $\bar{x}\bar{y}$   
mit  $\|\bar{z} - \bar{x}\|_2 = d(x, z) = r$ . Zz:  $d(p, z) \leq \|\bar{z} - \bar{p}\|_2$ .

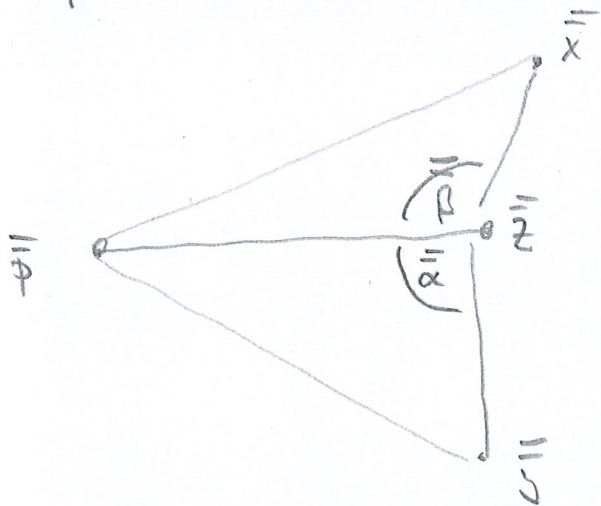
Sei  $\alpha C_3 \xrightarrow{x} p$ ,  $C_1: p \rightarrow x$  Gerade  
 $C_2: p \rightarrow y$

$\alpha = \sphericalangle(C_3, [t \mapsto c(s+t)])$   $r = \sphericalangle$

$\beta = \sphericalangle(C_3, [t \mapsto c(s-t)])$

$\pi = \sphericalangle([t \mapsto c(s+t)], [t \mapsto c(s-t)])$

also  $\alpha + \beta \geq \pi$ . Jetzt Vergleichsdreieck zu  
 $p-x-z$  und  $p-y-z$  wie folgt



$\alpha\bar{\phantom{x}} \geq \alpha$   
 $\beta\bar{\phantom{x}} \geq \beta$   
 $\Rightarrow \alpha\bar{\phantom{x}} + \beta\bar{\phantom{x}} \geq \pi$

Es folgt  $\|\bar{x} - \bar{y}\|_2 \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_2 \Rightarrow \underbrace{\|\bar{p} - \bar{z}\|_2}_{=d(p,z)} \leq \|\bar{p} - z\|_2$  □

#

Wir machen nun Beobachtung zum Alexandrov-Winkel [65]

19. Satz Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum.

Für Vektoren  $u, v \neq 0$  betrachte die Geraden

$$c_1(t \cdot \|u\|) = tu \quad c_2(t \|v\|) = tv. \quad \text{Dann existiert}$$

$$\text{der Limes} \quad \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{t^2 + s^2 - d(c_1(s), c_2(t))^2}{2ts} \quad \text{genau dann,}$$

wenn  $(V, \|\cdot\|)$  ein Prähilbertraum ist, d.h. wenn die Parallelogrammgleichung gilt.

Beis. (ÜA) In jedem Prähilbertraum gilt

$$d(c_1(s), c_2(t))^2 = s^2 + t^2 - 2 \langle c_1(s), c_2(t) \rangle \quad \text{↪ der Grenzwert existiert}$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Wenn der Grenzwert existiert, so folgt mit  $s=t$

$$\cos \angle(c_1, c_2) = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2}{2\|u\|\|v\|}$$

Die links Seite ändert sich nicht, wenn man  $v$  durch  $2v$  ersetzt ( $c_2$  bleibt gleich) ↪ Parallelogramm

$$\frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2}{2} = \frac{\|u\|^2 + 4\|v\|^2 - \|u-2v\|^2}{4}$$

Setzt  $x=u$   $y=u+v$  ↪ Parallelogrammgleichung für  $x, y$  □



20. Lemma (W. Meyer) Sei  $(M, g)$  ein Riem.

Manf., Sei  $p \in M$ , seien  $u, v \in T_p M$ , dann

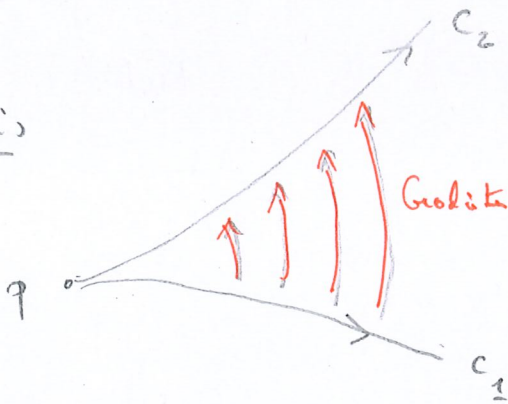
definieren  $c_1(s) = \exp_p(su)$  sowie  $c_2(s) = \exp_p(sv)$

$$c_2(s) = \exp_p(sv), \quad \varphi(s) = d(c_1(s), c_2(s))^2$$

Dann gilt für klein  $s$  die Taylor-Entwicklung

$$\varphi(s) = s^2 \cdot g(u-v, u-v) + \frac{1}{3} s^4 g(R(u,v)u,v) + s^5 \cdot \underbrace{\varphi(s)}_{\text{glatt}}$$

Beweis



Sei  $z_{s,0} \in T_{c_1(s)} M$

der Tangentialvektor mit

$$\exp_{c_1(s)}(z_{s,0}) = c_2(s)$$

Setze  $h_s(t) = \exp_{c_1(s)}(t \cdot z_{s,0})$  → Geodätisch Variation

$$z_{s,t} = \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{s,t} \quad \text{Geschwindigkeitsvektor der Geodäten} \\ t \mapsto h_s(t)$$

$$J_{s,t} = \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{s,t} \quad \text{Jacobi-Feld der Variation längs der} \\ \text{Geodäten } t \mapsto h_s(t)$$

$$\varphi(s) = g(z_{s,t}, z_{s,t}) \quad (\text{unabhängig von } t!)$$

Beweis  $\Psi'(s) = 2g \left( \frac{D}{ds} z, z \right)$

Da  $z|_{s=0} = 0$  gilt, folgt  $\Psi'(0) = 0$

$$\Psi''(s) = 2 \cdot g \left( \frac{D^2}{ds^2} z, z \right) + 2 \cdot g \left( \frac{D}{ds} z, \frac{D}{ds} z \right)$$

Nun  $\frac{D}{ds} z = \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{D}{dt} J$

sowie  $\frac{D^2}{dt^2} J + R(J, z) z = 0$

Da  $z|_{s=0} = 0$  folgt  $\frac{D}{dt} J|_{s=0} = \text{const}$

$$\Rightarrow J|_{\substack{s=0 \\ t=0}} = \dot{c}_1(0) = u \quad J|_{\substack{s=0 \\ t=t}} = \dot{c}_2(0) = v$$

$$\Rightarrow J|_{s=0} = u + t \cdot (v - u) \quad , \quad \frac{D}{dt} J|_{s=0} = v - u$$

$\Rightarrow \Psi''(0) = 2g(v-u, v-u)$

$$\Psi'''(s) = 2 \cdot g \left( \frac{D^3}{ds^3} z, z \right) + 6 \cdot g \left( \frac{D^2}{ds^2} z, \frac{D}{ds} z \right)$$

Beh  $\frac{D}{ds} J|_{s=0} = 0$

Denn:  $\frac{D}{ds} J|_{\substack{s=0 \\ t=0}} = \frac{d}{ds} \dot{c}_1(s)|_{s=0} = 0$  und  $\frac{D}{ds} J|_{\substack{s=0 \\ t=t}} = \frac{d}{ds} \dot{c}_2(s)|_{s=0} = 0$

Es genügt daher zu zeigen, dass  $\frac{D^2}{dt^2} \frac{D}{ds} J|_{s=0} = 0$  gilt.



$$\text{Nun } \frac{D^2}{dt^2} \frac{D}{ds} J = \frac{D}{dt} (R(z, J) J) + \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} J$$

$$= \frac{D}{dt} (R(z, J) J) + R(z, J) \frac{D}{ds} z + \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} J$$

$$= \frac{D}{dt} (R(z, J) J) + R(z, J) \frac{D}{ds} z + \frac{D}{ds} (R(z, J) z)$$

Zweifach Nullstelle in  $s=0$

$$\text{Folgt } \frac{D}{ds} z \Big|_{s=0} = 0, \quad \frac{D}{dt} z \Big|_{s=0} = 0$$

$$\Rightarrow R(z, J) \Big|_{s=0} = 0 \quad \wedge \quad R(z, J) J \Big|_{s=0} = 0$$

$$\wedge \frac{D}{ds} (R(z, J) z) = \left( \frac{D}{ds} R \right) (z, J) z + R \left( \frac{D}{ds} z, J \right) z + R \left( z, \frac{D}{ds} J \right) z + R(z, J) \frac{D}{ds} z$$

verschwindet für  $s=0$

$$\text{Also: } \frac{D}{ds} J \Big|_{s=0} = 0 \Rightarrow \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} J \Big|_{s=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D^2}{ds^2} z \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} J \Big|_{s=0} = R(z, z) \Big|_{s=0} + \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} J \Big|_{s=0} = 0$$

Insofern folgt  $\varphi'''(0) = 0$

$$\varphi''''(0) = 2 \cdot g \left( \frac{D^4}{ds^4} z, z \right) + 8 \cdot g \left( \frac{D^3}{ds^3} z, \frac{D}{ds} z \right) + 6 \cdot g \left( \frac{D^2}{ds^2} z, \frac{D^2}{ds^2} z \right)$$

$$\Rightarrow \varphi''''(0) = 8 \cdot g \left( \frac{D^3}{ds^3} z, \frac{D}{ds} z \right) \Big|_{s=0}$$

$$\text{Nun gilt } \frac{D^3}{ds^3} z \Big|_{s=0} = \frac{D^2}{ds^2} \frac{D}{dt} J \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{D}{ds} R(J, z) J \Big|_{s=0} + \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} J \Big|_{s=0}$$

$$= R(J, \frac{D}{ds} z) J \Big|_{s=0} + \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} J \Big|_{s=0}$$

$$= R(J, \frac{D}{dt} J) J \Big|_{s=0} + \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} J \Big|_{s=0}$$

$$= R(u+t(v-u), v-u)(u+t(v-u)) + \frac{D}{ds} \frac{D}{ds} \frac{D}{ds} J \Big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow \varphi''''(0) = 8 \cdot g(R(u, v-u)(u+t(v-u)), v-u)$$

$$+ 8 \cdot g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} J, \frac{D}{ds} z\right)$$

$$= 8 \cdot g(R(u, v)u, v) + \underbrace{8 \cdot g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} J, \frac{D}{ds} z\right)}_{\text{unabh. h\u00e4ufig von } t} \Big|_{s=0}$$

$$g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} J, \frac{D}{ds} z\right) \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{D}{ds} J, \frac{D}{ds} z\right) \Big|_{s=0}$$

$$\left[ \text{weil } \frac{D^2}{ds^2} z \Big|_{s=0} = 0 \text{ und } \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} z \Big|_{s=0} = \frac{D^2}{dt^2} J \Big|_{s=0} = 0 \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{D}{ds} J, \frac{D}{ds} z\right) \Big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{D}{ds} J, \frac{D}{ds} z\right) \Big|_{s=0} = g\left(\frac{D^2}{ds^2} J, \frac{D}{ds} z\right) \Big|_{s=0} + g\left(\frac{D}{ds} J, \frac{D^2}{ds^2} z\right) \Big|_{s=0}$$

linear in t



Für  $t=0$  erhalten wir

$$\frac{D^2}{ds^2} \int \Big|_{s=t=0} = 0 = \frac{D^2}{ds^2} \int \Big|_{\substack{s=0 \\ t=1}}$$

sowie  $\frac{D^2}{ds^2} z \Big|_{s=0} = 0 \Rightarrow$

$$\varphi'''(0) = 8 \cdot g(R(u, v)u, v)$$



Korollar A Sei  $(M, g)$  ein Riem. Manf. und

seien  $c_i: [0, r_i] \rightarrow M, i=1, 2$ , Geod.  $c_1(0) = p = c_2(0)$ ,  $r_i > 0$ .

Seien  $c_i(t) = \exp_p(tu_i), g(u_i, u_i) = 1$ .

Dann gilt  $\cos(\angle(c_1, c_2)) = g(u_1, u_2)$

Beweis Sei  $s, t > 0$ . Es gilt

$$d(c_1(su_1), c_2(tu_2))^2 = s^2 g(u - \frac{t}{s}v, u - \frac{t}{s}v) + s^4(\dots)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{s^2 + t^2 - d(c_1(su_1), c_2(tu_2))^2}{2st} = g(u_1, u_2)$$



Korollar B Sei  $(M, g)$  ein Riemannsch. Manf.

Wenn  $(M, d)$  nicht positive Krümm. hat, so gilt

$K \leq 0$  überall.

Beweis Angenommen, es gibt  $p \in M$ , Eben  $H \subseteq T_p M$  mit  $K(H) > 0$ . Sei  $u_1, u_2$  ein ONB für  $H$ .

Dann gilt mit  $c_i(t) = \exp_p(tu_i)$ , dass

$$d(c_1(t), c_2(t))^2 = g^2(tu_1 - tu_2, tu_1 - tu_2) + t^4 \frac{K}{3} + t^5 \psi(t)$$

Da  $\psi$  stetig ist, gibt es  $t > 0$  mit

$$t^4 \left( t \psi(t) - \frac{K}{3} \right) < 0$$

$\Rightarrow d(c_1(t), c_2(t))^2 < \|tu_1 - tu_2\|_2^2$  was kein Umpho vor  $p$  ist CAT(0)-Raum nach § 3.18 (iv). □