§ 4. Isometrien und flache Teilräume

1. <u>Def</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum mit <u>Isometriegruppe</u> $\mathrm{Isom}(X) = \{ g : X \to X \mid g$ bijektiv, $\forall p,q \in X \; d(p,q) = d(g(p),g(q)) \}$. Für $g \in \mathrm{Isom}(G)$ definieren wir

die <u>Verschiebefunktion</u> $d_g : p \longmapsto d(p, g(p))$

die <u>Verschiebedistanz</u> $l_g = \inf \{ d_g(p) \mid p \in X \}$

die <u>Min-Menge</u> $\mu_g = \{ p \in X \mid d_g(p) = l_g \}$

Man nennt g <u>halbeinfach</u>, falls $\mu_g \neq \emptyset$ gilt, und <u>parabolisch</u> wenn $\mu_g = \emptyset$.

Man nennt g <u>elliptisch</u>, falls es $p \in X$ gibt mit $g(p) = p$ (p ist ein Fixpunkt). Dann ist $l_g = 0$ und $\mu_g \neq \emptyset$. Ist g halbeinfach mit $l_g > 0$, so heißt g <u>hyperbolisch</u>.

- Isometrie
  - parabolisch $\mu_g = \emptyset$
  - halbeinfach
    - elliptisch $l_g = 0, \mu_g \neq \emptyset$
    - hyperbolisch $l_g > 0, \mu_g \neq \emptyset$

2. Beispiel (a) X vollst. CAT(0)-Raum.

Dann ist $g \in \mathrm{Isom}(X)$ elliptisch gdw g eine beschränkte Bahn hat (Bruhat-Tits Fixpunktsatz §2.8)

(b) $X = \mathbb{R}^m$ mit euklidisch Norm $\|.\|_2$

ÜA: jede Isometrie ist von der Form

$$g(v) = av + t \qquad t \in \mathbb{R}^m, \ a \in O(m) \text{ orthogonale Gruppe.}$$

(ÜA!) $\quad d_g(v) = \|(a - \mathbb{1})v + t\|_2$

Setze $H_0 = (a-\mathbb{1})(\mathbb{R}^m) \leq \mathbb{R}^m, \quad H_1 = H_0^{\perp}$

$\leadsto \mathbb{R}^m = H_0 \oplus H_1, \quad t = t_0 + t_1 \quad t_i \in H_i$

$$d_g(v) = \|\underbrace{(a-\mathbb{1})v + t_0}_{\in H_0} + \underbrace{t_1}_{\in H_1}\|_2 \geq \|t_1\|_2$$

Minimum wird angenommen genau dann, wenn

$(a-\mathbb{1})v = -t_0$, also $M_g = \{v \in \mathbb{R}^m \mid (a-\mathbb{1})v = -t_0\} \neq \emptyset$

(c) $H^1 \cong \mathbb{R}^1$, für $m \geq 2$ gibt es auf H^m parabolische Isometrien.

(d) $X = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)^2 < \infty\}$

Isometrie $a : L^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{Z}) \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)^2}$

$a(f)(j) = f(j-1)$ einziger Fixpunkt ist $f = 0$

$$t(j) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte die Isometrie
$$L^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto a(f) + t$$

$\rightsquigarrow$ parabolische Isometrie von $L^2(\mathbb{Z})$. (ÜA)

3. <u>Lemma</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $g \in \mathrm{Isom}(X)$. Sei $\langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Dann gilt:

(i) ist $a \in \mathrm{Isom}(X)$, so $l_{aga^{-1}} = l_g$ und
$$d_{aga^{-1}} = d_g \circ a^{-1}$$

(ii) $\mu_{aga^{-1}} = a \mu_g$

(iii) Wenn g und a vertauschen, $ag = ga$, so $a^k \mu_g = \mu_g$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist μ_g <u>$\langle g \rangle$-invariant</u>, $g^k \mu_g = \mu_g$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

<u>Beweis</u> (i) $d_{aga^{-1}}(p) = d(p, aga^{-1}(p)) = d(a^{-1}(p), g a^{-1}(p)) = d_g \circ a^{-1}$. Es folgt $l_{aga^{-1}} = l_g$.

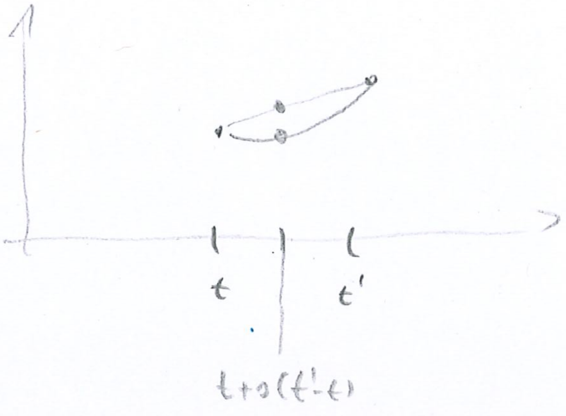
(ii) $p \in \mu_g \rightsquigarrow d_{aga^{-1}}(a(p)) = d_g(p) = l_g = l_{aga^{-1}}$

$\rightsquigarrow a\mu_g \subseteq \mu_{aga^{-1}} \rightsquigarrow \mu_g \subseteq a^{-1}\mu_{aga^{-1}} \subseteq \mu_g$.

(iii) Folgt direkt aus (ii). $\square$

4. <u>Def</u> Ein Abbildung $f: [0,r] \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u>, falls für alle $0 \leq t < t' \leq r$, $s \in [0,1]$ gilt

$$(1-s)\cdot f(t) + s(f(t')) \geq f(t+s(t'-t))$$



Ein Abbildung $f: X \to \mathbb{R}$ auf ein geodätisch metrisch Raum X heißt <u>konvex</u>, wenn f längs jeder Geodäte konvex ist.

<u>Satz</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $g \in \mathrm{Isom}(X)$. Dann ist d_g konvex und 2-Lipschitz. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ ist die abg. Menge $X_{\leq r} = \{p \in X \mid d_g(p) \leq r\}$ konvex oder leer. Insbesondere ist M_g abgeschlossen und konvex (oder leer).

<u>Beweis</u> Sei $c: [0,r] \to X$ Geodäte, $0 \leq t < t' \leq r$. Nach §2.3 gilt für $s \in [0,1]$

$$d(c(t+s(t'-t)), gc(t+s(t'-t)))$$

$$\leq (1-s)\cdot d(c(t), gc(t)) + s\cdot d(c(t'), gc(t')).$$

$\Rightarrow d_g$ ist konvex. Weiter

$$d_g(p) - d_g(q) = d(p,gp) - d(q,gq)$$
$$\leq d(p,q) + d(q,gp) - d(q,gq)$$

und $d(q,gp) - d(q,gq) \leq d(gp,gq) = d(p,q)$.

$\Rightarrow d_g(p) - d_g(q) \leq 2\cdot d(p,q)$, genauso $d_g(q) - d_g(p) \leq 2\cdot d(p,q)$.

Ist $p,q \in X_{\leq r}$ und $c(0)=p$, $c(r)=q$, $c:[0,h] \to X$ Geodätische, so ist $d_g(c(sh)) \leq (1-s)\cdot d_g(p) + s\cdot d_g(q) \leq r$. $\square$

5. <u>Lemma</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $C \subseteq X$ konvex und vollständig, sei $g \in \mathrm{Isom}(X)$ mit $g(C) = C$. Dann gilt $l_g = l_{(g|C)}$.

Insbesondere ist g halbeinfach gdw $g|C$ halbeinfach.

<u>Beweis</u> Wir betrachten $\pi = \mathrm{proj}_C : X \to C$, vgl. §2.5. Es gilt $\mathrm{proj}_{gC}(gp) = g\,\mathrm{proj}_C p$

$\Rightarrow \pi$ ist g-äquivariant. Da π 1-Lipschitz ist, folgt $d_g(\mathrm{proj}_C(p)) \leq d_g(p) \Rightarrow l_g \geq l_{(g|C)}$

Andererseits $l_{(g|C)} \geq l_g$ weil $C \subseteq X$

Ist $g|_C$ halbeinfach, so $M_{g|C} \neq \emptyset \Rightarrow M_g \neq \emptyset$

Ist $M_g \neq \emptyset$, so folgt $M_g \cap \bar{C} \neq \emptyset$, weil $\ell_{g|_C} = \ell_g$. Also $C = \bar{C}$. □

6. <u>Lemma</u> Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $g \in \mathrm{Isom}(X)$. Dann sind äquivalent:

(i) g ist elliptisch

(ii) g^k ist elliptisch für ein $k \neq 0$

(iii) g^k ist elliptisch für alle k.

<u>Beweis</u> Klar (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii). Angenommen, $g^k(p) = p$, $k \neq 0$. Es folgt $g^{lk+m}(p) = g^m(p) \Rightarrow p$ hat endliche $\langle g \rangle$-Bahn $p, g(p), \dots, g^{k-1}(p) \subseteq X \Rightarrow g$ hat Fixpunkt nach Bruhat-Tits-Fixpunktsatz §2.8. □

7. <u>Theorem</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $g \in \mathrm{Isom}(X)$. Dann sind äquivalent

(i) g ist hyperbolisch

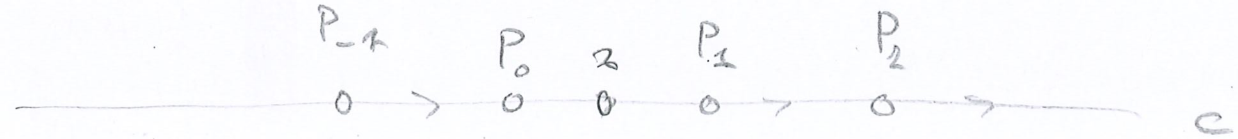
(ii) es gibt $E \subseteq X$ isometrisch zu $\mathbb{R}$, E ist g-invariant und $g|_E$ ist eine Translation $\neq id_E$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt $E \subseteq M_g$ und jedes $p \in M_g$ liegt in einem solchen E.

Man nennt E (eine) <u>Achse</u> von g.

<u>Beweis</u> (ii) ⇒ (i) $g|_E$ Translation ⇒ g halbeinfach nach §4.5, $l_g = l_{g|_E} > 0$ ⇒ g hyperbolisch.

(i) ⇒ (ii) Sei $p \in \mu_g$, setze $p_k = g^k(p)$, $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt $d(p_k, p_{k+1}) = l_g$. Sei $c : \mathbb{R} \to X$ Kurve so, dass $c|_{[k \cdot l_g, (k+1) l_g]}$ Geodäte von p_k nach p_{k+1} ist.



<u>Beh: c ist Geodäte.</u> Nach ÜA 3.4 reicht es zu zeigen, dass c <u>lokal</u> eine Geodäte ist. In den Punkten $t \notin l_g \cdot \mathbb{Z}$ ist das klar.

Sei z der Mittelpunkt von p_0 und p_1, dann ist $g(z)$ Mittelpunkt von p_1 und p_2. Da μ_g konvex ist, ist $z \in \mu_g$ und damit $d(z, g(z)) = l_g$ ⇒ p_1 ist Mittelpunkt von z und $g(z)$. Die eindeutige Geodäte von z nach $g(z)$ verläuft damit durch (lok) p_1 und stimmt dort mit (lok) c überein ⇒ c ist Geodäte bei $t = l_g$ ⇒ c ist Geodäte bei $k \cdot l_g$, $k \in \mathbb{Z}$ ⇒ c ist überall lokale Geodäte.

□

Korollar Ist X ein CAT(0)-Raum, $g \in \mathrm{Isom}(X)$ hyperbolisch, so ist g^k hyperbolisch für alle $k \neq 0$.

8. Def Sei X ein metrischer Raum und seien $c_i : \mathbb{R} \to X$ isometrische Einbettungen, $i = 1, 2$.
Wir sagen, c_1 und c_2 haben beschränkten (bzw. konstanten) Abstand, wenn $t \mapsto d(c_1(t), c_2(t))$ beschränkt bzw. konstant ist. Setze $E_i := c_i(\mathbb{R})$

Klar: konstanter Abstand $\Rightarrow$ beschränkter Abstand $\Rightarrow Hd(E_1, E_2) < \infty$

In einem CAT(0)-Raum gilt: beschränkter Abstand $\Rightarrow$ konstanter Abstand, da dann $t \mapsto d(c_1(t), c_2(t))$ konvex und beschränkt ist (ÜA).

9. Satz Sei X ein CAT(0)-Raum, seien $E_1, E_2 \subseteq X$ E_i isometrisch zu $\mathbb{R}$ $i = 1, 2$. Wenn gilt $Hd(E_1, E_2) = r < \infty$, so gibt es Isometrien $c_i : \mathbb{R} \to E_i$ mit

$$d(c_1(t), c_2(t)) = r = \text{const} \quad \text{und}$$

$$c_1(t) = \mathrm{proj}_{E_1} c_2(t) \qquad c_2(t) = \mathrm{proj}_{E_2} c_1(t)$$

Beweis Für $r = 0$ ist $E_1 = E_2 \rightsquigarrow$ fertig. Also OE $r > 0$.

Wir set $\pi_i = \mathrm{proj}_{E_i}$ $\quad i = 1,2$

<u>Beh A</u> Für $p \in E_1$ ist $d(p, \pi_2(p)) \le r = Hd(E_1, E_2)$

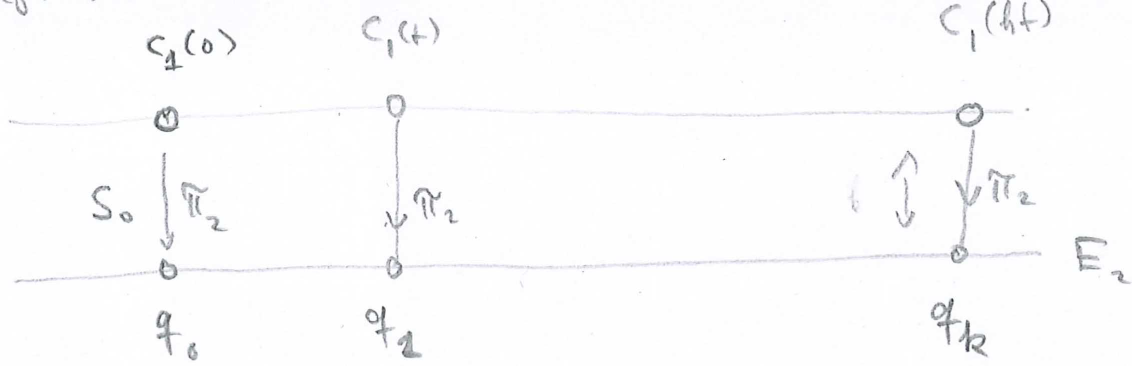
<u>Denn</u>: $s = d(p, \pi_2(p)) \Rightarrow p \notin B_s(E_2) \Rightarrow Hd(E_1, E_2) \ge s$. □

Wir wähle eine Isometrie $c_1 : \mathbb{R} \to E_1$.

<u>Beh B</u> $t \mapsto d(c_1(t), \pi_2(c_1(t))) = r =$ const.

<u>Denn</u>: $s = d(c_1(0), \pi_2(c_1(0))) \le r$. Für $k \geq 1$

folgt mit Konvexität der Metrik für $t > 0$:



c_2 Geodät. von q_0 nach q_k

$$d(c_1(t), c(t)) \le \left(1 - \frac{1}{k}\right) s_0 + \frac{1}{k} r$$

$$\Rightarrow d(c_1(t), q_1) \le \left(1 - \frac{1}{k}\right) s_0 + \frac{1}{k} r \qquad \forall k$$

$$\Rightarrow d(c_1(t), q_1) \le s_0$$

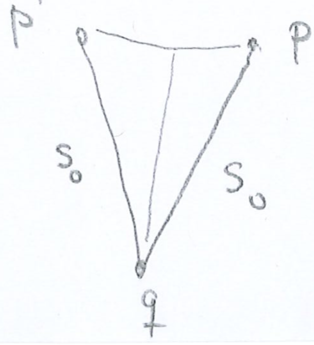
$$\Rightarrow d(p, \pi_2(p)) = s_0 \qquad \forall p \in E_1$$

Für p folgt nun $d(\pi_1(\pi_2(p)), \pi_2(p)) \le s_0$

$$\Rightarrow d(\pi_1(\pi_2(p)), \pi_2(p)) = s_0$$

$$\Rightarrow \pi_1(\pi_2(p)) = p$$

wegen CAT(0)-Bedingung



Da π_1, π_2 1-Lipschitz sind, folgt: π_2 ist isometrische Einbettung $E_1 \xrightarrow{\pi_2} E_2 \Rightarrow \pi_2$ ist Isometrie.

Setze $c_2(t) = \pi_2(c_1(t)) \Rightarrow c_2 : \mathbb{R} \to E_2$ Isometrie $\square$

10. Lemma Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $g \in \mathrm{Isom}(X)$ hyperbolisch, seien $E_1, E_2 \subseteq M_g$ Achsen. Dann haben E_1 und E_2 konstanten Abstand.

Beweis Sei $p \in E_1$, $q \in E_2$. Es gilt mit

$A_1 = \{ g^k(p) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ $\quad A_2 = \{ g^k(q) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$Hd(A_i, E_i) = l_g / 2 \quad i = 1, 2$

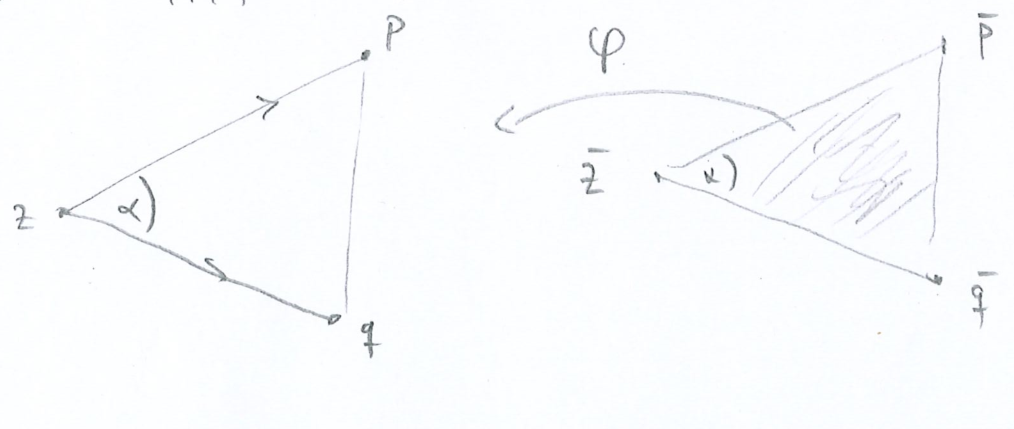
$Hd(A_1, A_2) \leq d(p,q) \Rightarrow Hd(E_1, E_2) \leq l_g + d(p,q)$. $\square$

11. Satz (Der Satz vom flachen Dreieck)

Seien $c_i : [0, r_i] \to X$ Geodäten in einem CAT(0)-Raum, $r_i > 0$, $c_1(0) = c_2(0) = z$, $i = 1, 2$, sei $\alpha = \angle(c_1, c_2)$.

Wenn im Vergleichsdreieck $\bar{z}, \bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{R}^2$ $\quad p = c_1(r_1)$, $q = c_2(r_2)$

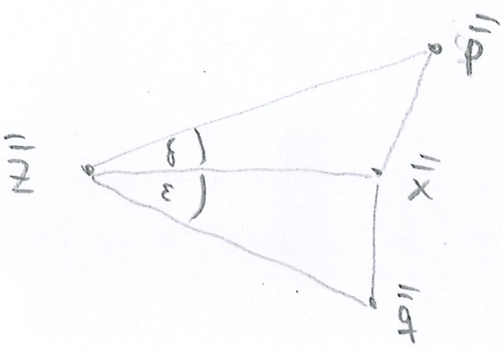
gilt $\angle_{\bar{z}}(\bar{p}, \bar{q}) = \alpha$, so gibt es genau eine isom. Einbettung $\varphi : D \to X$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ die konvexe Hülle von $\bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$



Beweis OE $p \neq q$. Sei x ein Punkt auf der Geodäte von p und q, mit Vergleichspunkt $\bar{x}$ auf Strecke $\bar{p}\bar{q}$.

Beh $\|\bar{z}-\bar{x}\|_2 = d(z,x)$

Beweis $c_3 : z \to x$ Geodäte. Wäre $\|\bar{z}-\bar{x}\|_2 > d(z,x)$, so Vergleichsdreieck zu z, p, x und z, q, x



$\measuredangle(c_1, c_3) \leq \delta$

$\measuredangle(c_3, c_2) \leq \varepsilon$

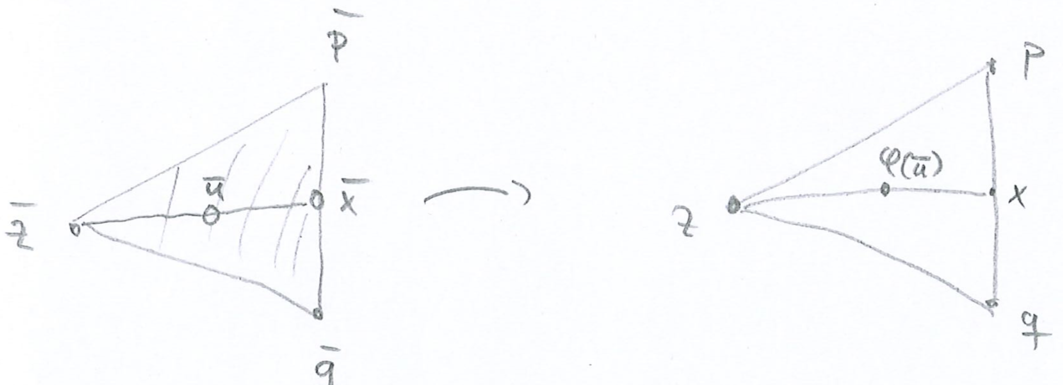
$\varepsilon + \delta < \alpha = \measuredangle(c_1, c_3)$ (*) ↯ §3.17.

Also $\varepsilon + \delta = \alpha \Rightarrow \Delta(\bar{\bar{z}}, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}})$ kongruent zu $\Delta(\bar{z}, \bar{p}, \bar{q})$

$\Rightarrow \underbrace{\|\bar{\bar{z}}-\bar{\bar{x}}\|_2}_{= d(z,x)} = \|\bar{z}-\bar{x}\|_2$

□

Definiere $\varphi : D \to X$ längs der Geodäte von z zu Punkt auf der Geodäte von p nach q



Beh: φ ist Isometrie.

(a) u, v auf der Strecke $\bar{z} - \bar{x} \Rightarrow d(\varphi(u), \varphi(v)) = \|u-v\|_2$ (✓)

(*) Im Video begründe ich das nicht richtig!

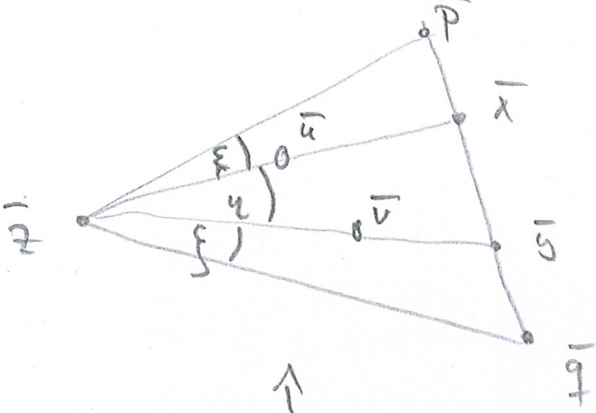
Es ist einfach so, wie es hier steht:

Wäre $\varepsilon+\delta<\alpha$, so hätten wir einen Widerspruch zu §3.17.

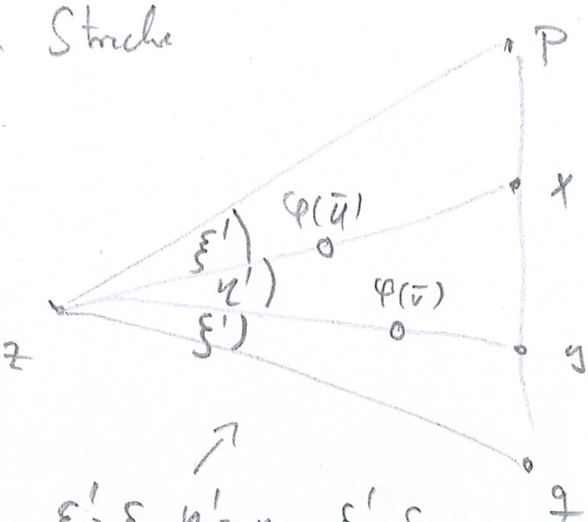
Also ist $\varepsilon+\delta=\alpha$ und damit sind

$\Delta(\bar{z},\bar{p},\bar{q})$ und $\Delta(\bar{\bar{z}},\bar{\bar{p}},\bar{\bar{q}})$ kongruent (SWS)

(b) u, v nicht auf der gleichen Strecke



alles Vergleichsdreiecke!



$\xi' = \xi \quad \eta' = \eta \quad \zeta' = \zeta$

$\text{CAT}(0) \Rightarrow d(\varphi(\bar u), \varphi(\bar v)) \le \| \bar u - \bar v \|_2$

Wäre also $d(\varphi(\bar u), \varphi(\bar v)) < \| \bar u - \bar v \|_2$, so wäre

$\eta' < \eta$ ↯ Also $d(\varphi(\bar u), \varphi(\bar v)) = \| \bar u - \bar v \|_2$.

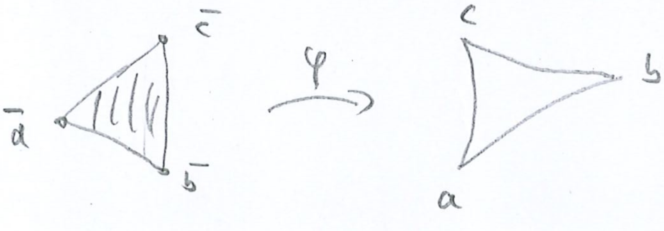
Damit ist φ isom. Einbettung. Jede weitere Isometrie $\psi : D \to X$ mit $\psi(\bar z) = z$, $\psi(\bar p) = p$, $\psi(\bar q) = q$ muss auf solchen Geodäten mit φ übereinstimmen $\Rightarrow \psi = \varphi$. $\square$

#

<u>Korollar</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, seien $a, b, c \in X$ drei paarweise verschiedene Punkte, seien α, β, γ die Winkel bei a, b, c zwischen den entsprechenden Geodäten, seien $\bar a, \bar b, \bar c \in \mathbb{R}^2$ Vergleichspunkte. Dann gibt es eine isometrische Einbettung

$\varphi : D \to X$ mit $\varphi(\bar a) = a$, $\varphi(\bar b) = b$, $\varphi(\bar c) = c$

(D konvexe Hülle von $\bar a, \bar b, \bar c$)



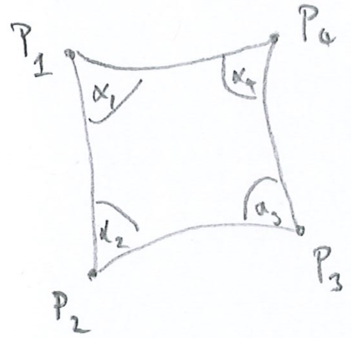
genau dann, wenn $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ gilt.

"Ein Dreieck in einem CAT(0)-Raum ist genau dann flach, wenn seine Winkelsumme $180°$ ist."

Beweis. Nach §3.18 gilt für die Vergleichswinkel $\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma$ in $\mathbb{R}^2$ $\alpha \le \bar\alpha$, $\beta \le \bar\beta$, $\gamma \le \bar\gamma$ und $\pi = \bar\alpha+\bar\beta+\bar\gamma$. Ist also $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, so folgt $\alpha=\bar\alpha$, $\beta=\bar\beta$, $\gamma=\bar\gamma$. $\square$

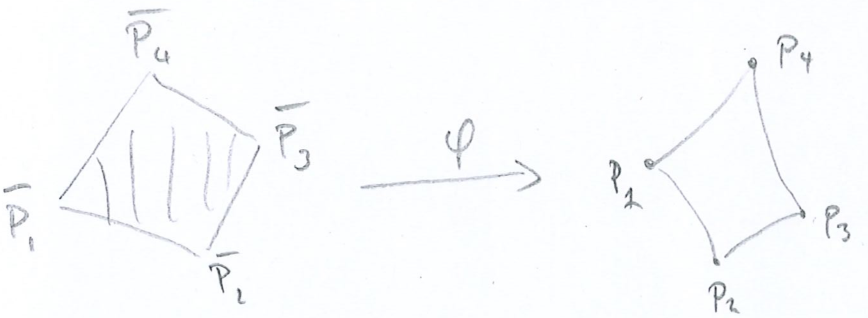
<u>Bemerkung</u> Es ist ein offenes Problem, ob es in jedem CAT(0) Raum X und Punkte $a,b,c \in X$ stets eine kompakte konvexe Menge $K \subseteq X$ gibt mit $a,b,c \in X$!

11. <u>Satz</u> (vom flachen Viereck) Sei X ein CAT(0)-Raum, Seien $P_1,\dots,P_4 \in X$ paarweise verschiedene Punkte in X, sei α_i der Winkel bei P_i im geodätischen Viereck $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_1$.

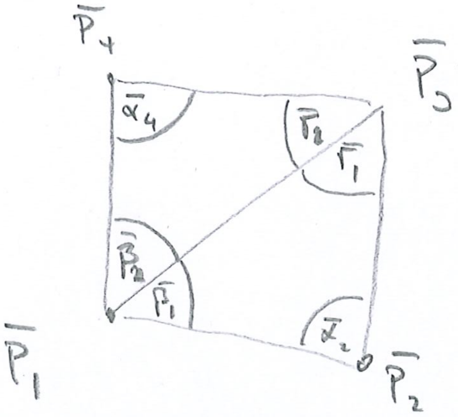


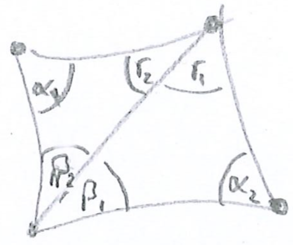
Wenn gilt $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \ge 2\pi$, so gilt $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 2\pi$. Dann gibt es $\bar P_1, \bar P_2, \bar P_3, \bar P_4 \in \mathbb{R}^2$ mit konvexer Hülle $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine winkeltreue isometrische Einbettung

$$\varphi : D \to X \quad \text{mit} \quad \varphi(\bar P_i) = P_i, \quad i=1,2,3,4.$$



<u>Beweis</u> Wir wählen Vergleichsdreiecke zu $P_1 - P_3 - P_4$ und $P_1 - P_2 - P_3$ in $\mathbb{R}^2$





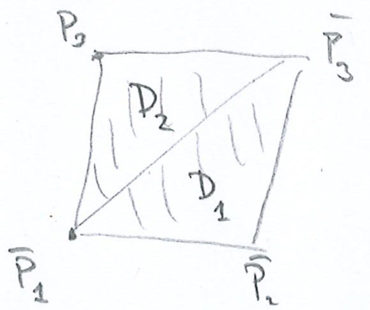
$\mathbb{R}^2$ X

Es gilt $\alpha_1 \leq \beta_1 + \beta_2$, $\alpha_3 \leq \gamma_2 + \gamma_1$

sowie $\bar\beta_1 + \bar\beta_2 + \bar\alpha_4 + \bar\gamma_2 + \bar\gamma_1 + \bar\alpha_2 = 2\pi$

$$\geq \beta_1 + \beta_2 + \alpha_4 + \gamma_2 + \gamma_1 + \alpha_3 \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \geq 2\pi$$

Folglich gilt in diesen Ungleichungen überall <u>Gleichheit</u>. Insbesondere ist $\bar\alpha_1 = \alpha_1 \leq \pi$ und $\bar\alpha_3 = \alpha_3 \leq \pi$, das Viereck $\bar P_1 - \bar P_2 - \bar P_3 - \bar P_4$ hat also überall Innenwinkel $\leq \pi$ und ist damit <u>konvex</u>. Wir definieren $\varphi : D \to X$ auf den beiden Teilflächen D_1, D_2



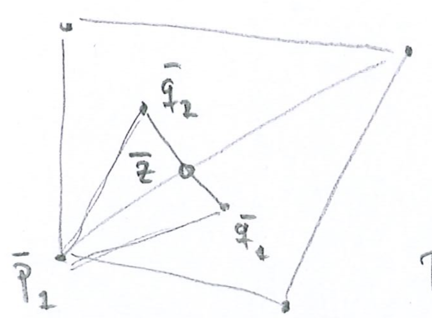
als Isometrie nach dem vorigen Korollar.

Zu zeigen: φ ist Isometrie auf D.

Sei $\bar q_i \in D_i$, $i = 1, 2$.

Wir müssen zeigen, dass $\|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\|_2 = d(\varphi(\bar{q}_1), \varphi(\bar{q}_2))$.

Sei $q_i := \varphi(\bar{q}_i) \in X$. Da das Viereck $\bar{P}_1 - \bar{P}_2 - \bar{P}_3 - \bar{P}_4$ konvex ist, treffen sich die Strecken $\bar{q}_1 - \bar{q}_2$ und $\bar{P}_1 - \bar{P}_3$ in $\bar{z}$

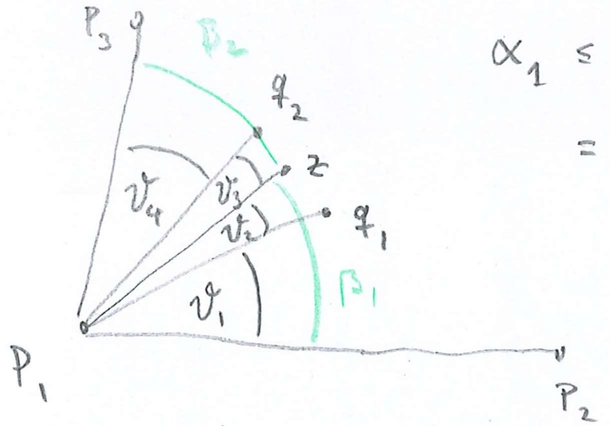


$\Rightarrow d(q_1, q_2) \leq \|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\|$

OE $\bar{z} \neq \bar{q}_1, \bar{q}_2$ (sonst ist die Beh. klar).

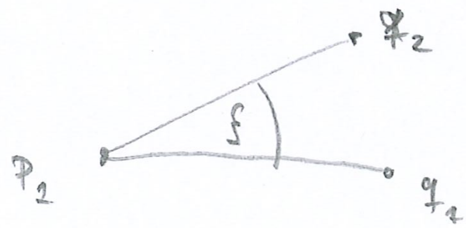
$z = \varphi(\bar{z})$

Betrachte die resultierenden 4 Winkel bei P_1



$$\alpha_1 \leq \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4$$
$$= \beta_1 + \beta_2 = \alpha_1$$

Für den Winkel ξ



folgt nun $\xi \leq \vartheta_2 + \vartheta_3$ und $\alpha_1 \leq \vartheta_1 + \xi + \vartheta_4 = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4$

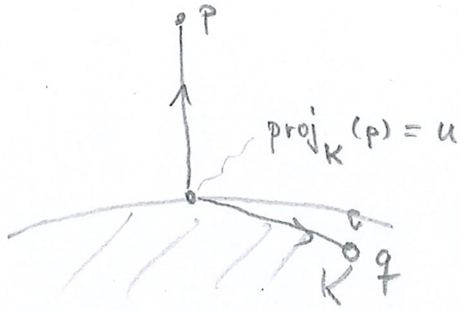
$\Rightarrow \xi = \vartheta_2 + \vartheta_3 = \measuredangle_{\bar{P}_1}(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$. Damit ist

also $\|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\| = d(q_1, q_2)$ $\square$

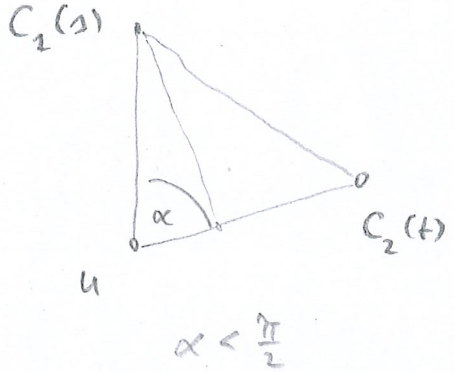
(Die Eindeutigkeit ist klar auf D_1, D_2 und damit auch auf $D = D_1 \cup D_2$.)

12. <u>Satz</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $K \subseteq X$ konvex und vollständig. Sei $p \in X - K$, sei $q \in K$, sei $c_1 : \mathrm{proj}_K(p) \to p$ und $c_2 : \mathrm{proj}_K(p) \to q$. Dann ist

$\measuredangle(c_1, c_2) \geq \frac{\pi}{2}$



<u>Beweis</u> Wäre $\measuredangle(c_1, c_2) < \frac{\pi}{2}$, so gäbe es $s, t > 0$ mit $\overline{\measuredangle}_u(c_1(s), c_2(t)) < \frac{\pi}{2}$. Dann gäbe es $t' > 0$



mit $d(c_2(t'), c_1(s)) < d(c_2(0), c_1(s))$ ↯

$\square$

13. <u>Theorem</u> (Satz von flachen Streifen, Flat Strip Theorem)

Sei X ein CAT(0)-Raum, seien $c_i : \mathbb{R} \to X$ isometrische Einbettungen, $i = 1, 2$. Wenn c_1 und c_2 beschränkten Abstand haben, so gibt es eine isometrische Einbettung $\varphi : \mathbb{R} \times [0, h] \to X$, $(t, s) \mapsto \varphi_s(t)$

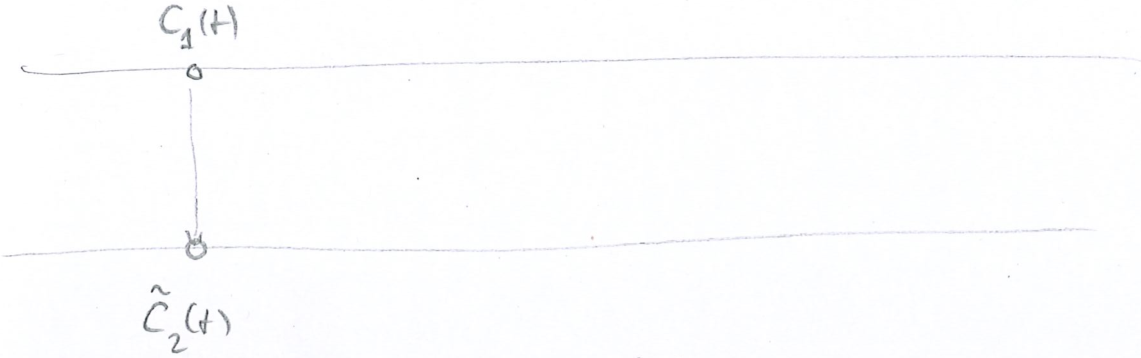
mit $\varphi_0 = c_1$

$\varphi_h(t) = c_2(t + c)$ $\quad c \in \mathbb{R}$ konstant.

Beweis: Nach §4.9 gibt es $\tilde{c}_2 : \mathbb{R} \to X$ mit

$\tilde{c}_2(t) = c_2(t+c)$, c konstant, und

$\tilde{c}_2(t) = \mathrm{proj}_{E_2}\, c_1(t)$, $c_1(t) = \mathrm{proj}_{E_1}\, \tilde{c}_2(t)$, $E_i := c_i(t)$.

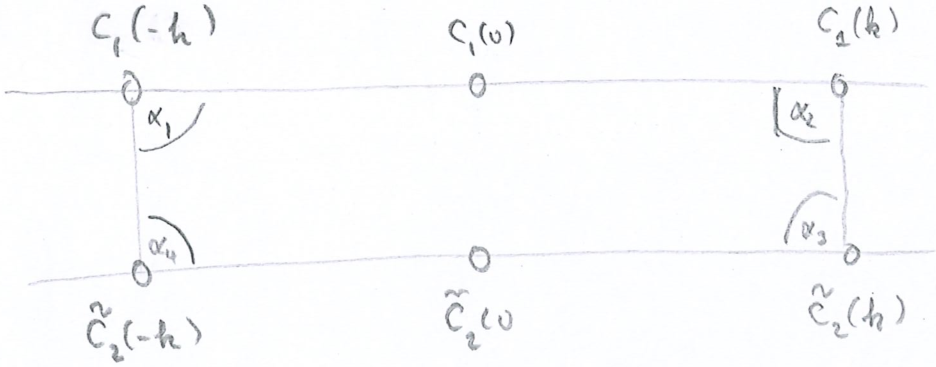


Setze $h = d(c_1(0), \tilde{c}_2(0)) \Rightarrow d(c_1(t), \tilde{c}_2(t)) = h = \mathrm{const.}$

Für $h = 0$ fertig.

Für $h > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ betrachte das

Viereck $c_1(-k) - c_1(k) - \tilde{c}_2(k) - \tilde{c}_2(-k)$



Nach §4.12 gilt $\alpha_i \geq \frac{\pi}{2}$, $i = 1,2,3,4$.

Nach §4.11. erhalten wir eine isometrische Einbettung

$\varphi_k : [-k,k] \times [0,h] \to X$ mit

$\varphi_{k,0} = c_1|_{[-k,k]}$ $\quad \varphi_{k,h} = \tilde{c}_2|_{[-k,k]}$

Aus der Eindeutigkeit folgt

$$\varphi_{k+1}\Big|_{[-k,k]\times[0,k]} = \varphi_k . \quad \text{Setze } \varphi = \bigcup_{k\geq 1} \varphi_k \qquad \square$$

14. Thm Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $E \subseteq X$ isometrisch zu $\mathbb{R}$. Setze

$$X(E) = \bigcup \{ F \subseteq X \mid F \text{ isometrisch zu } \mathbb{R} \text{ und } Hd(E,F) < \infty \}$$

Dann gilt: (i) $X(E) \subseteq X$ ist konvex.

(ii) es gibt eine konvexe Teilmenge $Y \subseteq X(E)$ und eine Isometrie $\varphi : Y \times \mathbb{R} \longrightarrow X(E)$ wobei $Y \times \mathbb{R}$ mit der Metrik $\tilde{d}((y,s),(y',s')) = \sqrt{d(y,y')^2 + (s-s')^2}$ versehen ist.

Beweis (i) Sind $F_1, F_2 \subseteq X$ isometrisch zu $\mathbb{R}$ mit $Hd(E, F_i) < \infty$, $i = 1,2$, so folgt $Hd(F_1, F_2) < \infty$.

Der von F_1, F_2 aufgespannte Flache Streifen liegt dann in $X(E)$. Insbesondere folgt für $q_i \in F_i$, dass die Geodätische $q_1 \to q_2$ in $X(E)$ liegt $\Rightarrow$ $X(E)$ ist konvex, insbesondere CAT(0).

(ii) Nach (i) können wir OE $X = X(E)$ annehmen. Wir wählen eine Isometrie $c : \mathbb{R} \to E$ und setzen

$$Y = \{ p \in X \mid \mathrm{proj}_E(p) = c(0) \}, \quad \mathfrak{F} = \{ F \subseteq X \mid F \text{ isom zu } \mathbb{R} \text{ und } Hd(F,E) < \infty \}.$$

Zu jedem $p \in Y$ gibt es <u>genau ein</u> $F_p \in \mathfrak{F}$ mit $p \in F$, denn: $p \in F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1, F_2$ spannen Flach Streifen der Breite 0 auf $\Rightarrow F_1 = F_2$. Für $p \in Y$ sei nun $c_p : \mathbb{R} \to F_p$ die eindeutige Isometrie mit $\mathrm{proj}_E\, c_p(t) = c(t)$, vgl. §4.9. Definiere $\varphi(p,t) = c_p(t)$.

<u>Beh</u> Ist $p_1, p_2 \in Y$, so gilt

$$p_2 = \mathrm{proj}_{F_{p_2}}(p_1)$$

<u>Denn</u>: c_{p_1}, c_{p_2} haben beschränkten Abstand (beide haben konstanten Abstand zu c!) $\Rightarrow$ also nach §4.9

$$\mathrm{proj}_{F_{p_2}}(c_{p_1}(t)) = c_{p_2}(t+c) \qquad c \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

$a_1 = d(c(t), c_{p_1}(t))$, $a_2 = d(c(t), c_{p_2}(t))$, $a_3 = d(c_{p_1}(t), c_{p_2}(t))$

$a = a_1 + a_2 + a_3$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$d(c_{p_1}(0), c_{p_1}(ax+c)) = |ax+c|$$
$$\leq d(c_{p_1}(0), c(a_1x)) + d(c(a_1x), c_{p_2}((a_1+a_2)x))$$
$$+ d(c_{p_2}((a_1+a_2)x), c_{p_1}(ax+c))$$
$$\leq a_1\sqrt{1+x^2} + a_2\sqrt{1+x^2} + a_3\sqrt{1+x^2} = a\sqrt{1+x^2}$$

also $(ax+c)^2 \le a^2 + a^2x^2$

$$2\cdot axc + c^2 \le a^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow c = 0. \quad \square$$

Es folgt $d(\varphi(p_1,t_1),\varphi(p_2,t_2))^2 = d(p_1,p_2)^2 + (t_1-t_2)^2$ $\square$

<u>Bem</u> Die Menge $Y \subseteq X$ ist folglich auch ein CAT(0)-Raum, vgl. ÜA 3.1. #

15. Sind (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume, so ist die (euklidische) <u>Produktmetrik</u> auf $X\times Y$ gegeben durch

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d_X(x_1,x_2)^2 + d_Y(y_1,y_2)^2}\ , \text{ vgl. ÜA 3.1}$$

<u>Lemma</u> Seien X, Y metrische Räume, sei $g \in \mathrm{Isom}(X\times Y)$. Angenommen, für jedes $x \in X$ existiert ein $\tilde{x} \in X$ mit

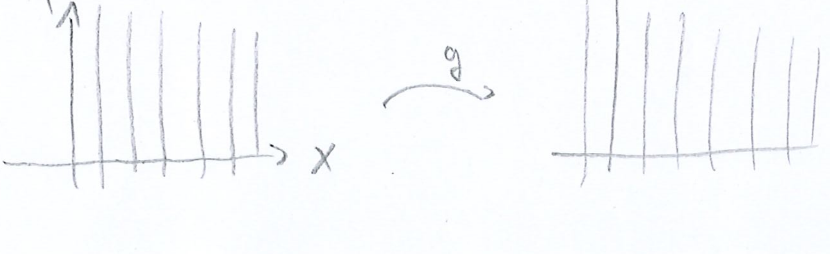
$g(\{x\}\times Y) = \{\tilde{x}\}\times Y$. Dann gibt es $g_1 \in \mathrm{Isom}(X)$ und $g_2 \in \mathrm{Isom}(Y)$ so, dass für alle $(x,y)\in X\times Y$ gilt

$$g(x,y) = (g_1(x), g_2(y))$$

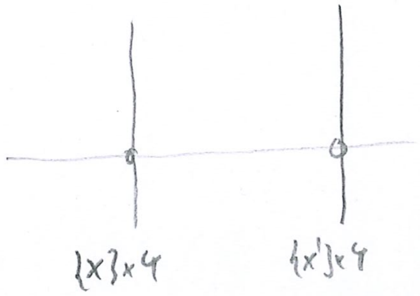
<u>Bew:</u> Betrachte die natürlichen Projektionen

$$X \xleftarrow{pr_X} X\times Y \xrightarrow{pr_Y} Y$$

Setze $\{g_1(x)\} = pr_X\, g(\{x\}\times Y)$ (d.h. $g_1(x) = \tilde{x}$)



$\rightsquigarrow g_1 : X \to X$ ist Bijektion. Für $x, x' \in X$ gilt $\inf d(\{x\}\times Y, \{x'\}\times Y) = d_X(x,x')$



$\Rightarrow g_1$ ist Isometrie von X.

Wähle nun $x_0 \in X$ und definiere g_2 durch

$g(x_0, y) = (g_1(x_0), g_2(y))$.

Sei nun $(x,y) \in X \times Y$ beliebig. Schreibe

$g(x,y) = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (g_1(x), \tilde{y})$. Dann ist

$$\begin{aligned} d_X(x_0,x)^2 &= d((x_0,y),(x,y))^2 \\ &= d(g(x_0,y), g(x,y))^2 \\ &= d((g_1(x_0), g_2(y)), (g_1(x), \tilde{y}))^2 \\ &= d_X(g_1(x_0), g_1(x))^2 + d_Y(g_2(y), \tilde{y})^2 \\ &\Rightarrow g_2(y) = \tilde{y} \end{aligned}$$

Also gilt $g(x,y) = (g_1(x), g_2(y))$ für alle $(x,y) \in X \times Y$

$\rightsquigarrow g(X \times \{y\}) = X \times \{g_2(y)\}$

$\Rightarrow g_2$ ist auch Isometrie. $\square$

<u>Bem</u> Ist $X = Y = \mathbb{R}$ und g Rotation um $90°$, $g(x,y) = (-y, x)$, so ist g <u>nicht</u> von so einer Form.

Im Allgemein gilt $\mathrm{Isom}(X)\times\mathrm{Isom}(Y) \subsetneq \mathrm{Isom}(X\times Y)$, etwa für $X=Y=\mathbb{R}$!

16. <u>Satz</u> Sei X ein CAT(0)-Raum und sei $g\in\mathrm{Isom}(Y)$ hyperbolisch. Dann gibt es ein Isometrie

$$\varphi : M_g \xrightarrow{\cong} Y\times\mathbb{R}$$

für ein (konvexe) Teilmenge $Y\subseteq M_g$ so, dass φ die Achsen von g genau auf die Mengen $\{y\}\times\mathbb{R}$ abbildet, $y\in Y$.

Ist $a\in\mathrm{Isom}(X)$ mit $ag=ga$, so gilt $a(M_g)=M_g$ und a wirkt via φ auf $Y\times\mathbb{R}$ durch

$$a(y,t) = (a_1(y), t+a_2) \qquad \begin{array}{l} a_1\in\mathrm{Isom}(Y) \\ a_2\in\mathbb{R}\end{array}$$

<u>Beweis</u> Sei $E\subseteq X$ ein Achse von g. Dann gilt mit §4.10, §4.14, dass M_g isometrisch ist zu $Y\times E$, $Y\subseteq M_g$. Die Achsen von g sind genau die Mengen $\{y\}\times E$, $y\in Y$. Damit erhalten wir $\varphi : M_g \xrightarrow{\cong} Y\times\mathbb{R}$.

Wenn $ag=ga$, so ist $a(M_g)=M_g$ nach §4.3.

Ist F eine Achse von g, so ist $a(F)$ ein Achse von $aga^{-1}=g$ $\Rightarrow$ a permutiert die Achsen von g. Mit §4.15 folgt, dass a auf $Y\times\mathbb{R}$ operiert durch $a(y,t) = (a_1(y), b_2(t))$
$a_1\in\mathrm{Isom}(Y)$, $b\in\mathrm{Isom}(\mathbb{R}) = \{x\mapsto \varepsilon x+c \mid \varepsilon=\pm1, c\in\mathbb{R}\}$

Dort operiert g durch $(y, t) \longmapsto (y, t+c)$ $c \neq 0$.

Da $ag = ga$ gilt, folgt $b(t) = t + a_2$, $a_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Korollar Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $g \in \mathrm{Isom}(X)$. Dann sind äquivalent:

(i) g ist hyperbolisch

(ii) g^k ist hyperbolisch für alle $k \neq 0$

(iii) g^k ist hyperbolisch für ein k

Beweis Es gilt (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), vgl. §4.7.

Angenommen, g^k ist hyperbolisch. Da gilt $g g^k = g^k g$, wirkt g auf $M_{g^k} \cong Y \times \mathbb{R}$ durch

$$(y, t) \longmapsto (g_1(y), t + c)$$

und damit g^k durch $(y, t) \longmapsto \underbrace{(g_1^k(y), t + kc)}_{= (y, t + k \cdot c)} \Rightarrow c \neq 0$

$\Rightarrow g_1^k = \mathrm{id}_Y$. Da M_g abgeschlossen ist, ist M_g vollständig $\Rightarrow$ Y ist auch vollständig. Nach dem Bruhat-Tits Fixpunktsatz gibt es $z \in Y$ mit $g_1(z) = z$.

Folglich ist $\varphi^{-1}(\{z\} \times \mathbb{R})$ eine Achse von g $\Rightarrow$ g ist hyperbolisch nach §4.7.

<u>Korollar</u> Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $S \subseteq Isom(X)$ die Menge aller halbeinfachen Isometrien.

Dann gilt: (i) $g \in S \Rightarrow g^k \in S$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

(ii) ist $g \in Isom(X)$ und $g^k \in S$ für ein $k \neq 0$, so ist $g \in S$

"Potenzen und Wurzeln halbeinfacher Elemente sind halbeinfach".

Beachte: Produkte von halbeinfachen Elementen sind nicht immer halbeinfach!

#

17\. <u>Def</u> Sei X ein metrischer Raum. Ein <u>m-Flach</u> (engl. m-flat) $E \subseteq X$ ist ein Teilraum, der isometrisch ist zum m euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ (bzgl. $\|\cdot\|_2$). Der <u>Flach-Rang</u> von X ist

$$rkf(X) = \sup\{ m \geq 0 \mid \text{es gibt ein } m\text{-Flach in } X \}$$

<u>Bsp</u>

- $rkf(\mathbb{R}^m) = m$ wenn $\mathbb{R}^m$ die euklidische Metrik trägt
- $rkf(H^m) = 1$ H^m hyperbolischer Raum

Wir benötigen einen Fakt über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

18. <u>Lemma A</u> Sei $(A,+)$ eine abelsche Gruppe. Dann ist die Menge $tA \subseteq A$ aller Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe von A.

<u>Beweis</u> Es gilt $0 \in tA$ und $a \in tA \Rightarrow -a \in tA$ (✓).
Ist $a, b \in tA$, etwa $ma = 0 = n \cdot b$, $m, n > 0$, so ist
$m \cdot n(a+b) = 0 \Rightarrow a+b \in tA$ $\square$

Eine Gruppe heißt <u>torsionsfrei</u>, wenn kein Element außer dem Neutralelement endliche Ordnung hat.

<u>Lemma B</u> Sei $(A,+)$ eine abelsche Gruppe. Dann ist $A/_{tA}$ torsionsfrei.

<u>Beweis</u> Sei $a + tA \in A/_{tA}$ von endlicher Ordnung, etwa $ma + tA = tA$ für $m \geq 1$. Es folgt $ma \in tA$
$\Rightarrow$ es gibt $n \geq 1$ mit $m \cdot na = 0 \Rightarrow a \in tA$ $\square$

Eine Gruppe heißt endlich erzeugt, wenn sie ein endliches Erzeugendensystem hat.

<u>Lemma C</u> Eine endlich erzeugte (abelsche) Gruppe $(A,+)$ ist genau dann torsionsfrei, wenn gilt

$$A \cong \mathbb{Z}^m \quad \text{für ein } m \geq 0.$$

Beweis Für $A = \{0\}$ ist das klar.

Sei m die minimale Anzahl der Erzeuger von A. Jedes m-Tupel $F = (f_1, \ldots, f_m)$ von Erzeugern von A liefert einen Epimorphismus $\varphi_f : \mathbb{Z}^m \to A$, $z \mapsto \sum_{i=1}^m z_i f_i$.

Beh Es gibt ein m-Tupel $(f_1, \ldots, f_m)$ so, dass φ_f injektiv (also bijektiv) ist.

Denn sonst: Setze $l_f = \min \{ \|z\|_1 \mid z \in \ker(\varphi_f), z \neq 0 \}$

und wähle f so, dass l_f minimal ist,

$$l_f = |z_1| + \ldots + |z_m| \quad , \quad \sum_{j=1}^m z_j f_j = 0.$$

OE $|z_1| \geq |z_2| \geq \ldots \geq |z_m|$.

Wäre $z_j = 0$ für alle $j \geq 2$, so $z_1 f_1 = 0$ ↯

weil A torsionsfrei und $z_1 \neq 0$. Insbesondere ist $m \geq 2$ und $l_f \geq 2$. Wähle $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ so, dass $|z_1 + \varepsilon z_2| < |z_1|$.

Nun $(z_1 + \varepsilon z_2) f_1 + z_2 (f_2 - \varepsilon f_1) + z_3 f_3 + \ldots + = 0$

$\tilde{f} = (f_1, f_2 - \varepsilon f_1, f_3, \ldots, f_m) \rightsquigarrow l_{\tilde{f}} < l_f$ ↯ □

Lemma D Sei $m, n \in \mathbb{N}$. Wenn gilt $\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n$, so ist $m = n$.

Beweis $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^m$ (als $\mathbb{Q}$-Vektorraum)

also $\underset{\text{als ab. Gruppe}}{\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n} \Rightarrow \underset{\text{als } \mathbb{Q}\text{-V.R.}}{\mathbb{Q}^m \cong \mathbb{Q}^n} \Rightarrow m = n$

19. <u>Satz</u> Sei $(A,+)$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Untergruppe $H \subseteq A$ so, dass $A = H \oplus tA$. Dabei ist tA endlich und $H \cong \mathbb{Z}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, das nur von A abhängt. Man nennt m den <u>$\mathbb{Q}$-Rang</u> von A, $m = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(A)$

<u>Beweis</u> Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A/_{tA} \arrow[d, "\cong"', "\text{(Lemma B+C)}"] \\ & \mathbb{Z}^m \end{tikzcd}$$

Für $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{-}j$ wähle $a_j \in A$ mit $\varphi(a_j) = e_j$.

Definiere $\psi: \mathbb{Z}^m \to A$ durch $\psi(z_1, \dots, z_m) = \sum_{j=1}^{m} z_j a_j$.

Es folgt $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^m} \Rightarrow \psi$ injektiv. Setze $H = \psi(\mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^m$. Da $t\mathbb{Z}^m = \{0\}$ ist $tA \cap H = \{0\}$.

Für $a \in A$ gilt $\psi \circ \varphi(a) \in H$ sowie

$\varphi(a - \psi\varphi(a)) = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$, also $a - \psi\varphi(a) \in tA$ und damit $a \in H + tA \Rightarrow A = H \oplus tA$. Damit

$H \cong A/_{tA} \cong \mathbb{Z}^m$ nach Lemma C. Weiter ist

$tA \cong A/_H$ endlich erzeugt.

Sind $b_1, \dots, b_r$ Erzeuger von tA, so gibt es $l \geq 1$ mit $lb_1 = lb_2 = \dots = lb_r = 0$ und damit ein Epimorphismus $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^r \to tA$. $\square$

20. **Lemma** Sei $(A,+)$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, sei $H \subseteq A$ eine Untergruppe. Dann ist H endlich erzeugt.

Beweis 1. Fall: A endlich $\Rightarrow$ H endlich (✓)

2. Fall $A \cong \mathbb{Z}$ Dann ist H zyklisch (✓)

3. Fall $A \cong \mathbb{Z}^m$, $m \geq 2$. Betrachte

$$\pi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^{m-1}, \quad (z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_1, \dots, z_{m-1}).$$

Dann ist $\pi(H)$ endlich erzeugt und

$\underbrace{\ker(\pi)}_{\cong \mathbb{Z}} \cap H$ ist endlich erzeugt nach 2.

Ist h_0 Erzeuger von $\ker(\pi) \cap H$ und sind $\pi(h_1), \dots, \pi(h_l)$ Erzeuger von $\pi(H)$, so sind $h_0, \dots, h_l$ Erzeuger von H.

4. Fall A endlich erzeugte abelsche Gruppe.

Betrachte $\varphi : A \to A/_{tA} \cong \mathbb{Z}^m$

Dann ist $\varphi(H)$ endlich erzeugt nach 3. und $H \cap tA$ ist endlich. Also ist H endlich erzeugt (gleiches Argument wie in 3.) $\square$ #

21. <u>Lemma</u> Sei $(A,+)$ eine abelsche Gruppe mit Erzeugern $a_1, \dots, a_m$. Sei X ein vollst. CAT(0)-Raum, sei $A \to \mathrm{Isom}(X)$ ein Homomorphismus (d.h. A wirkt isometrisch auf X). Wenn jedes a_j, $j=1,\dots,m$ ein Fixpunkt hat, so hat A einen Fixpunkt.

<u>Beweis</u> Induktion nach m.

$m=0$ trivial

<u>$m=1$:</u> wenn $a_1(p)=p$, so auch $(k a_1)(p)=p$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

<u>$m \geq 2$:</u> Nach I.A. ist $Y = \mu_{a_1} \cap \dots \cap \mu_{a_{m-1}} \neq \emptyset$

Da a_m mit allen a_j vertauscht, gilt

$a_m(\mu_{a_j}) = \mu_{a_j}$ für $j=1,\dots,m-1$ (§4.3)

$\Rightarrow a_m(Y) = Y$. Da Y konvex ist, gilt

$0 = l_{a_m} = l_{a_m|Y}$ d.h. $\mu_{a_m} \cap Y \neq \emptyset$. $\square$

22. **Lemma** Seien A, B endlich erzeugt abelsch Gruppen und sei $\varphi: A \to B$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann gilt $rk_{\mathbb{Q}}(A) \geq rk_{\mathbb{Q}}(B)$.

Beweis Die Untergruppe $tA \leq A$ ist im Kern von $\pi_B \circ \varphi$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \arrow[d, "\pi_B"] \\ A/tA \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & B/tB \end{tikzcd}$$

also existiert nach dem Homomorphiesatz genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi}: A/tA \to B/tB$. Da φ, π_A und π_B surjektiv sind, ist $\bar{\varphi}$ surjektiv. Weiter induziert $\bar{\varphi}$ ein Homomorphismus $\bar{\varphi}^\vee: \mathrm{Hom}(A/tA, \mathbb{Q}) \leftarrow \mathrm{Hom}(B/tB, \mathbb{Q})$

via $\bar{\varphi}^\vee(\alpha) = \alpha \circ \bar{\varphi}$

$$\begin{tikzcd} A/tA \arrow[r] & B/tB \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Ist $\alpha \neq 0$ so ist $\alpha \circ \bar{\varphi} \neq 0 \Rightarrow \bar{\varphi}^\vee$ ist injektiv

$$\mathbb{Q}^m \xleftarrow{\bar{\varphi}^\vee} \mathbb{Q}^n \qquad \Rightarrow n \leq m. \qquad \square$$

23. Def Eine Untergruppe A von $\mathbb{R}^m$ heißt <u>Standard</u> (-Untergruppe), wenn es eine Basis $w_1, \dots, w_m$ von $\mathbb{R}^m$ gibt mit

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^m z_j w_j \;\middle|\; z_1, \dots, z_m \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dann ist $\mathbb{R}^m/A \cong (S^1)^m$ ein <u>m-Torus</u>, via

$$v + A \longmapsto (\exp(2\pi i v_1), \dots, \exp(2\pi i v_m))$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j w_j$$

<u>Lemma</u> Sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Untergruppe. Wenn es $\varepsilon > 0$ gibt so, dass $B_\varepsilon(0) \cap A = \{0\}$, so gibt es einen Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $A \subseteq W$ so, dass $A \subseteq W$ Standarduntergruppe ist.

<u>Beweis</u> Wir wählen $W \subseteq V$ mit maximaler Dimension l so, dass $A \cap W \subseteq W$ Standarduntergruppe ist. Sei $w_1, \dots, w_l$ Basis von W mit

$$A \cap W = \left\{ \sum_{j=1}^l z_j w_j \;\middle|\; z_1, \dots, z_l \in \mathbb{Z} \right\}$$

<u>Zu zeigen: $A \subseteq W$.</u> Wäre das falsch, gäbe es $a \in A - W$. Betrachte die kompakte Menge

$$C = \{ t_1 w_1 + \dots + t_l w_l + t a \mid 0 \leq t_1, \dots, t_l, t \leq 1 \}$$

Es gibt $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $a \in A$ gilt

$B_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$. Folglich ist $A \cap G$ endlich (und nicht leer).

Wir wählen $\tilde{a} \in G \cap A$ so, dass

$$\tilde{a} = t_1 w_1 + \dots + t_e w_e + t a \quad \text{mit } 0 \le t_1, \dots, t_e < 1 \text{ und mit}$$

$$0 < t \le 1 \quad \underline{\text{minimal}}.$$

<u>Beh:</u> $A \cap (W \oplus \mathbb{R}\tilde{a}) = A \cap W + \mathbb{Z}\tilde{a}$.

Die Inklusion "$\supseteq$" ist klar.

Ist $b \in A \cap (W + \mathbb{R}\tilde{a})$ so gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$b + k \cdot \tilde{a} = s_1 w_1 + \dots + s_e w_e + s\tilde{a} \quad \text{mit } s_j \in \mathbb{R},\ 0 \le s < t.$$

Weiter gibt es $b' \in A \cap W$ mit

$$b + k \cdot \tilde{a} + b' = s_1' w_1 + \dots + s_e' w_e + s\tilde{a} \quad \text{mit } 0 \le s_j' < 1.$$

Es folgt $s = 0$, d.h. $b + k\tilde{a} + b' \in A \cap W$

$\Rightarrow b \in A \cap W \oplus \mathbb{Z}\tilde{a}$. $\square$

Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von W,

denn $A \cap (W \oplus \mathbb{R}\tilde{a})$ ist Standard in $W \oplus \mathbb{R}\tilde{a}$. $\square$

24. **Def** Sei X ein metrischer Raum, sei G eine Gruppe. Eine isometrische Wirkung $G \times X \to X$ heißt <u>metrisch eigentlich</u> (engl. <u>proper action</u>) wenn es für jedes $p \in X$ ein $\varepsilon > 0$ gibt so, dass die Menge $\{g \in G \mid B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(g(p)) \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Es folgt dann:

(i) für jedes $p \in X$ ist der Stabilisator $G_p = \{g \in G \mid g(p) = p\}$ <u>endlich</u>.

(ii) für jedes $p \in X$ gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass
$$\{g \in G \mid d(p, g(p)) < \varepsilon\} = G_p.$$

<u>Satz</u> Sei $(A,+)$ eine abelsche Gruppe, sei $\tau : A \to \mathbb{R}^m$ ein Homomorphismus. Wenn die Wirkung
$$A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$
$$(a, v) \longmapsto \tau(a) + v$$
eigentlich ist, so gilt $\ker(\tau) = tA$ und es gibt $\varepsilon > 0$ so, dass $\tau(A) \cap B_\varepsilon(0) = \{0\}$ gilt. Insbesondere ist $\tau(A)$ endlich und A ist endlich erzeugt, mit $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(A) \leq m$.

<u>Beweis</u> Wenn die Wirkung eigentlich ist, so ist $\ker(\tau)$ endlich. Da $\mathbb{R}^m$ torsionsfrei ist, gilt $tA \subseteq \ker(\tau)$ $\Rightarrow$ $tA = \ker(\tau)$. Nun benutze §4.22. $\square$

25. Theorem (Satz vom Flachen Torus)

Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei

$A \times X \to X$ eine isometrische halbeinfache Wirkung.

Sei $B \subseteq A$ die Menge aller elliptischen Elemente in A, sei $n = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(A)$ und sei $X_0 = \bigcap_{a \in A} \mu_a$. Dann gilt:

(i) $X_0 \neq \emptyset$, $B \subseteq A$ ist eine Untergruppe, $tA \subseteq B$

(ii) Es gibt eine Isometrie $X_0 \cong Y \times \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ und einen Homomorphismus $\tau : A \to \mathbb{R}^m$ so, dass A auf $Y \times \mathbb{R}^m$ wirkt durch

$$a(y, v) = (y, \tau(a) + v)$$

Weiter gilt $B = \ker(\tau)$ und $\tau(A)$ erzeugt $\mathbb{R}^m$ als Vektorraum.

(iii) Falls die Wirkung $A \times X \to A$ eigentlich ist, so ist $B = tA$, $m = n$ und $\tau(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist Standard.

(Also ist der Bahnraum ${}_A\backslash X_0 \cong Y \times (S^1)^m$.)

Beweis Nach §4.21 ist $B \subseteq A$ eine Untergruppe und nach dem Bruhat-Tits Fixpunktsatz gilt $tA \subseteq B$.

Nach §4.21 ist $X_1 = \bigcap_{b \in B} M_b \neq \emptyset$ und

X_1 ist A-invariant nach §4.3. Also wirkt A auf $X_1 \subseteq X$, und $B \subseteq A$ ist der Kern dieser Wirkung.

Jetzt weiter mit Induktion nach $n = rk_{\mathbb{Q}}(A)$.

$n = 0 \Rightarrow A = tA = B$, $X_0 = X_1$, $m = 0$ (v).

Jetzt $n \geq 1$. Schreibe $A = \mathbb{Z}a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}a_n \oplus tA$

Dann wirkt a_1 als hyperbolische Isometrie auf X_1.

$\Rightarrow M_{a_1} \cap X_1 \cong Z \times \mathbb{R} \neq \emptyset$ nach §4.16, $Z \subseteq X_1$

a_1 wirkt durch $a_1(z, x) = (z, t + x)$.

~~Für $1 < j \leq n$ wirkt a_j nach §4.16 auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ durch $a_j(z, x) = (\tilde{a}_j(z), x + t_j)$ $\tilde{a}_j \in Isom(Z)$~~

~~Weiter ist $\tilde{a}_j$ halbeinfach (ÜA!) Nach Induktion annehmen~~

Jedes $a \in A$ wirkt nach §4.16 auf $Z \times \mathbb{R}$

durch $a(z, x) = (\tilde{a}(z), t_a + x)$, $\tilde{a} \in Isom(Z)$.

Weiter ist $\tilde{a}$ halbeinfach, weil a halbeinfach

Nach Induktionsannahme erhält wir ein

Teilung $Z_1' \subseteq Z$ $\quad Z_1 \cong Y \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{m-1}$, $m-1 \leq n-1$

Jedes $\tilde{a}_j$, $2 \leq j \leq n$ wirkt auf $Y \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$

durch $\tilde{a}_j(y, x_2, \ldots, x_n) = (y, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j + t_{jj}, \ldots, x_m + t_{jm})$

$t_{jj} \neq 0$

Damit ist (ii) gezeigt. Weiter gilt

$\underbrace{\mu_{a_2} \cap \cdots \cap \mu_{a_{n-1}} \cap X_1 \cap \mu_{a_1}}_{= X_0} \cong Y \times \mathbb{R}^m$

und (i) gilt.

Falls die Wirkung $A \times X \to X$ eigentlich ist, so ist $B \subseteq tA \Rightarrow B = tA$, nach §4.24 ist $T(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ Standard. $\square$ #

<u>Korollar</u> Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, sei $m = \mathrm{rkF}(X)$ der Flach-Rang von X und $n = \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(A)$. Wenn A isometrisch, halbeinfach und metrisch eigentlich auf X wirkt, dann gilt $m \geq n$.