§5. Symmetrische Räume und Gebäude

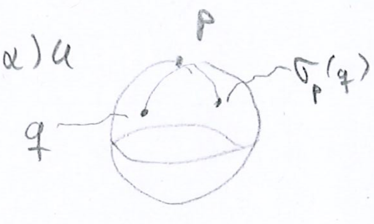
1. <u>Def</u> Sei (M,g) eine zusammenhängende Riem. Mannf. Wir nennen M einen <u>Riemannsch symmetrischen Raum</u> wenn es für jedes $p \in M$ eine Isometrie $\sigma_p : M \to M$ gibt mit $\sigma_p^2 = id_M$, die p als isolierten Fixpunkt hat (d.h. es gibt $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(p)$ keinen Fixpunkt von σ_p enthält außer p).

<u>Beispiele</u> (a) $M = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$

$\sigma_p(p+v) = p - v$ Punktspiegelung an p

(b) $M = S^m$, $m \geq 1$

$\sigma_p(\cos(\alpha)p + \sin(\alpha)u) = \cos(\alpha)p - \sin(\alpha)u$



$\|u\|_2 = 1$, $\langle u, p\rangle = 0$

σ_p hat zwei Fixpunkte, nämlich p und $-p$.

(c) $M = H^m$, $m \geq 1$

$\sigma_p(\cosh(\alpha)p + \sinh(\alpha)u) = \cosh(\alpha)p - \sinh(\alpha)u$

$\beta(u,u) = -1$, $\beta(u,p) = 0$

2. Satz Sei (M,g) ein Riemannscher symmetrischer Raum.

Dann gilt:

(i) M ist vollständig.

(ii) Für jedes $p \in M$, $X \in T_pM$ gilt $\sigma_p(\exp_p(X)) = \exp_p(-X)$.
Insbesondere ist σ_p eindeutig.

(iii) Für alle $p, q \in M$ gibt es eine Isometrie $h \in \mathrm{Isom}(M)$ mit $h(p)=q$, $h(q)=p$. Insbesondere wirkt $\mathrm{Isom}(M)$ transitiv auf M.

Beweis Sei $p \in M$, sei $V \subseteq T_pM$ der offene Definitionsbereich von $\exp_p : V \to M$, sei $A : T_pM \to T_pM$ die Ableitung von σ_p. Dann gilt $A^2 = id_{T_pM}$, also folgt $T_pM = E_+ \oplus E_-$

$$E_+ = \{X \in T_pM \mid AX = X\}$$
$$E_- = \{X \in T_pM \mid AX = -X\}$$

Beh: $E_+ = \{0\}$. Denn sonst gäbe es $X \in E_+$, $g(X,X)=1$, $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp_p(tX)$ definiert für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Dann $\sigma_p(\exp_p(tX)) = \exp_p(AtX) = \exp_p(tX)$

$\Rightarrow$ p kein isolierter Fixpunkt von σ_p ↯

Sei nun $X \in T_pM$, $g(X,X)=1$, sei $J \subseteq \mathbb{R}$ der maximale Definitionsbereich der (Riem.) Geodäte $c(t) = \exp_p(tX)$.

Sei $s \in J$, $s > 0$. Dann gilt für $s \le t \le 2s$, dass

$$c(t) = \exp_q((t-s)Y) \qquad Y = \dot{c}(s), \quad q = c(s)$$

Daher ist $\exp_q(rY)$ für $0 \le r \le s$ definiert, weil $\exp_q(-rY) = c(s-r)$ für $0 \le r \le s$ definiert ist.

Es folgt, dass $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert ist.

Mit dem Satz von Hopf-Rinow §7.11 folgt (i) sowie (ii). Ist $q \in M$, so gibt es $X \in T_pM$ mit $q = \exp_p(X) \Rightarrow \sigma_p(q) = \exp_p(-X)$ ist eindeutig bestimmt.

Zu (iii). Sei $p, q \in M$, $d(p,q) = r$. Sei $c : [0,r] \to M$ Riem. Geodät von p nach q, $m = c(r/2)$.

Dann $p = \exp_m(X)$ und $q = \exp_m(-X)$ für ein $X \in T_mM$

$\Rightarrow \sigma_m(p) = q$ und $\sigma_m(q) = p$. □

<u>Bem</u> Sei (M,g) ein Riem. sym. Raum, sei $p \in M$.

Seien X, Y, Z, W glatte Vektorfelder nahe p.

Dann gilt

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z = \nabla_W(R(X,Y)Z) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z$$

Anwenden der Isometrie σ_p und Auswerten in p liefert

$$-(\nabla_W R)(X,Y)Z\big|_p = (\nabla_W R)(X,Y)Z \Rightarrow \nabla_W R = 0 \quad \text{oder}$$

kurz $\nabla R = 0$, in einem Riem. sym. Raum ist der Krümmungstensor parallel.

3. Nun gilt folgender Satz:

<u>Satz</u> Sei (M,g) eine vollst. Riem. Mannigfaltigkeit. Wenn $\nabla R = 0$ gilt und wenn M einfach zusammenhängend ist, so ist (M,g) symmetrisch. Insbesondere ist die universelle Überlagerung eines Riem. sym. Raums wieder ein Riem. sym. Raum.

[Helgason Ch IV Thm 5.6]

Weiter gilt folgender Zerlegungssatz.

<u>Satz</u> Sei (M,g) ein einfach zush. Riem. sym. Raum. Dann gilt

$$M \cong M_1 \times \dots \times M_l \times \mathbb{R}^n$$

Die M_j sind entweder vom <u>kompakten Typ</u> mit $K \geq 0$ oder vom nicht kompakten Typ, mit $K \leq 0$, irreduzibel und nicht flach.

[Helgason Ch $\underline{V}$ Prop 4.2, Ch $\underline{VI}$, Ch $\underline{VII}$]

Die irreduziblen (einfach zush.) Riem. sym. Räume wurden von Cartan klassifiziert, vgl. Helgason.

Wir studieren jetzt ein Beispiel.

4. Notation Sei $S(m)$ der Vektorraum aller reellen symmetrischen $m\times m$-Matrizen, $\dim S(m) = \frac{m(m+1)}{2}$.

Sei $P(m) \subseteq S(m)$ die Menge aller positiv definiten symmetrischen $m\times m$-Matrizen. Die Gruppe $GL(m,\mathbb{R})$ operiert linear auf $S(m)$ durch

$$(a, X) \longmapsto aXa^T$$

Ist $X \in P(m)$, so gilt auch $aXa^T \in P(m)$, d.h. $GL(m,\mathbb{R})$ operiert auch auf $P(m) \subseteq S(m)$.

Lemma A Sei $X \in P(m)$ und $Y \in S(m)$. Dann existiert $a \in GL(m,\mathbb{R})$ mit $aXa^T = \mathbb{1}$ und aYa^T diagonal.

Beweis Nach Gram-Schmidt gibt es eine Matrix $b \in GL(m,\mathbb{R})$ mit $bXb^T = \mathbb{1}$. Die Matrix bYb^T erlaubt eine ONB aus Eigenvektoren, also gibt es eine orthogonale Matrix c mit $cbYb^Tc^T$ diagonal. Setze $a = b\cdot c$ $\square$

Es folgt: $GL(m,\mathbb{R})$ operiert transitiv auf $P(m)$ und $P(m) \subseteq S(m)$ ist offen. Der Stabilisator von $\mathbb{1} \in P(m)$ ist die orthogonale Gruppe $O(m)$ und wir erhalten eine Bijektion $GL(m,\mathbb{R})/O(m) \longrightarrow P(m)$ via

$$aO(m) \longmapsto aa^T$$

Lemma B Sei $X \in P(m)$, sei $l \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es genau ein $Y \in P(m)$ mit $Y^l = X$, schreibe $Y = X^{1/l}$.

Beweis Seien $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_r$ die Eigenwerte von X, mit Eigenräumen $E_1, \dots, E_r \subseteq \mathbb{R}^m = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$. Sei Y der Endomorphismus von $\mathbb{R}^m$ mit $Y|_{E_j} = \lambda_j^{1/l}\, \mathrm{id}_{E_j}$

$\Rightarrow Y^l = X$. Da die E_j paarweise orthogonal sind, ist Y auch symmetrisch und positiv definit, $Y \in P(m)$.

Ist $Z \in P(m)$ mit $Z^l = X$, Eigenwerte $0 < \mu_1 < \dots < \mu_s$ und Eigenräume $F_1, \dots, F_s$, so folgt $X|_{F_j} = \mu_j^l$

$\Rightarrow s = r$, $\mu_j^l = \lambda_j$ und $Y = Z$. $\square$

Wir verallgemeinern das noch etwas. Ist X ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^m$, so definieren wir $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$ #

Lemma C Die Einschränkung

$$\exp : S(m) \to P(m)$$

ist eine (glatte) Bijektion.

Beweis Sei $X \in S(m)$ mit Eigenwerten $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ und Eigenräumen $E_1, \dots, E_r$, $X|_{E_j} = \lambda_j\, \mathrm{id}_{E_j}$.

Es folgt $\exp(X)|_{E_j} = \exp(\lambda_j)\, \mathrm{id}_{E_j} \Rightarrow \exp(X) \in P(m)$.

Ist $Y \in P(m)$ mit Eigenwerten $0 < \mu_1 < \ldots < \mu_s$ und Eigenräumen $F_1, \ldots, F_s$, $Y|_{F_j} = \mu_j \, id_{F_j}$, so definiere $X \in S(m)$ durch $X|_{F_j} = \log(\mu_j) \, id_{F_j}$, dann gilt $\exp(X) = Y$

Die Eindeutigkeit von X folgt wie in Lemma B. $\square$

Da $P(m) \subseteq S(m)$ offen ist, ist $P(m)$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{m(m+1)}{2}$.

Für jedes $p \in P(m)$ können wir den Tangentialraum $T_p P(m)$ mit $S(m)$ identifizieren, durch die Abbildung

$$S(m) \to T_p P(m), \quad X \longmapsto D_X|_p$$

$\uparrow$ Richtungsableitung in Richtung X an der Stelle p.

Wir benutzen diese Identifikation im Folgenden. #

<u>Lemma D</u> Für $X, Y \in S(m)$ und $p \in P(m)$ definieren wir

$$g_p(X,Y) = tr(p^{-1} X p^{-1} Y)$$

Dann ist g eine Riemannsche Metrik auf $P(m)$ und die $GL(m,\mathbb{R})$ wirkung erhält diese Metrik.

Beweis Klar: g ist eine glatte Funktion von p, X, Y und für festes p eine symmetrische Bilinearform. Für $p = \mathbb{1}$ ist sie positiv definit. Für $g \in GL(m, \mathbb{R})$ gilt mit $p = g \mathbb{1} g^T = gg^T$, dass

$$g_p(gXg^T, gYg^T) = \mathrm{tr}\left(p^{-1} gXg^T p^{-1} g Y g^T\right)$$

$$= \mathrm{tr}(g^{-T} g^{-1} g X g^T g^{-T} g^{-1} g Y g^T) = \mathrm{tr}(g^{-T} XY g^T) = \mathrm{tr}(XY)$$

$= g_{\mathbb{1}}(X, Y) \leadsto g_p$ positiv definit und $GL(m, \mathbb{R})$ wirkt isometrisch. $\square$

Lemma E Die Abbildung $\tau_{\mathbb{1}} : q \longmapsto q^{-1}$ ist eine Isometrie von $P(m)$.

Beweis Sei $X \in S(m)$, $c(t) = q + tX$, $\tilde{c}(t) = (q+tX)^{-1}$ (für $|t|$ klein) $\leadsto c(t)\tilde{c}(t) = \mathbb{1}$

$\dot{c}(0) = X$

$\leadsto \dot{c}(0) q^{-1} + q \dot{\tilde{c}}(0) = 0$

$\leadsto \dot{\tilde{c}}(0) = -q^{-1} X q^{-1}$ $\qquad g_q(X, Y) = \mathrm{tr}(q^{-1} X q^{-1} Y)$

$$g_{q^{-1}}(-q^{-1}Xq^{-1}, -q^{-1}Yq^{-1}) = \mathrm{tr}(Xq^{-1}Yq^{-1}) = g_q(X, Y) \quad \square$$

Theorem $P(m)$ ist mit der Riemannschen Metrik

$$g_p(X,Y) = \mathrm{tr}(p^{-1}Xp^{-1}Y)$$ ein Riemannscher Symmetrischer Raum. Für $p, q \in P(m)$ gilt $\tau_p(q) = p\,q^{-1}p$.

Beweis Nach Lemma D ist $P(m)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, auf der $GL(m,\mathbb{R})$ transitiv isometrisch operiert. Weiter ist $\tau_{\mathbb{1}}$ Isometrie, $\tau_{\mathbb{1}}^2 = id_{P(m)}$ und $\mathbb{1}$ ist der einzige Fixpunkt von $\tau_{\mathbb{1}}$. Ist $p = aa^T$, so ist $\tau_p = a \circ \tau_{\mathbb{1}} \circ a^{-1}$ Involution mit Fixpunkt p, und $\tau_p(q) = a\left(a^{-1}qa^{-T}\right)^{-1}a^T = aa^Tq^{-1}aa^T = p\,q^{-1}p$ $\square$

5. **Satz** Auf $P(m)$ ist die Riemannsche Exponentialfunktion gegeben durch

$$\exp_{\mathbb{1}} : T_{\mathbb{1}}P(m) \to P(m)$$
$$X \longmapsto \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}X^k.$$

~~**Beweis** Es gibt ~~eine~~ Umgebung $W \subseteq P(m)$ von $\mathbb{1}$ so, dass jedes $q \in W$ durch eine eindeutige kürzeste Riem. Geodätische mit $\mathbb{1}$ verbunden ist. Sei p der Mittelpunkt von $\mathbb{1}$ und q. Dann gilt $\tau_p(\mathbb{1}) = q =$~~

Beweis Sei $q \in P(m)$, sei c eine kürzeste Geodätische von $\mathbb{1}$ nach q, sei p der Mittelpunkt von $\mathbb{1}$ und q längs c. Dann gilt $\tau_p(\mathbb{1}) = q \Rightarrow q = p^2$

Also ist $q^{1/2}$ der eindeutige (Lemma 15) Mittelpunkt von $\mathbb{1}, q$.

Ist c Riem. Geodät. von $\mathbb{1}$ zu q, $c(0)=\mathbb{1}$, $c(1)=q$

so folgt $c(t)=q^t$ für alle $t\in\mathbb{Z}[\tfrac12]\cap[0,1]$

Andererseits $q=\exp(X)$ nach Lemma G' und

$q^t=\exp(tX)$ für $t\in\mathbb{Z}[\tfrac12]\cap[0,1]$

$\Rightarrow c(t)=\exp(tX)$ für alle $t\in[0,1]$ $\square$

Korollar Es gilt für die Metrik d auf $P(m)$

$$d(\mathbb{1},\exp(X))^2=\operatorname{tr}(X^2)\quad,\quad X\in S(m)$$

Korollar Sei $\mathfrak{a}\subseteq S(m)$ der UVR, der aus allen Diagonalmatrizen besteht, $\mathfrak{a}\cong\mathbb{R}^m$. Dann ist $\exp:\mathfrak{a}\to E\subseteq P(m)$ eine Isometrie, wobei E die Menge aller Diagonalmatrizen in $P(m)$ ist.

Beweis Seien $X,Y\in\mathfrak{a}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}d(\exp(X),\exp(Y))^2&=d(\mathbb{1},\exp(-X/2)\exp(Y)\exp(-X/2))^2\\&=d(\mathbb{1},\exp(Y-X))^2=\operatorname{tr}((Y-X)^2)\end{aligned}$$ $\square$

Korollar Es gilt $\operatorname{rkF}(P(m))\geq m$. Ist $p,q\in P(m)$, so gibt es eine flache, zu $\mathbb{R}^m$ isometrische Untermannigfaltigkeit $F\subseteq P(m)$ mit $p,q\in F$.

Beweis Es gibt $a \in GL(m,\mathbb{R})$ mit $apa^T = \mathbb{1}$ (nämlich $a = p^{-\frac{1}{2}}$). Jetzt wähle $b \in O(m)$ so, dass $b(aqa^T)b^T \in E$ gilt, setze nun

$F = (ba)^{-1} E (ba)^{-T}$ □

6. Def Für eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definieren wir ein glattes Vektorfeld $\tilde{X}$ auf $P(m)$ durch

$\tilde{X}_p = Xp + pX^T$. Der zugehörige Fluss $\Phi : \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ ist gegeben durch $\Phi_t(p) = \exp(tX)p\exp(tX^T)$, insbesondere ist Φ_t isometrisch. Solche glatten Vektorfelder heißen Killing-Felder.

Lemma A Sind $\tilde{X}, \tilde{Y}$ solche Killing-Felder, so gilt für die Lie-Klammer $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = -[X,Y]p - p[X,Y]^T$

Beweis Sei

$$\Phi_t(p) = \exp(tX)p\exp(tX^T)$$
$$\Psi_t(p) = \exp(tY)p\exp(tY^T)$$

Allgemein gilt $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = \frac{d}{dt} \Phi_{-\sqrt{t}} \circ \Psi_{-\sqrt{t}} \circ \Phi_{\sqrt{t}} \circ \Psi_{\sqrt{t}}(p) \Big|_{t=0}$

Für $s = \sqrt{t}$ benutze $\exp(sX) = 1 + sX + \frac{1}{2}s^2X^2 + (h.T)$

Ausmultiplizieren ergibt die Behauptung. □

Insbesondere folgt: ist $X, Y \in S(m)$, so gilt für die Killing-Felder $\tilde{X}, \tilde{Y}$, dass

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\mathbb{1}} = 0, \qquad \text{denn } [X, Y]^T = -[X, Y].$$

<u>Lemma B</u> Jedes dieser Killing-Felder ist längs einer Geodäten ein Jacobi-Feld.

<u>Beweis</u> Wir haben für $Z \in S(m)$, $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine geodätische Variation $h_s(t) = \exp(sX)\exp(tZ)\exp(sX^T)$

$$\frac{d}{ds} h_s(t)\Big|_{s=0} = X\exp(tZ) + \exp(tZ)X^T = \tilde{X}_{\exp(tZ)} \qquad \square$$

Daraus folgt mit der Jacobi-Gleichung (vgl. §3.7)

$$\nabla_{\tilde{Z}} \nabla_{\tilde{Z}} \tilde{X} + R(\tilde{X}, \tilde{Z})\tilde{Z} = 0 \qquad \begin{array}{l} Z \in S(m) \\ X \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{array}$$

7. <u>Theorem</u> Für $X, Y, Z \in S(m)$ gilt im Punkt $p = \mathbb{1}$, dass

$$R(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$$

Beweis Wir beginnen mit der Gleichung

$$\nabla_{\tilde Z}\nabla_{\tilde Z}\tilde X + R(\tilde X,\tilde Z)\tilde Z = 0 .$$ Ersetze $\tilde Z$ durch $\tilde Z+\tilde Y$

$$\Rightarrow \nabla_{\tilde Y}\nabla_{\tilde Z}\tilde X + \nabla_{\tilde Z}\nabla_{\tilde Y}\tilde X + \underline{R(\tilde X,\tilde Y)\tilde Z} + R(\tilde X,\tilde Z)\tilde Y = 0$$

$$= \nabla_{\tilde Y}\nabla_{\tilde Z}\tilde X + \nabla_{\tilde Z}\nabla_{\tilde Y}\tilde X - \underline{R(\tilde Y,\tilde X)\tilde Z} + R(\tilde X,\tilde Z)\tilde Y$$

$$= \nabla_{\tilde Y}\nabla_{\tilde Z}\tilde X + \nabla_{\tilde Z}\nabla_{\tilde Y}\tilde X + \underline{R(\tilde X,\tilde Z)\tilde Y + R(\tilde Z,\tilde Y)\tilde X} + R(\tilde X,\tilde Z)\tilde Y$$

$$= \nabla_{\tilde Y}\nabla_{\tilde Z}\tilde X + \nabla_{\tilde Z}\nabla_{\tilde Y}\tilde X + 2R(\tilde X,\tilde Z)\tilde Y + \nabla_{\tilde Z}\nabla_{\tilde Y}\tilde X - \nabla_{\tilde Y}\nabla_{\tilde Z}\tilde X - \nabla_{[\tilde Z,\tilde Y]}\tilde X$$

Im Punkt $\mathbb{1}$ ist $[\tilde Z,\tilde Y]_{\mathbb{1}} = 0$, also

$$(*) \quad \nabla_{\tilde Y}\nabla_{\tilde Z}\tilde X + R(\tilde X,\tilde Y)\tilde Z = 0 \quad \text{im Punkt } \mathbb{1}$$

Nun

$$R(\tilde X,\tilde Y)\tilde Z = -R(\tilde Y,\tilde Z)\tilde X - R(\tilde Z,\tilde X)\tilde Y \quad (\text{in } \mathbb{1}!)$$

$$\overset{(*)}{=} \nabla_{\tilde Z}\nabla_{\tilde X}\tilde Y - \nabla_{\tilde Z}\nabla_{\tilde Y}\tilde X$$

$$= \nabla_{\tilde Z}[\tilde X,\tilde Y]$$

$$= \nabla_{\underbrace{[\tilde X,\tilde Y]}_{=0}}\tilde Z - [[\tilde X,\tilde Y]\tilde Z] \qquad \square$$

Nun gilt immer $\mathrm{tr}([A,B]\,C) = \mathrm{tr}(A[B,C])$

<u>Korollar</u> Für $X, Y \in S(m)$ linear unabhängig gilt für die Schnittkrümmung der von $\{X, Y\}$ aufgespannten Ebene $H \subseteq S(m) \cong T_{\mathbb{1}} P(m)$

$$K(H) = \frac{-\operatorname{tr}([X,Y][YX])}{\operatorname{tr}(X^2)\operatorname{tr}(Y^2) - \operatorname{tr}(XY)^2} \leq 0$$

<u>Beweis</u> Im Punkt $p = \mathbb{1}$ gilt

$$-g(R(X,Y)X,Y) = \operatorname{tr}([[X,Y],X]Y) = \operatorname{tr}([X,Y][X,Y])$$
$$= -\operatorname{tr}([X,Y][Y,X]) \leq 0$$

$\square$

#

8. <u>Theorem</u> Der Riemannsche symmetrische Raum $P(m)$ ist ein vollständiger CAT(0)-Raum.

<u>Beweis</u> Im Punkt $\mathbb{1}$ ist $K \leq 0$. Da die Isometriegruppe transitiv wirkt, gilt damit überall $K \leq 0$.

Damit ist $\exp_{\mathbb{1}} = \exp$ ein Diffeomorphismus, da bijektiv, vgl § 3.9. Insbesondere ist M einfach zush.

Nach § 3.13 ist M ein CAT(0)-Raum. $\square$

9. Satz Sei $H \subseteq GL(m,\mathbb{R})$ eine kompakte Untergruppe, z.B. eine endliche Untergruppe. Dann gibt es $a \in GL(m,\mathbb{R})$ mit $aHa^{-1} \subseteq O(m)$.

Beweis Da H kompakt ist, hat H kompakte Bahnen in $P(m)$. Nach dem Bruhat-Tits Fixpunktsatz §2.8 hat H einen Fixpunkt $p \in P(m)$, d.h.

$H \subseteq p^{\frac{1}{2}} O(m) p^{-\frac{1}{2}}$ $\square$

Jetzt betrachten wir die Flachs in $P(m)$, d.h. die zu $\mathbb{R}^k$ isometrischen Teilräume. Sei $E \subseteq P(m)$ die Menge aller Diagonalmatrizen, vgl §5.5.

10. Satz Sei $F \subseteq P(m)$ ein Flach, sei $p \in F$. Dann gibt es $a \in GL(m,\mathbb{R})$ so, dass

$apa^T = \mathbb{1}$ und $aFa^T \subseteq E$.

"Jedes Flach in $P(m)$ ist in einem maximalen Flach enthalten und jedes maximale Flach ist konjugiert zu E."

Beweis Betrachte $\tilde{F} = p^{-\frac{1}{2}} F p^{-\frac{1}{2}}$. Sei $X_1, \dots, X_k \in T_{\mathbb{1}} \tilde{F} \subseteq T_{\mathbb{1}} P(m)$ eine ONB. Da $\tilde{F}$ flach ist, gilt für jede der von $\{X_i, X_j\}$, $i<j$, aufgespannten Ebenen H_{ij}, dass $K(H_{ij}) = 0$, d.h. $[X_i, X_j] = 0$ für alle $i<j$. (*)

(*) Genauer. Sei $\mathbb{R}^k \xrightarrow{\varphi} \tilde{F}$ eine Isometrie.

Für jede Geodätische $c: J \to \mathbb{R}^k$ ist dann $\varphi \circ c$ eine (metrische) Geodätische in $P(n)$, also eine Riemannsche Geodätische, vgl § 3.10. Das gilt insbesondere für die Geodätischen $c_i(t) = v + te_i \Rightarrow \varphi$ ist glatt in jedem Punkt mit maximalem Rang $\Rightarrow \varphi$ ist Riemannsche Immersion. Damit verschwindet die 2. Fundamentalform, da φ total geodätisch ist. Aus der Gauß-Gleichung folgt nun für $X, Y, Z \in T_1 \tilde{F}$, dass

$$R(X,Y)Z = 0$$ □

[Chavel II.2.1 oder besser O'Neill 4.5 p 100
und O'Neill 4.13 p. 104]

Da also $X_i X_j = X_j X_i$ für alle $i,j = 1,\dots,k$ gilt, lassen sich $X_1,\dots,X_k$ gleichzeitig diagonalisieren, d.h. es gibt $b \in O(m)$ so, dass $bX_ib^T \in \mathfrak{A}$ für $i = 1,\dots,k$.
Es folgt $b\,T_{\mathbb{1}}\tilde{F}\,b^T \subseteq \mathfrak{A}$ und damit $b\tilde{F}b^T \subseteq E$ $\square$

11. <u>Exkurs</u> Sei G eine Gruppe, die transitiv auf einer Menge X wirkt, sei $p \in X$ und sei $K \leq G$ der Stabilisator von p. Sei $L \leq G$ eine <u>Teilmenge</u>.
Dann sind äquivalent:
(i) $LK = G$, jedes $g \in G$ lässt sich schreiben als $g = l \cdot k$ mit $l \in L$, $k \in K$
(ii) zu jedem $q \in X$ gibt es $l \in L$ mit $l(p) = q$.

<u>Beweis</u> ÜA. $\square$
Wir wenden das an mit $X = P(m)$ und $K = O(m)$ Stabilisator von $\mathbb{1} \in P(m)$.

12. <u>Satz</u> (<u>Polar-Zerlegung</u>)
Es gilt $GL(m,\mathbb{R}) = P(m)\,O(m)$, jedes $g \in GL(m,\mathbb{R})$ hat <u>eindeutige</u> Darstellung
$g = p \cdot b$ $p \in P(m)$, $b \in O(m)$.

Beweis. Da $P(n) = \{ p^2 \mid p \in P(n) \}$ nach §5.4 und $p \mathbb{1} p = p^2$ folgt $GL(n,\mathbb{R}) = P(n)\, O(n)$ nach §5.11. Weiter gilt für $p \in P(n)$, $b \in O(n)$ dann $(pb)\mathbb{1}(pb)^T = p\, b\, b^T p = p^2$, mit §5.4 ist also p eindeutig durch pb bestimmt. $\square$

Zusatz!

13. Satz (Cartan-Zerlegung)

Sei $K = O(n)$, $A_+ = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \right\}$

Dann gilt

$$GL(n,\mathbb{R}) = K \cdot A_+ \cdot K$$

Beweis. Sei $p \in P(n)$ beliebig. Dann gibt es $b \in O(n)$ so, dass $b p b^T$ eine Diagonalmatrix ist mit monoton steigenden Eigenwerten $0 < \lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$.

Also ist $P(n) = \{ b A_+ b^T \mid b \in O(n) \}$

$$\subseteq K A_+ K$$

und damit $GL(n,\mathbb{R}) = K \cdot A_+ \cdot K \cdot K = K \cdot A_+ \cdot K$ $\square$

Zusatz zur Cartan-Zerlegung.

Die Abbildung $K \cdot A_+ \cdot K \to A_+$ ist wohldefiniert

$$k_1 a k_2 \longmapsto a$$

$$k_1, k_2 \in K, \ a \in A_+$$

Beweis Angenommen, $k_1 a k_2 = \tilde{k}_1 \tilde{a} \tilde{k}_2$. Es folgt

$\underbrace{k_1 a k_1^T}_{=p} K = \underbrace{\tilde{k}_1 \tilde{a} \tilde{k}_1^T}_{=q} K \Rightarrow p = q$ nach §5.12

$\Rightarrow a, \tilde{a}$ haben die gleichen Eigenwerte $\Rightarrow a = \tilde{a}$ $\square$

Wir sehen $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m} \right\}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \ \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0 \right\}$$

Dann sind U und A Untergruppen von $GL(m, \mathbb{R})$.
Da A die Untergruppe U normalisiert ($a \in A$, $u \in U \Rightarrow a u a^{-1} \in U$) ist auch $AU = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \right.$ $\left. \lambda_1, \dots, \lambda_m \right\}$ eine Untergruppe von $GL(m, \mathbb{R})$

14. __Satz__ (__Iwasawa-Zerlegung__) Mit $K = O(m)$ gilt $GL(m, \mathbb{R}) = K \cdot A \cdot U$ und genauer: jedes $g \in GL(m, \mathbb{R})$ läßt sich auf genau eine Art als Produkt

$$g = k \cdot a \cdot u$$ schreiben, $k \in K$, $a \in A$, $u \in U$.

__Beweis__ Sei $f_i = g(e_i) \Rightarrow f_1, \dots, f_m$ Basis von $\mathbb{R}^m$.
Es gibt nun Koeffizienten x_{ij} so, dass die Vektoren
$\tilde{f}_1 = f_1$ $\quad \tilde{f}_2 = f_2 + x_{12} f_1$, $\quad \tilde{f}_3 = f_3 + x_{13} f_1 + x_{23} f_2 \dots$
paarweise senkrecht aufeinander stehen

$$\Rightarrow \tilde{f}_i = g v e_i, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Setze $\alpha_i = \|\tilde{f}_i\|$, $\quad a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow g v a^{-1} = k \in O(m)$$

$$g = k a v^{-1} \in KAU.$$

Angenommen, $\hat{k}\hat{a}\hat{u} = kau$ $\quad k, \hat{k} \in O(m)$

$a, \hat{a} \in A$

$u, \hat{u} \in U$

$\Rightarrow k^{-1}\hat{k} = a u \hat{u}^{-1} \hat{a}^{-1} \in O(m) \cap AU = \{1\!\!1\}$

$\Rightarrow k = \hat{k}$ und $a u = \hat{a}\hat{u} \Rightarrow a^{-1}\hat{a} = u \hat{u}^{-1} \in A \cap U = \{1\!\!1\}$

$\Rightarrow a = \hat{a}$ und $u = \hat{u}$ $\square$

<u>Korollar</u> Die Gruppe AU wirkt scharf transitiv auf $P(m)$; zu jedem $p \in P(m)$ gibt es <u>genau ein</u> $w \in AU$ mit $w w^T = p$.

<u>Beweis</u> Es gilt $GL(m, \mathbb{R}) = KAU \underset{\text{invert.}}{=} UAK \underset{AU=UA}{=} AUK$. Insbesondere ist also AU transitiv auf $P(m)$ nach §5,11. Da $K \cap (AU) = 1\!\!1$ gibt es zu jedem $p \in P(m)$ <u>genau ein</u> $w \in AU$ mit $p = w 1\!\!1 w^T = w w^T$ $\square$

\#

Wir betrachten jetzt eine Aufspaltung von $P(m)$. Ist $p \in P(m)$ und ist $\lambda > 0$, so ist $\lambda \cdot p \in P(m)$. Zwei Vektoren u, v sind orthogonal bzgl. p (d.h. $u^T p v = 0$) genau dann, wenn sie orthogonal bezüglich λp sind. Wir können p "normieren" durch die Bedingung $\det(p) = 1$

15. Satz Sei $P(m)_1 = \{p \in P(m) \mid \det(p) = 1\}$

$S(m)_0 = \{X \in S(m) \mid tr(X) = 0\}$

Dann gilt: die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times P(m)_1 \longrightarrow P(m)$$
$$(s, p) \longmapsto e^{s/\sqrt{m}} \cdot p$$

ist eine Isometrie. Folglich ist $P(m)_1 \subseteq P(m)$ vollständig, konvex und CAT(0). Die Einschränkung $\exp : S(m)_0 \to P(m)_1$ ist ein Diffeomorphismus.

Die Gruppe $SL(m, \mathbb{R}) = \{g \in GL(m, \mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ wirkt transitiv auf $P(m)_1$.

Beweis Allgemein gilt $\det(\exp(A)) = e^{tr(A)}$ (Beweis über JNF über $\mathbb{C}$). Damit erhalten wir die Bijektion $\exp : S(m)_0 \to P(m)_1$. Ist $p \in P(m)$ mit $p^2 \in P(m)_1$, so ist $\det(p) = 1$ (weil $\det(p) > 0$). Insbesondere ist also $SL(m, \mathbb{R})$ transitiv auf $P(m)_1$, denn $p^{\frac{1}{2}} \mathbb{1} p^{\frac{1}{2}} = p$, und $\det(g p g^T) = \det(g)^2 \cdot \det(p)$.

Die Inverse von Φ ist die Abbildung

$$q \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \log(\det(q)), \det(q)^{1/m} q \right)$$

Sei $p, q \in P(m)_1$, $s, t \in \mathbb{R}$, $\exp(Z) = p^{-\frac{1}{2}} q p^{\frac{1}{2}}$
($\Rightarrow tr Z = 0$!)

Es gilt $d(e^{s/\sqrt{m}}p, e^{t/\sqrt{m}}q)^2 = d(e^{s/\sqrt{m}}\mathbb{1}, p^{-\frac{1}{2}}e^{t/\sqrt{m}}q p^{-\frac{1}{2}})^2$ (2.7)

$= d(\mathbb{1}, e^{-s/2\sqrt{m}} p^{-\frac{1}{2}} e^{t/\sqrt{m}} p^{-\frac{1}{2}} e^{-s/2\sqrt{m}})^2$

$= d(\mathbb{1}, e^{\frac{t-s}{\sqrt{m}}} p^{-\frac{1}{2}} q p^{-\frac{1}{2}})^2 = d(\mathbb{1}, e^{\frac{t-s}{\sqrt{m}}} \exp(Z))^2$

$= d(\mathbb{1}, \exp(\frac{t-s}{\sqrt{m}}\mathbb{1} + Z))^2 = \operatorname{tr}((\frac{t-s}{\sqrt{m}}\mathbb{1} + Z)^2)$

$\underset{\operatorname{tr} Z = 0}{=} \operatorname{tr}((\frac{t-s}{\sqrt{m}})^2\mathbb{1}) + \operatorname{tr}(Z^2) = (t-s)^2 + d(p,q)^2$ $\square$

<u>Bemerkung</u> 1 ist ein regulärer Wert von $\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Folglich ist $P(m)_1 \subseteq P(m)$ eine abgeschlossene eingebettete Hyperfläche und total geodätisch. Damit spaltet $P(m)$ auch als Riemannsche Mannigfaltigkeit als

$$P(m) \cong \mathbb{R} \times P(m)_1 .$$

16. Die vorher gezeigten Zerlegungssätze übertragen sich auf die Gruppe $SL(n,\mathbb{R})$. Genauer: sei

$K = SO(n)$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \,,\ \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 1 \right\}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in SL(n,\mathbb{R}) \right\}$$

$$A_+ = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0 \,,\ \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 1 \right\}$$

Dann gilt

$SL(n,\mathbb{R}) = P(n)_1 \cdot SO(n)$

jedes $g \in SL(n,\mathbb{R})$ hat eindeutige Zerlegung

$g = p \cdot k \qquad p \in P(n)_1,\ k \in SO(n)$

$SL(n,\mathbb{R}) = K A_+ K$, der A_+-Anteil ist dabei eindeutig

$SL(n,\mathbb{R}) = KAU$, eindeutige Zerlegung.

$\to$ ÜA

Wir berechnen nun einige Stabilisatoren.

Erinnerung: wenn eine Gruppe G transitiv auf einer Menge X operiert und wenn $H \subseteq G$ der Stabilisator von $x \in X$ ist, so ist aHa^{-1} der Stabilisator von $y = ax$.

17. <u>Lemma A</u> Der Stabilisator von $\mathbb{1} \in P(n)$ in $GL(n,\mathbb{R})$ (bzw in $SL(n,\mathbb{R})$) ist $O(n)$ (bzw $SO(n)$). Der Kern der Wirkung von $GL(n,\mathbb{R})$ auf $P(n)$ ist $\{\pm \mathbb{1}\}$, der Kern der Wirkung von $SL(n,\mathbb{R})$ auf $P(n)_1$ ist $\{\pm \mathbb{1}\}$ wenn n gerade, $\{\mathbb{1}\}$ wenn n ungerade.

<u>Beweis</u> $a \mathbb{1} a^T = \mathbb{1} \Leftrightarrow a \in O(n)$, damit folgt die erste Behauptung. Wenn a trivial auf $P(n)$ wirkt, so ist $a \in O(n)$ und $ap = pa$ für alle $p \in P(n)$ (bzw $p \in P(n)_1$) $\Rightarrow$ a läßt alle Eigenräume aller positiv definit symmetrischen Matrizen invariant $\Rightarrow a = \pm \mathbb{1}$ $\square$

Es sei L die Gruppe aller Matrizen in $O(n)$, die die Menge $\{\mathbb{R}e_1, \dots, \mathbb{R}e_n\}$ permutieren. Das sind die Matrizen, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag ± 1 haben, alle anderen Einträge sind 0.

<u>Lemma B</u> Die Gruppe aller $g \in GL(n,\mathbb{R})$, die $\mathbb{1}$ festlassen und $E = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in P(n) \right\}$ festlassen, ist L.

<u>Beweis</u> Wenn $g \mathbb{1} g^T = \mathbb{1}$, so $g \in O(n)$. Wenn g zusätzlich E invariant läßt, so permutiert g die Eigenräume $\mathbb{R}e_1, \dots, \mathbb{R}e_n$ $\Rightarrow$ $g \in L$. Die Umkehrung ist klar. □

<u>Lemma C</u> Die Gruppe aller $g \in GL(n,\mathbb{R})$, die E invariant lassen, ist $L \cdot A$,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \right\}$$

<u>Beweis</u> Die Gruppe $L \cdot A$ läßt E invariant und A wirkt transitiv auf E. Die Behauptung folgt nun aus Lemma B und Beobachtung §5.11. □

Entsprechende Aussagen erhält man für die Wirkung von $SL(n,\mathbb{R})$ auf $\mathbb{P}(n)_1$, wenn man die angegebenen Gruppen mit $SL(n,\mathbb{R})$ schneidet.

18. Def Wir nennen $X \in S(m)$ regulär, wenn X m verschiedene Eigenwerte hat, und sonst singulär.

Satz Sei $X \in S(m)$, sei $p = \exp(X)$.
Wenn X regulär ist, gibt es genau ein m-Flach, das $\mathbb{1}$ und p enthält.
Wenn X singulär ist, gibt es mehr m-Flachs, die $\mathbb{1}$ und p enthalten.

Beweis Wir können OE annehmen, dass $X = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m\end{pmatrix}$
$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_m$. Sei F ein m-Flach, dass $\mathbb{1}$ und $p = \exp(X)$ enthält. Ist $Y \in T_{\mathbb{1}} F$, so gilt $[X,Y] = 0$, vgl. § 5.10, § 5.7.
Wenn X regulär ist, so folgt, dass Y die Eigenräume $\mathbb{R}e_1, \dots, \mathbb{R}e_m$ von X invariant lässt $\Rightarrow Y = \begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{pmatrix}$
$\Rightarrow F$ besteht genau aus den Diagonalmatrizen in $P(m)$.
Wenn X singulär ist, etwa $\lambda_i = \lambda_{i+1}$, so liegt $p, \mathbb{1}$ sowohl im Flach der Diagonalmatrizen in $P(m)$ als auch im Flach mit Tupeln

$$\begin{pmatrix} t_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & t_{i-1} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} t_i & t_{i+1}\\ t_{i+1} & t_i\end{matrix}} & & \\ & & & & t_{i+2} & \\ 0 & & & & & \ddots \; t_m\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} t_i & t_{i+1}\\ t_{i+1} & t_i\end{matrix}}$$

□

#

Lemma Let X be an simplicial affine building, with ~~the~~ maximal apartment system $\mathcal{A}_{max}$. Let $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{max}$ be an apartment system. Then $\partial_{\mathcal{A}} X = \bigcup \{\partial A \mid A \in \mathcal{A}\}$ is dense in ∂X w.r.t. the cone topology.

Pf We fix a vertex $o \in X$. Let $\xi : [0,\infty) \to X$ be a geodesic ray with $\xi(0) = o$. For every $t \in [0,\infty)$, there exist an apartment $A_t \in \mathcal{A}$ containing ~~all~~ $\xi(s)$, for $0 \le s \le t$. Let ξ_t be the unique extension of ξ to A_t. Then ξ is a cluster point of $\{\xi_t \mid t \in [0,\infty)\}$.

Prop Let X be a locally finite simplicial building, let $\mathcal{A}$ be an apartment system and let G be a lcp group that acts faithfully via special automorphisms on X and continuously. If the action on X is strongly transitive with respect to $\mathcal{A}$, then $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{max}$.

Pf $\mathcal{A}$ is a good apartment system and hence $\partial_{\mathcal{A}} X \subseteq \partial X$ is a spherical subbuilding. Let c be a chamber at infinity, let o be a special vertex and put $G_o = K$, $G_c = B$. Then $G = K \cdot B$ (Iwasawa decomposition) and K is compact, and in particular $K(c) \subseteq \mathcal{A} = \mathcal{A}_{max}$.

19. Bemerkung (a) Der symmetrische Raum $P(2)_1$ ist isometrisch zu H^2 (ÜA). Für $m \geq 3$ ist $P(m)_1$ kein hyperbolischer Raum, da es $(m-1)$-Flachs gibt.

20. Die Weylgruppe von $SL(m,\mathbb{R})$

Es sei $K = SO(m)$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0, \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_m = 1 \right\}$. Weiter sei $L \subseteq SO(m)$ die Gruppe aller Matrizen mit genau einem Eintrag aus $\{\pm 1\}$ in jeder Zeile und Spalte, sonst 0, mit Determinante 1.
Die Gruppe wirkt auf der Menge $\{\mathbb{R}e_1, \dots, \mathbb{R}e_m\}$ als symmetrische Gruppe $Sym(m)$, d.h. wir haben einen Epimorphismus $L \to Sym(m)$, dessen Kern M genau die Diagonalmatrizen in L sind, $L/M \cong Sym(m)$.
Sei $E \subseteq P(m)_1$ die Menge aller Diagonalmatrizen, $E \cong \mathbb{R}^{m-1}$ (als Menge ist $E = A$). Ähnlich wie in §5.17 zeigt man:

$$L \cdot A = \{ g \in SL(m,\mathbb{R}) \mid g E g^T = E \}.$$

Der $L \cdot A$-Stabilisator von $\mathbb{1} \in P(m)_1$ ist L, der Kern der Wirkung von L auf E ist genau M, d.h. $W = L/M \cong Sym(m)$ wirkt auf $E \cong \mathbb{R}^{m-1}$

Man nennt W die <u>Weylgruppe</u> von $SL(m,\mathbb{R})$. Wie sieht die Wirkung von W auf E aus? Wir haben eine K-äquivariante Isometrie $\exp: S(m)_0 \to P(m)_1$. Betrachte die Menge

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0 \right\} \subseteq S(m)_0$$

der Diagonalmatrizen in $S(m)_0$. Dann ist

$$\exp: \mathfrak{a} \to E$$

eine L-äquivariante Isometrie.

Auf $\mathfrak{a}$ wirkt die Gruppe L durch Permutation der m Koordinaten als symmetrische Gruppe.

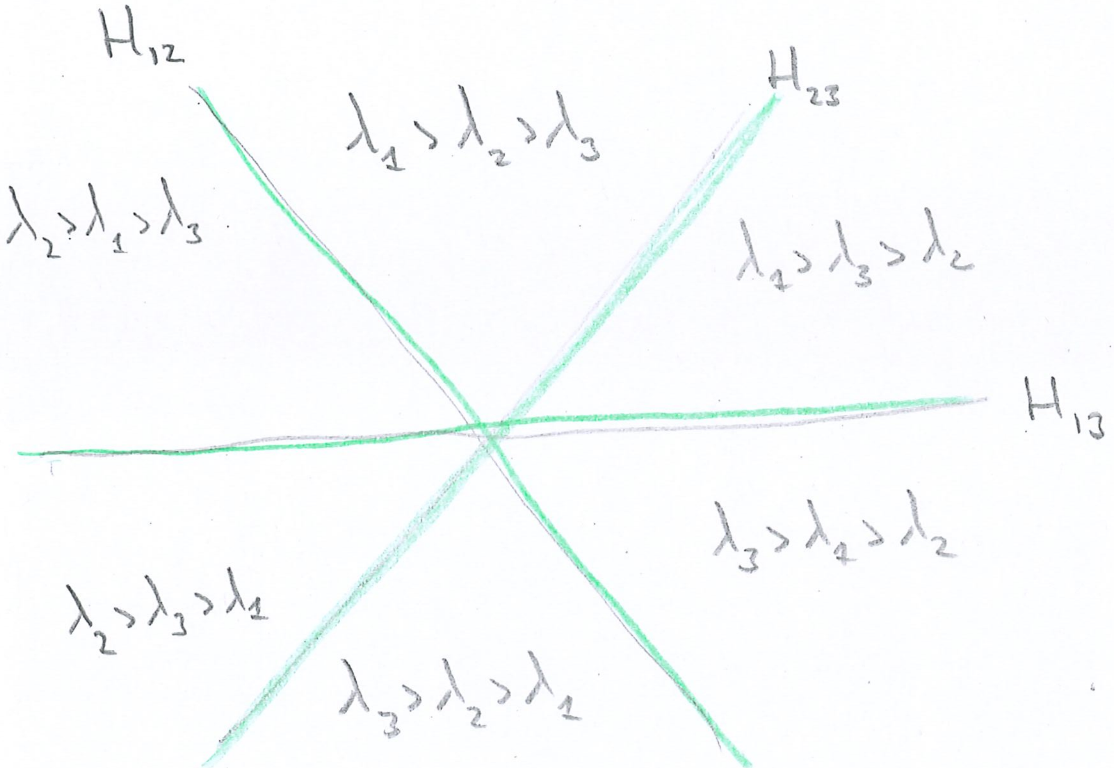
Die regulären Elemente $X \in \mathfrak{a}$ haben damit triviale L/M-Stabilisatoren. Die singulären Elemente $X \in \mathfrak{a}$ haben nicht-triviale L/M-Stabilisatoren (vertausche Koordinaten mit gleichem Eintrag).

<u>Erinnerung an Algebra</u>: Die Gruppe $\mathrm{Sym}(m)$ wird von den <u>Transpositionen</u> erzeugt (Permutationen, die genau zwei Elemente vertauschen). Sei t_{ij} die Transposition, die die i-te und j-te Koordinate in $\mathfrak{a}$ vertauscht, sei

$$H_{ij} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \lambda_i = \lambda_j \right\} \qquad i \neq j$$

Dann wirkt t_{ij} als Spiegelung an der Hyperebene $H_{ij} \subseteq \mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Diese Spiegelungen erzeugen die Weylgruppe W.

Ein Bild von $S(3)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \right\}$



grün = singuläre Elemente in $\mathfrak{a}$

$W \cong \mathrm{Sym}(3)$

Wir betrachten jetzt die parabolischen und die halbeinfachen Elemente in $GL(m,\mathbb{R})$ und $SL(m,\mathbb{R})$. Das erfordert etwas lineare Algebra.

21. <u>Lemma</u> (<u>Additive Jordan-Chevalley Zerlegung</u>)

Sei $a \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$, dann gibt es $s, n \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$ mit:

(i) $a = s + n$, s diagonalisierbar, n nilpotent

(ii) $sn = ns$

Die Bedingungen (i) und (ii) bestimmen s und n <u>eindeutig</u>.

<u>Beweis</u> <u>Existenz</u> über JNF (→ L.A. II)

$$gag^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix} \qquad a_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} \text{ Jordan-Kasten}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Eindeutigkeit</u> Angenommen, $a = \tilde{s} + \tilde{n}$ mit (i), (ii).

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von a, seien $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ die verschiedenen Eigenwerte von $\tilde{s}$, mit Eigenräumen $E_1, \dots, E_\ell \subseteq \mathbb{C}^m$. Da $\tilde{n}, a$ und $\tilde{s}$ vertauschen, gilt $a(E_j) \subseteq E_j$ und $(a - \mu_j \mathbb{1})|_{E_j}$ ist nilpotent

$n(E_j) \subseteq E_j$

$\Rightarrow \mu_j$ ist Eigenwert von a, $\mu_j = \lambda_{\tilde{j}}$ für ein $\tilde{j}$.

Weiter folgt, dass $E_j \subseteq V_i = \underbrace{\ker(a-\lambda_i \mathbb{1})^t}_{\text{Verallgemeinerter Eigenraum}}$ $t \gg 0$

Da $\mathbb{C}^m = E_1 \oplus \dots \oplus E_l = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ folgt $l = k$,

OE $\lambda_j = \mu_j$, $E_j = V_j$ $j = 1, \dots, l$, $\tilde{s}|_{V_j} = \lambda_j \mathbb{1}|_{V_j}$

$\Rightarrow$ $\tilde{s}$ ist eindeutig $\Rightarrow$ $\tilde{n}$ auch eindeutig $\square$

<u>Korollar A</u> (<u>Multiplikative Jordan-Chevalley Zerlegung</u>)

Sei $a \in GL(m, \mathbb{C})$. Dann gibt es $s, v \in GL(\mathbb{C}^m)$ mit

(*) $\begin{cases} s \text{ diagonalisierbar, } v \text{ unipotent } (\Leftrightarrow v - \mathbb{1} \text{ nilpotent}) \\ a = s \circ v = v \circ s \end{cases}$

und (*) charakterisiert s und v eindeutig.

<u>Beweis</u> $a = s + n$, $\det(a) = \det(s) \neq 0$

$a = s\underbrace{(\mathbb{1} + s^{-1}n)}_{=v} = v \circ s$ $\Rightarrow$ Existenz.

$a = \tilde{s} \circ \tilde{v} = \tilde{v} \circ \tilde{s}$ mit (*)

$\Rightarrow a = \tilde{s} + \underbrace{\tilde{s}(\tilde{v} - \mathbb{1})}_{\text{nilpotent}}$ $\Rightarrow \begin{cases} s = \tilde{s} \\ \tilde{v} - \mathbb{1} = v - \mathbb{1} \end{cases}$ nach Lemma $\square$

#

Korollar B (Verfeinerte multiplikative Jordan-Chevalley Zerlegung)

Sei $a \in GL(n,\mathbb{C})$. Dann gibt es eindeutige Elemente $e, h, v \in GL(n,\mathbb{C})$ so, dass gilt:

(i) $a = e\cdot h\cdot v$, e, h, v vertauschen paarweise

(ii) v ist unipotent, e, h sind diagonalisierbar, h hat positive reelle Eigenwerte, e hat Eigenwerte vom Betrag 1.

Beweis: Jede komplexe Zahl $\lambda \neq 0$ hat eindeutige Zerlegung
$\lambda = u\cdot|\lambda|$, $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| = 1$.

Behauptung: Sei $s \in GL(n,\mathbb{C})$ diagonalisierbar. Dann gibt es eindeutige diagonalisierbare $e, h \in GL(n,\mathbb{C})$ mit $s = e\cdot h = h\cdot e$, alle Eigenwerte von h reell und positiv, alle Eigenwerte von e haben Betrag 1.

Denn: Existenz ist klar nach Bemerkung oben.

Eindeutigkeit: $s = e\cdot h = h\cdot e \Rightarrow e, h, s$ gleichzeitig diagonalisierbar.
Ist E ein Eigenraum von s zum Eigenwert λ, so gilt
$s|_E = \lambda\cdot\mathbb{1} = e|_E\cdot h|_E \Rightarrow h|_E = |\lambda|\cdot\mathbb{1}$ h eindeutig. $\square$

Also können wir in der Zerlegung $s\cdot v = a$ aus Korollar A s eindeutig abspalten als $s = e\cdot h = h\cdot e \Rightarrow a = e\cdot h\cdot v$.
Weiter gilt $s = v\cdot e\cdot h\cdot v^{-1} = vev^{-1}\cdot vhv^{-1}$, aus der Eindeutigkeit folgt $vev^{-1} = e$, $vhv^{-1} = h \Rightarrow e, h, v$ vertauschen paarweise.

Mit Korollar A und der Beh. oben folgt die Eindeutigkeit von e, h, v, denn: $e\cdot h\cdot v = \tilde{e}\cdot h\cdot\tilde{v} \Rightarrow$
$e\cdot h$ und $\tilde{e}\cdot\tilde{h}$ diagonalisierbar, $\underset{\uparrow \text{ Kor. A}}{\text{also}}$ $s = e\cdot h = \tilde{e}\cdot\tilde{h} \underset{\uparrow \text{ Beh. oben}}{\Rightarrow} e = \tilde{e}$

$\square$

Korollar C (Reelle verfeinerte multiplikative Jordan-Chevalley Zerlegung)

Sei $a \in GL(m,\mathbb{R})$. Dann gibt es eindeutig $e, h, v \in GL(m,\mathbb{R})$ mit

(i) $a = e \cdot h \cdot v$, e, h, v vertauschen paarweise

(ii) v ist unipotent, h ist reell diagonalisierbar mit positiven Eigenwerten, e ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar und alle Eigenwerte haben Betrag 1

<u>Beweis</u> Eintragsweises komplex Konjugieren ist ein Automorphismus des Matrizenrings $\mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$. Dabei werden die Koeffizienten der Minimalpolynome komplex konjugiert.

Wir fassen a als Element von $GL(m,\mathbb{C})$ auf

$\Rightarrow a = e \cdot h \cdot v = \bar{a} = \bar{e} \cdot \bar{h} \cdot \bar{v}$

v unipotent $\Rightarrow \bar{v}$ unipotent

e, h diagbar $\Rightarrow \bar{e}, \bar{h}$ diag.bar ($\rightarrow$ Minimalpolynom!)

λ Eigenwert von $e \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ Eigenwert von $\bar{e}$

λ Eigenwert von $h \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ Eigenwert von $\bar{h}$

Es folgt $e = \bar{e}$, $h = \bar{h}$, $v = \bar{v}$ aus Korollar B, d.h. $e, h, v \in GL(m,\mathbb{R})$. Das Minimalpolynom von h zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren $\Rightarrow h$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. $\square$

<u>Bemerkung</u> Ist $a \in SL(m,\mathbb{R})$ so folgt wegen

$\det(v) = 1$ $\left((v - \mathbb{1})^k = 0 \Rightarrow \text{char. Polynom ist } (X-1)^m \Rightarrow \det(v) = 1 \right)$

$\det(h) > 0 \Rightarrow \det(e) > 0 \Rightarrow \det(e) = 1 \Rightarrow \det(h) = 1$

also $e, h, v \in SL(m,\mathbb{R})$.

weil $|\det(e)| = 1$

<u>Achtung!</u> Die verstimmte Jordan-Chevalley Zerlegung ist <u>nicht</u> die Iwasawa-Zerlegung, in der Iwasawa-Zerlegung vertauschen die Komponenten nicht unbedingt.

22. **Def** Eine Matrix $a \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$ heißt unitär, wenn gilt $\bar{a}^T \cdot a = \mathbb{1}$. Dann ist $a^{-1} = \bar{a}^T \rightsquigarrow a \in GL(m, \mathbb{C})$.
Ist $a \in SO(m) \subseteq \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$, so ist a unitär.

Lemma Sei $a \in GL(m, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent
(i) a ist konjugiert zu einer unitären Matrix
(ii) a ist diagonalisierbar und alle Eigenwerte haben Betrag 1.

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i): $g a g^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_m \end{pmatrix}$ $|z_j|^2 = 1 = z_j \bar{z}_j$

$\Rightarrow g a g^{-1}$ unitär. ($\checkmark$)
(i) $\Rightarrow$ (ii): Setze für $u, v \in \mathbb{C}^m$ $\langle u | v \rangle = \bar{u}^T v$. Ist
a unitär, so folgt $\langle au | av \rangle = \langle u | v \rangle$.
Sei v_1 ein Eigenvektor von a, $\langle v_1 | v_1 \rangle = 1$
$\Rightarrow v_1^\perp$ ist a-invariant, wähle Eigenvektor $v_2 \in v_1^\perp$ usw
$v_3 \in v_1^\perp \cap v_2^\perp \rightsquigarrow$ Basis $v_1, \dots, v_m$ aus Eigenvektoren
$\|v_j\| = 1 \quad j = 1, \dots, m \qquad \langle a v_j | a v_j \rangle = \lambda_j \bar{\lambda}_j \langle v_j, v_j \rangle = 1$
$\Rightarrow \lambda_j \bar{\lambda}_j = 1$ für alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ $\square$

Jetzt klassifizieren wir die Elemente von $SL(m, \mathbb{R})$ in ihrer Wirkung auf $D(m)_1$.

23. <u>Lemma A</u> Sei $g \in SL(m,\mathbb{R})$. Dann sind äquivalent: (i) g wirkt elliptisch auf $P(m)_1$
(ii) g ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, alle Eigenwerte haben Betrag 1

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): g elliptisch $\Rightarrow$ g konjugiert zu ein Element aus $SO(m)$. Nach § 5.22 gilt dann (ii).
(ii) $\Rightarrow$ (i): g diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, alle Eigenwerte haben Betrag 1 $\Rightarrow$ es gibt $a \in GL(m,\mathbb{C})$, $aga^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_m \end{pmatrix}$
$|z_1| = \dots = |z_m| = 1$ $\Rightarrow$ $\overline{\langle aga^{-1} \rangle}$ ist kompakt
$\Rightarrow$ $\overline{\langle g \rangle} \subseteq SL(m,\mathbb{R})$ ist kompakt $\overset{§ 5.1}{\Rightarrow}$ g elliptisch $\square$

<u>Lemma B</u> Ist $p \in P(m)_1$, $p \neq \mathbb{1}$, so ist die Wirkung $q \longmapsto pqp$ hyperbolisch.

<u>Beweis</u> Schreibe $p = \exp(X)$, $X \in S(m)_0$, $X \neq 0$.
Es folgt $p \exp(tX) p = \exp(X)\exp(tX)\exp(X) = \exp((2+t)X)$
$\Rightarrow$ p wirkt hyperbolisch auf $A = \{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$\Rightarrow$ p hyperbolisch, vgl. § 4.5. $\square$

<u>Theorem</u> Sei $g \in SL(m, \mathbb{R})$ mit verfeinerter Jordan-Chevalley Zerlegung $g = e \cdot h \cdot v$ wie in § 5.21.

Dann gilt: (i) g wirkt parabolisch auf $P(m)_1 \Leftrightarrow v \neq \mathbb{1}$

(ii) g wirkt elliptisch auf $P(m)_1 \Leftrightarrow h = v = \mathbb{1}$

(iii) g wirkt hyperbolisch auf $P(m)_1 \Leftrightarrow v = \mathbb{1},\ h \neq \mathbb{1}$

<u>Beweis</u> (ii) folgt aus Lemma A. $\square$

(iii): Angenommen, g wirkt hyperbolisch, mit Achse A.

OE $\mathbb{1} \in A$, d.h. $A = \{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ für ein $X \in S(m)_0$, $X \neq 1$. Also $g \exp(tX) g^T = \exp((t+s)X)$, $s \neq 0$

$\Rightarrow g \cdot g^T = \exp(sX)$. Setze $h = \exp(\frac{s}{2}X)$

$\Rightarrow h \exp(tX) h = \exp((t+s)X)$, $h^{-1} g = e \in SO(m)$

Weiter $g \exp(tX) g^T = \exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX) = \exp(tX) g g^T$

$\Rightarrow g \exp(tX) = \exp(tX) g \Rightarrow hg = gh \Rightarrow h \cdot e = e \cdot h$

h reell diagonalisierbar, Eigenwerte > 0, e orthogonal

$\Rightarrow e$ komplex diagonalisierbar, alle Eigenwerte haben Betrag 1

$g = e \cdot h$ ist verfeinerte Jordan-Chevalley Zerlegung.

Das bleibt auch für Konjugierte von g richtig.

Angenommen, $g = e \cdot h$ ist verf. JCZ, $h \neq \mathbb{1}$. Dann ist e elliptisch und h ist hyperbolisch, denn:

e ist elliptisch nach Lemma A.

$h = a p a^{-1}$ für ein $a \in GL(m, \mathbb{R})$, $p \in P(m)_1$

$\Rightarrow h$ hyperbolisch nach Lemma B

Nun wirkt $h \cdot e$ hyperbolisch auf μ_e

$\Rightarrow$ $h \cdot e$ wirkt hyperbolisch nach §4.5 $\square$

Damit folgt auch (i). $\square$

#

24. __Def__ (__Simplizialkomplexe__)

Sei V eine Menge, sei $\Delta \subseteq \mathcal{P}(V)$ eine Menge von __endlichen__ Teilmengen von Δ, mit

(i) $\bigcup \Delta = V$ (jedes $v \in V$ ist in einem $a \in \Delta$)

(ii) $a \subseteq b \in \Delta \Rightarrow a \in \Delta$ (Δ abgeschlossen unter Abstieg)

Dann heißt Δ __Simplizialkomplex__. Die Elemente von Δ heißen __Simplizes__, die Elemente von V heißen __Ecken__.

Wir nennen $a \in \Delta$ einen __k-Simplex__, wenn a $(k+1)$ Elemente hat. (Wir identifizieren Ecken und 0-Simplizes.)

Beachte: es gibt __genau ein__ (-1)-Simplex, $\emptyset \in \Delta$.

Eine Abbildung $\Phi : \Delta_1 \to \Delta_2$ zwischen Simplizialkomplexen heißt __regulärer Morphismus__, wenn Φ k-Simplizes auf k-Simplizes abbildet, für alle $k \geq -1$, und wenn gilt $a \subseteq b \Rightarrow \Phi(a) \subseteq \Phi(b)$.

__Beispiele__ (a) V endliche Menge, $\Delta = \mathcal{P}(V)$, $k+1 = \# V \Rightarrow \Delta$ k-Simplex.

(b) X eine Menge, V eine Menge von Teilmengen von X,

$$\Delta = \{ a \mid a \subseteq V \text{ endlich}, \ \cap a \neq \emptyset \}$$

Δ heißt der Nerv von V.

(b_1) X top. Raum, V offene Überdeckung von X

Δ Nerv der Überdeckung ($\to$ Čech-Kohomologie)

(b_2) X Gruppe, $H_1, \ldots, H_m \subseteq X$ Untergruppen

$V = G/H_1 \cup \ldots \cup G/H_m$ Nerv der Untergruppen

—

Eine Teilmenge $\Delta_1 \subseteq \Delta$ heißt Teilkomplex, wenn gilt:
$a \subseteq b \in \Delta_1 \Rightarrow a \in \Delta_1$. Dann ist $\Delta_1 \xhookrightarrow{\subseteq} \Delta$ ein regulärer Morphismus.

25. Die Geometrische Realisierung Sei Δ Simplizialkomplex mit Eckenmenge V, sei $\mathbb{R}^{(V)}$ der reelle Vektorraum mit Basis V, Vektoren sind formale Linearkombinationen von (endliche) Elementen aus V.

Ist $a = \{v_0, \ldots, v_k\} \in \Delta$ ein k-Simplex, setze

$$|a| = \{ s_0 v_0 + \ldots + s_k v_k \mid s_0, \ldots, s_k \in [0,1], \ s_0 + \ldots + s_k = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{(V)}$$

Geometrische Realisierung von a

sowie $|\Delta| = \bigcup \{ |a| \mid a \in \Delta \} \subseteq \mathbb{R}^{(V)}$.

Geometrische Realisierung von Δ

Ist $\Phi: \Delta_1 \to \Delta_2$ ein regulärer Morphismus, so induziert Φ eine Abbildung $\Phi: |\Delta_1| \to |\Delta_2|$ (durch lineare Fortsetzung).

—

Für jeden k-Simplex $a \in \Delta$ trägt $|a|$ eine natürliche kompakte Topologie, $|a| \cong \{(s_0, \dots, s_k) \in [0,1]^k \mid s_0 + \dots + s_k = 1\}$.
Ist $a \subseteq b$, so ist dann $|a| \subseteq |b|$ eine Einbettung.
Die <u>schwache Topologie</u> auf $|\Delta|$ ist definiert wie folgt: $A \subseteq |\Delta|$ ist abgeschlossen $\overset{\text{DEF}}{\iff}$ $A \cap |a|$ abg. in $|a|$ für jedes $a \in \Delta$.
Ist X ein top. Raum, so ist $f: |\Delta| \to X$ stetig genau dann, wenn f auf jedem $|a|$, für $a \in \Delta$, stetig ist.
Insbesondere ist $|\Delta| \to \mathbb{R}^{(V)}$ stetig bzgl der $\|\cdot\|_2$-Norm
$\Rightarrow$ $|\Delta|$ ist vollständig regulär (sogar normal).

—

Wir nennen Δ <u>lokal endlich</u>, wenn jede Ecke v nur in endlich viele Simplizes liegt.
Äquivalent: Für jedes $p \in |\Delta|$ gibt es nur endlich viele $a \in \Delta$ mit $p \in |a|$.

—

Für $a \in \Delta$ sei $|a|_0 = |a| - \bigcup\{|b| \mid b \subseteq a, b \neq a\}$
Es gilt $|\Delta| = \dot{\bigcup}\{|a|_0 \mid a \in \Delta\}$.
<u>Beobachtung</u>: Ist $A \subseteq |\Delta|$ eine beliebige Teilmenge, so wähle $p_a \in A \cap |a|_0$ wann immer $A \cap |a|_0 \neq \emptyset$.
Dann ist die Menge A' all dieser p_a abg + diskret.

Denn Ist $A'' \subseteq A'$ und $b \in \Delta$, so ist $|b| \cap A''$ endlich $\Rightarrow A''$ abg $\Rightarrow A'$ abg + diskret.

Lemma Ist $K \subseteq |\Delta|$ kompakt, so gibt es ein endliche Menge $S \subseteq \Delta$ mit $K \subseteq \bigcup \{|a| \mid a \in S\}$.

Beweis $K \in \{|a|_0 \mid |a|_0 \cap K \neq \emptyset\}$. $\square$

Satz Sei Δ ein Simplizialkomplex. Dann sind äquivalent:

(i) Δ ist lokal endlich

(ii) $|\Delta|$ ist lokal kompakt

(iii) $|\Delta| \hookrightarrow (\mathbb{R}^{(V)}, \|.\|_2)$ ist Einbettung

(iv) $|\Delta|$ ist metrisierbar

(v) $|\Delta|$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $p \in |\Delta|$, sei $S = \{a \in \Delta \mid p \in |a|\}$. Dann ist $K = \bigcup \{|a| \mid a \in S\}$ kompakt. Bezüglich $\|.\|_2$ ist K ein Umgebung von $p \Rightarrow K$ ist Umgebung von p in $|\Delta|$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $U \subseteq |\Delta|$ offen mit kompaktem Abschluss. Sei $\Delta_0 \subseteq \Delta$ endlicher Teilkomplex mit $\overline{U} \subseteq |\Delta_0|$, sei $\Delta_1 = \{a \in \Delta \mid |a| \cap U = \emptyset\}$. Ist $a \in \Delta - \Delta_1$, so ist $|a|_0 \cap U \neq \emptyset \Rightarrow |a \in \Delta_0$

$\Rightarrow \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_0$. In der $\|.\|_2$-Norm ist $|\Delta_1|$ abg. in $|\Delta|$ $\Rightarrow |\Delta| - |\Delta_1|$ ist offen in $|\Delta|$ in der $\|.\|_2$-Norm.

Weiter ist Δ_0 endlich $\Rightarrow U \subseteq |\Delta_0|$ ist offen in $|\Delta_0|$ in der $\|.\|_2$-Norm $\Rightarrow U$ offen in $|\Delta_0| - |\Delta_1| = |\Delta| - |\Delta_1|$ in der $\|.\|_2$-Norm $\Rightarrow U$ offen in $|\Delta|$ in der $\|.\|_2$-Norm

$\Rightarrow$ Einbettung.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) klar, (iv) $\Rightarrow$ (v) klar

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(v): Sei $v \in V$ Ecke, die im Simplex a_j, $j \in \mathbb{N}$ liegt. Sei $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ absteigende Kette von Umgebungen von v in $|\Delta|$. Für jedes j gibt es $p_j \in |a_j|_0 \cap U_j$. Die $\{p_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ sind eine abg. diskrete Menge. Also ist $\{U_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ keine Umgebungsbasis. $\square$

26. <u>Satz</u> Sei X eine Menge, sei $d: X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von X mit

(i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (A,d)$ ist metrischer Raum

(ii) $\forall p,q \in X \; \exists A \in \mathcal{A} \quad p,q \in A$

(iii) $\forall A \in \mathcal{A}, o \in A \; \exists \rho: X \to A$ Retraktion (d.h. $\rho^2 = \rho$, $\rho(X) = A$) so, dass für alle $p \in A, q \in X$ gilt

$$d(o,\rho(q)) = d(o,q)$$
$$d(p,\rho(q)) \le d(p,q)$$

Dann ist (X,d) ein metrischer Raum. Falls jedes (A,d) ein CAT(0)-Raum ist, so ist X ein CAT(0)-Raum.

<u>Beweis</u> Aus (i), (ii) folgt: $d(p,q) = d(q,p) \ge 0$ und $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$. Zur Dreiecksungleichung.

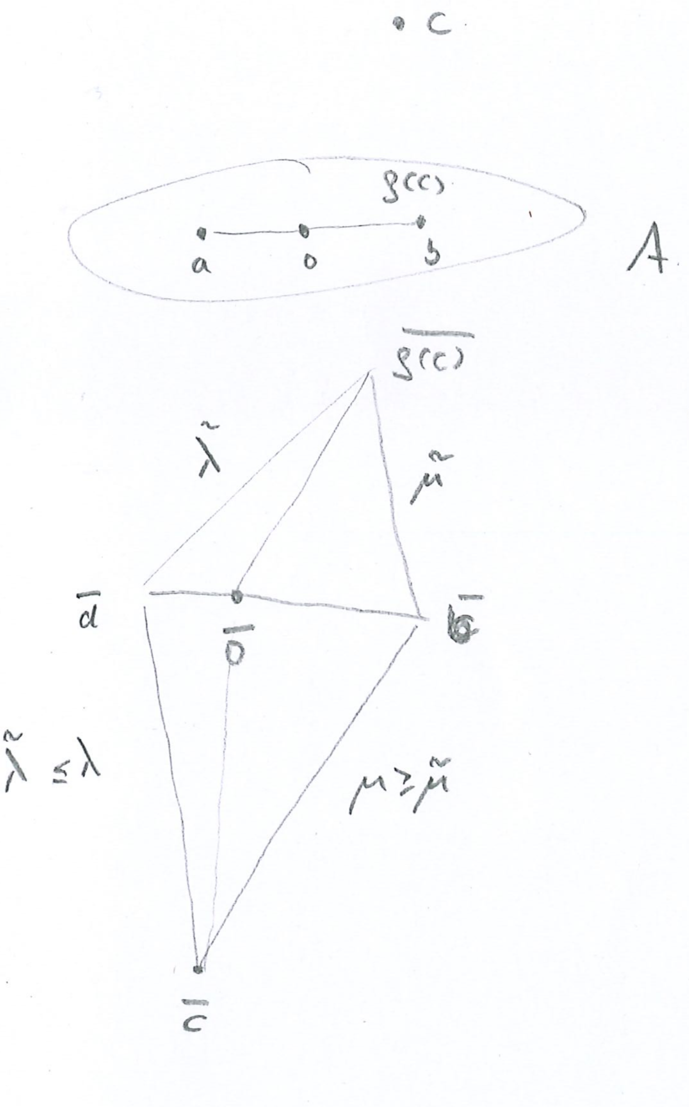
Sei $o,p,q \in X$, $o,p \in A \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$d(p,q) + d(q,o) \ge d(p,\rho(q)) + d(\rho(q),o)$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ (A,d) \text{ metr. Raum}}}{\ge} d(p,o)$$

$\Rightarrow (X,d)$ ist metrischer Raum.

<u>CAT(0)-Bedingung:</u> Sei $a, b, c \in X$, sei $A \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in A$, sei o ein Punkt auf der Geodäte in A von a nach b. Dann gilt mit der Retraktion ρ

$$d(o,c) = d(o, \rho(c)) \leq d(\bar{o}, \overline{\rho(c)}) \leq d(\bar{o}, \bar{c})$$



Es folgt: die Geodäte von a nach b <u>in A</u> ist die eindeutige Geodäte von a nach b und damit ist X CAT(0). $\square$

27. **Def** Ein Simplizialkomplex Δ heißt (zush.) m-Pseudo-Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

(i) jedes $a \in \Delta$ ist in ein m-Simplex $b \in \Delta$

(ii) jedes $(m-1)$-Simplex $a \in \Delta$ ist in genau zwei m-Simplices

(iii) Sind a, a' m-Simplices, so gibt es m-Simplices $a = a_0, a_1, \dots, a_r = a'$ mit: $a_{i-1} \cap a_i$ ist $m-1$-Simplex.

Satz Sei Δ ein Simplizialkomplex. Wenn $|\Delta|$ eine zush. (topologische) Mannigfaltigkeit ist, so ist Δ eine zush. Pseudomannigfaltigkeit.

Beweisidee (mit algebraischer Topologie)

(a) In jedem Simplizialkomplex Δ mit $p \in |a|_0$, $a \in \Delta$ k-Simplex gilt $H_j(|\Delta|, |\Delta| - p) \cong \tilde{H}_{j-k-1}(|lk\, a|)$

wobei $lk(a) = \{ b \in \Delta \mid a \cap b = \emptyset,\ a \cup b \in \Delta \}$

(b) In jeder m-Mannigfaltigkeit M gilt $H_j(M, M-p) = \begin{cases} 0 & j \neq m \\ \mathbb{Z} & j = m \end{cases}$

(c) Ist $a \in \Delta$ mit $lk(a) = \emptyset$, so ist a m-Simplex

Ist $a \in \Delta$ (k-Simplex) mit $lk(a) \neq \emptyset$, so ist $k < m$

Ist $a \in \Delta$ $m-1$-Simplex, so ist $\tilde{H}_0(|lk\, a|) \cong \mathbb{Z}$

$\Rightarrow lk(a)$ hat genau zwei Elemente

(d) Ist $a \in \Delta$ k-Simplex, $k < m$, so ist $lk(a)$ ein zush. $m-k-1$-Pseudo-Mannf.

Damit (iii) mit Induktion. □

→ Munkres, EAT § 63.

28. Def Sei Δ ein Simplizialkomplex. Eine Metrik d auf $|\Delta|$ heißt stückweise euklidisch, wenn gilt:

(i) d metrisiert $|\Delta|$ (also ist Δ lokal endlich nach §5.25)

(ii) Jedes $|a|$ ist isometrisch zu einem Simplex in $\mathbb{R}^k$
a k-Simplex

Falls $(|\Delta|, d)$ isometrisch zu $\mathbb{R}^m$ (in der euklidischen Metrik) ist, so heißt (Δ, d) stückweise euklidische Triangulierung von $\mathbb{R}^m$.

Dann ist Δ eine zusammenh. Pseudo-Mannigfaltigkeit.

29. Def (Euklidische Gebäude) Sei $\Delta \neq \emptyset$ ein Simplizialkomplex, sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilkomplexen von Δ. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ sei d_A eine Metrik auf $|A|$ so, dass (A, d_A) eine stückweise euklidische Triangulierung von $\mathbb{R}^m$ ist. ($m \geq 1$ ist fest.). Wir nennen Δ ein euklidisches Gebäude, wenn gilt:

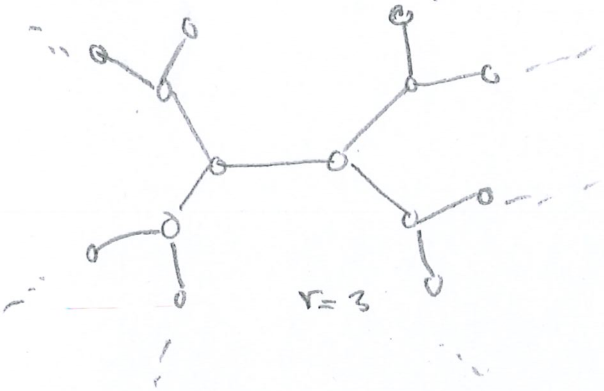
(i) jedes $(m-1)$-Simplex $a \in \Delta$ ist in mindestens drei m-Simplices enthalten

(ii) für alle $a, b \in \Delta$ gibt es $A \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in A$

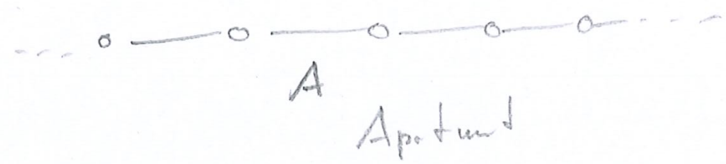
(iii) Ist $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ und $a, b \in A_1 \cap A_2$, so gibt es einen simplizialen Isomorphismus $\varphi: A_1 \xrightarrow{\cong} A_2$, der a, b und alle Ecken von a, b festlässt, und $\varphi: |A_1| \to |A_2|$ ist Isometrie bzgl d_{A_1}, d_{A_2}.

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Apartments, die m-Simplices heißen Kammern.

<u>Beispiel</u> T ein Baum der Valenz $r \geq 3$, alle Kanten haben Länge 1 $\rightsquigarrow$ T 1-dimensionaler Simplizialkomplex



$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ unendlicher (geodätischer) Weg durch T



<u>Beobachtungen</u> (a) $|\Delta|$ ist <u>keine</u> Mannigfaltigkeit (wegen (i)).

Jedes $a \in \Delta$ ist in einem m-Simplex enthalten, jedes k-Simplex $k < m$ ist in mindestens 3 m-Simplices enthalten.

(b) Ist $a \in \Delta$ eine Kammer, $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $a \in A_1 \cap A_2$, so gibt es <u>genau eine Isometrie</u> $\varphi : |A_1| \to |A_2|$ (mit $\varphi|_{|a|} = id_{|a|}$), denn $|a|_0$ ist offen in $|A_1|$ und $|A_2|$.

(c) Es gibt genau eine Abbildung $d : |\Delta| \times |\Delta| \to \mathbb{R}$ so, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $d|_{A \times A} = d_A$.

Denn: $p, q \in |\Delta| \rightsquigarrow$ es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $p, q \in |A|$.

Ist $A' \in \mathcal{A}$ mit $p, q \in |A'|$, so folgt

$d_A(p,q) = d_{A'}(p,q)$ (wegen iii)

Setze $d(p,q) = d_A(p,q)$.

30. Satz Sei $(\Delta, \mathcal{A}, d)$ ein euklidisches Gebäude, sei $c \in \Delta$ eine Kammer in ein Apartment $A \subseteq \Delta$. Dann gibt es eine Retraktion $\varrho : \Delta \to A$ mit

(i) ϱ ist regulärer Morphismus, $\varrho^2 = \varrho$, $\varrho(\Delta) = A$

(ii) Für jedes $p \in |c|$, $q \in |\Delta|$ gilt
$d(p, \varrho(q)) = d(p, q)$

(iii) Für alle $p, q \in |\Delta|$ gilt $d(\varrho(p), \varrho(q)) \leq d(p, q)$.

Beweis Sei $q \in |\Delta|$. Dann gibt es $A_1 \in \mathcal{A}$ mit $b \in A_1$ und $q \in |A|$, wähle Isomorphismus $\varphi_1 : A_1 \to A$, der b fest lässt, und A_2 ein anderes solches Apartment, so ist $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : A_1 \to A_2$ der eindeutige Isomorphismus, der b fest lässt (Beobachtung (b)). Es folgt wegen $p \in |A_1| \cap |A_2|$, dass $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(p) = p$, d.h. $\varphi_2(p) = \varphi_1(p)$. Setze $\varrho(p) = \varphi_1(p)$. Damit gilt (i) und (ii).

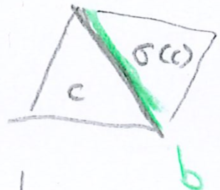
Zu (iii). Sei $A' \in \mathcal{A}$ mit $p, q \in |A'|$. Dann gibt es eine Geodätische c in $|A'|$ von p nach q. Diese Geodätische trifft endlich viele Kammern in A' nach §5.25. Da ϱ auf jeder Kammer eine Isometrie ist, ist $\varrho \circ c$ ein Polygonzug in $|A|$ mit endlich vielen "Knicken", damit $d(\varrho(p), \varrho(q)) \leq d(p, q)$. $\square$

Korollar $(|\Delta|, d)$ ist ein CAT(0)-Raum.

Beweis: Das folgt aus dem Satz und § 5.26. $\square$

Axiom (i) in § 5.29 hat somit keine Rolle gespielt. Wir benutzen es jetzt.

31. **Satz** Sei $(\Delta, \mathcal{A}, d)$ ein euklidisches Gebäude, sei $A \in \mathcal{A}$ und sei $C \in A$ eine Kammer. Sei $b \leq C$ ein $(n-1)$-Simplex, sei σ die eindeutige Isometrie von $|A|$, die $|C|$ an $|b|$ spiegelt.



Dann gibt es einen Automorphismus σ von A, der auf $|A|$ mit σ übereinstimmt.

Beweis Sei $C = C_0$, sei $C_1 \in A$ die eindeutige Kammer (in A) mit $b = C_0 \cap C_1$ (vgl. § 5.27), sei $C_2 \neq C_0, C_1$ eine weitere Kammer mit $b \in C_2$. Wähle $A_{02}, A_{12} \in \mathcal{A}$ mit $C_0, C_2 \in A_{02}$, $C_1, C_2 \in A_{12}$, Isomorphismen

$$\sigma: A \xrightarrow[C_0 \text{ fest}]{} A_{02} \xrightarrow[C_2 \text{ fest}]{} A_{12} \xrightarrow[C_1 \text{ fest}]{} A$$

$$C_1 \mapsto C_2 \longmapsto C_2 \longmapsto C_0$$

$$b \mapsto b \longmapsto b \longmapsto b$$

σ Isometrie von $|A| \Rightarrow \sigma$ fixiert die von $|b|$ aufgespannte affine Hyperebene (H) in $|A| \Rightarrow \sigma$ Spiegelung an H. $\square$

<u>Korollar</u> Sei $W(A)$ die von allen den Spiegelungen erzeugte Gruppe. Dann wirkt W transitiv auf den Kammern in A. Insbesondere sind alle Kammern in $|\Delta|$ isometrisch. □

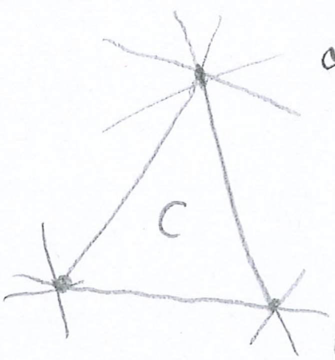
<u>Beweis</u> Das folgt mit §5.27 (iii).

Für $m = 1,2$ sieht man direkt die Möglichkeiten für $W(A)$.

<u>$m=1$</u> $|A| = \mathbb{R}$, aufgeteilt in gleich lange Intervalle

Die 1-dimensionalen euklidischen Gebäude sind genau die metrischen simplizialen Bäume mit Kanten fester Länge und Valenzen ≥ 3 in den Ecken.

<u>$m=2$</u>



α Spiegelungen Winkel $\frac{\pi}{\alpha}$

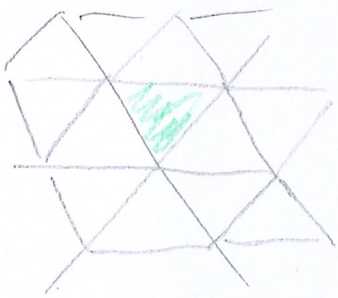
$\frac{\pi}{\gamma}$ γ Spiegelungen

β Spiegelungen $\frac{\pi}{\beta}$

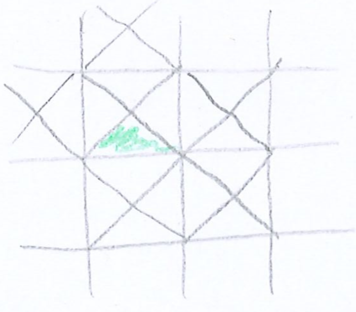
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$$

$\alpha, \beta, \gamma \geq 2$

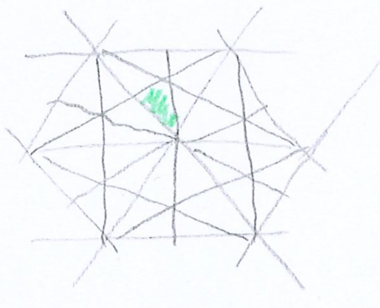
(3,3,3)



(2,4,4)



(2,3,6)



Die 2-dimensionalen euklidischen Gebäude sind nicht klassifizierbar. Ein (tiefer) Satz von Jacques Tits besagt: jedes euklidische Gebäude Δ der Dimension $d \geq 3$ entsteht auf arithmetische Weise aus einem (oder zwei) bewerteten Körpern.

32. Def Sei K ein Körper. Eine Bewertung auf K ist ein Homomorphismus $K^\times \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}$ mit

(i) ν ist surjektiv

(ii) $\nu(a+b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$

mit der Konvention $\nu(0) = \infty$. Dann ist $\mathcal{O} = \{a \in K \mid \nu(a) \geq 0\}$ ein Teilring mit Einheitengruppe $\mathcal{O}^\times = \ker(\nu) = \{a \in K \mid \nu(a) = 0\}$ und $\mathfrak{m} = \{a \in K \mid \nu(a) > 0\}$ ist ein maximales Ideal in $\mathcal{O}$. Dann ist $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ ein Körper, der Residuenkörper der Bewertung.

Wähle $u \in K$ mit $\nu(u) = 1$ (man nennt u einen uniformisierenden Parameter). Ist $I \trianglelefteq \mathcal{O}$ ein Ideal und $a \in I$ mit $\nu(a) = \ell$, so ist $u^{-\ell} \cdot a \in \mathcal{O}^\times$ $\Rightarrow u^\ell \in I \Rightarrow u^\ell \mathcal{O}^\times \subseteq I$. Ist also $\ell = \min\{s \mid u^s \in I\}$, so ist $\mathcal{O} u^\ell = I \Rightarrow \mathcal{O}$ ist Hauptidealring.

Beispiel (a) p Primzahl. Jedes $x \in \mathbb{Q}^\times$ lässt sich eindeutig schreiben als $x = p^\ell \cdot \frac{a}{b}$, p teilt a, b nicht.

Setze $\nu(x) = \ell$. Es gilt für $\ell \geq m$

$$\nu\left(p^\ell \frac{a}{b} + p^m \frac{c}{d}\right) = \nu\left(p^m\left(p^{\ell-m}\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\right) \geq m$$

Dies ist die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$, wähle p als uniformisierenden Parameter, $\mathcal{O} = \{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0,\ p \text{ teilt } b \text{ nicht}\}$, $\mathcal{O}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{F}_p$ Körper mit p Elementen

(b) Definiere eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ durch $|x-y|_p = \exp(-\nu(x-y))$

$d_p(x,y) = |x-y|_p$, der p-adische Absolutbetrag.

Die Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ ist der Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen. Die Bewertung ν setzt sich kanonisch fort auf $\mathbb{Q}_p$ und

$\mathbb{Z}_p = \{x\in\mathbb{Q}_p \mid \nu(x)\geq 0\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid \nu(x) > -1\}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_p$ ist abg + offen in $\mathbb{Q}_p$, vollständig und total beschränkt $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_p$ ist ein kompakter Ring.

(c) F Körper, $K = F(t)$ Körper der rationalen Funktionen

$F(t) = \{\frac{f}{g} \mid f,g \in F[t],\ g\neq 0\}$

$\nu(t^\ell \cdot \frac{f}{g}) = \ell$ $\quad f(0)\neq 0 \neq g(0)$

$\mathcal{O} = \{f/g \mid g(0)\neq 0\}$

$\mathcal{O}/\mathfrak{m} \cong F$ via $\frac{f}{g} \mapsto \frac{f(0)}{g(0)}$

33. <u>Konstruktion</u> Sei (K, v) ein bewerteter Körper, $\mathcal{O} = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$, sei $u \in K$ mit $v(u) = 1$, sei $m \geq 2$. Dann ist K^m ein $\mathcal{O}$-Modul. Ein <u>$\mathcal{O}$-Gitter</u> L in K^m ist ein Untermodul, der isomorph ist zu $\mathcal{O}^m$.

<u>Lemma A</u> $L \subseteq K^m$ ist ein $\mathcal{O}$-Gitter genau dann, wenn es eine K-Basis $v_1, \dots, v_m$ von K^m gibt mit $L = \mathcal{O}v_1 \oplus \mathcal{O}v_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}v_m$.

<u>Beweis</u> Klar: aus jeder K-Basis erhalten wir ein $\mathcal{O}$-Gitter. Sei nun $L \subseteq K^m$ ein $\mathcal{O}$-Gitter, $\varphi: \mathcal{O}^m \to L$ ein Isomorphismus von $\mathcal{O}$-Moduln. Setze $v_j = \varphi(e_j)$ ($e_1, \dots, e_m$ Standard-Basis).

<u>Beh</u> $v_1, \dots, v_m$ sind linear unabhängig über K.

<u>Denn:</u> $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$. Sei $\ell = \min\{v(\lambda_1), \dots, v(\lambda_m)\}$. Wenn $\ell \neq \infty$, dann

$u^{-\ell}\lambda_1 v_1 + \dots + u^{-\ell}\lambda_m v_m = 0$ $\quad u^{-\ell}\lambda_1, \dots, u^{-\ell}\lambda_m \in \mathcal{O}$

$\Rightarrow u^{-\ell}\lambda_1 = \dots = u^{-\ell}\lambda_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ $\square$

<u>Korollar</u> Die Gruppe $GL(m, K)$ wirkt transitiv auf der Menge der $\mathcal{O}$-Gitter in K^m. Der Stabilisator von $\mathcal{O}e_1 \oplus \dots + \mathcal{O}e_m = \mathcal{O}^m \subseteq K^m$ ist $GL(m, \mathcal{O}) = \{g \in \mathcal{O}^{m \times m} \mid \det(g) \in \mathcal{O}^\times\}$. $\square$

Wir nennen zwei $\mathcal{O}$-Gitter L, L' <u>äquivalent</u>, falls $L' = \lambda L$ für ein $\lambda \in K^\times$. Ist $v(\lambda) = \ell$, so folgt $\lambda L = u^\ell L$.

Die Äquivalenzklasse von L ist $[L] = \{\lambda L \mid \lambda \in K^\times\}$ $= \{u^\ell L \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$. Sei $V = \{[L] \mid L \subseteq K^m \text{ } \mathcal{O}\text{-Gitter}\}$

3) **Def** Wir nennen $[L_0]$, $[L_1] \in V$ <u>adjazent</u>, falls es $\lambda \in K^\times$ gibt mit $uL_0 \subsetneq \lambda L_1 \subsetneq L_0$.

$\Leftrightarrow$ es gibt $l \in \mathbb{Z}$ mit $uL_0 \subsetneq u^l L_1 \subsetneq L_0$. Dann gilt

$u^l L_1 \subsetneq L_0 \subsetneq u^{l-1} L_1$, das ist also eine symmetrische Relation

und $[L_0]$ ist nicht adjazent zu $[L_0]$.

<u>Lemma B</u> Sind $[L_0]$, $[L_1]$, $[L_2]$ paarweise adjazent, mit $uL_0 \subsetneq L_1, L_2 \subsetneq L_0$, so gilt $L_1 \subsetneq L_2$ oder $L_2 \subsetneq L_1$.

<u>Beweis</u> Wähle l mit $uL_1 \subsetneq u^l L_2 \subsetneq L_1$.

Wenn $u^l L_2 \subsetneq uL_0 \Rightarrow uL_0 \subsetneq L_1 \subsetneq u^{l-1} L_2 \subsetneq L_0$

$\Rightarrow l-1 = 0$

sonst $uL_0 \subsetneq u^l L_2 \Rightarrow uL_0 \subsetneq u^l L_2 \subsetneq L_1 \subsetneq L_0$

$\Rightarrow l = 0$ $\square$

<u>Beobachtung</u> Ist $uL_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_0$ für $\mathcal{O}$-Gitter L_0, L_1, so ist L_0/uL_0 ein $\mathcal{O}$-Modul, auf dem $\mathfrak{m} = u\mathcal{O}$ trivial wirkt. Also ist L_0/uL_0 ein $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$-Modul, d.h. ein k-Vektorraum, $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$, $L_0/uL_0 \cong k^m$.

<u>Lemma C</u> Sind $[L_0], \ldots, [L_s]$ paarweise adjazent, mit $uL_0 \subsetneq L_j \subsetneq L_0$ für $j = 1, \ldots, s$, so gilt (nach Umnumerieren)

$uL_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \ldots \subsetneq L_s \subsetneq L_0$ und $s < m$.

<u>Beweis</u> Mit Lemma B können wir die $L_1, \ldots, L_s$ linear ordnen. Die Bilder der L_j in $L_0/uL_0 \cong k^m$ bilden dann eine steigende Kette von Untervektorräumen $\Rightarrow s \leq m-1$ $\square$

34. Das euklidische Gebäude zu (K,ν) Sei $K, \nu, \mathcal{O}, m, V$ wie eben. Sei Δ die Menge aller Mengen von paarweise adjazenten Teilmengen von V. Dann ist Δ ein Simplizialkomplex, in dem jedes Simplex in einem $(m-1)$-Simplex enthalten ist.

Ist $a \in \Delta$ ein $m-2$ Simplex, etwa

$$a = \{[L_0], \dots, [L_{j-1}], [L_{j+1}], \dots [L_{m-1}]\}$$

$$uL_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \dots \subsetneq L_{j-1} \subsetneq L_{j+1} \subsetneq \dots \subsetneq L_{m-1} \subsetneq L_0$$

H_i das Bild von L_i in $L_0/uL_0 \cong k^m$ mit $\dim_k(H_i) = i$

so gibt es $\#k+1$ UVR H_j mit $H_{j-1} \subsetneq H_j \subsetneq H_{j+1}$

(denn k^2 hat $\#k+1$ 1-dimensionale UVR). Jedem solchen H_j entspricht genau ein $\mathcal{O}$-Gitter L_j mit $L_{j-1} \subsetneq L_j \subsetneq L_{j+1}$

$\Rightarrow$ jedes $(m-2)$-Simplex ist in genau $\#k+1$ m-Simplices.

Damit gilt Axiom (i) aus § 5.29. Nun brauchen wir Apartments.

Sei $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ eine K-Basis von K^m. Für $\underline{l} = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}^m$ sei $L(\underline{v}, \underline{l}) = \mathcal{O} u^{l_1} v_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O} u^{l_m} v_m$

Es gilt $[L(\underline{v}, \underline{l})] = [L(\underline{v}, \underline{l}')]$ gdw

$$\underline{l} - \underline{l}' = (n, \dots, n) \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}$$

Setze $A(\underline{v}) = \{a \in \Delta \mid [L] \in a \Rightarrow L = L(\underline{v}, \underline{l}) \text{ für ein } \underline{l} \in \mathbb{Z}^m\}$. Wir setzen $\mathcal{A} = \{A(\underline{v}) \mid \underline{v} \text{ Basis von } K^m\}$.

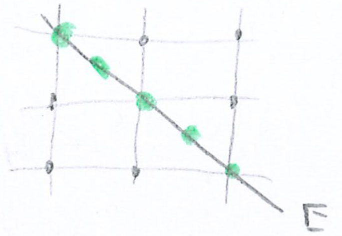
Stückweise euklidische Triangulierung von $|A(\underline{v})|$.

Sei $E = \{ w \in \mathbb{R}^m \mid w_1 + \dots + w_m = 0 \} \cong \mathbb{R}^{m-1}$. Orthogonal-Projektion $p: \mathbb{Z}^m \to E$, $\underline{l} = (l_1, \dots, l_m) \mapsto \underline{l} - c \cdot (1, \dots, 1)$

$c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l_i$ $\qquad p(\underline{l}) = p(\underline{l}') \Leftrightarrow \underline{l} - \underline{l}' = n(1, \dots 1)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten so eine Bijektion $\varphi: |A(\underline{v})| \to E \cong \mathbb{R}^m$

$\varphi([L(\underline{v}, \underline{l})]) = p(\underline{l})$

$m = 2$



<u>Beobachtung:</u> $K^m = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} u^l L$ für jedes $\mathcal{O}$-Gitter L. Es folgt: ist $F \subseteq K^m$ endlich, so gibt es $l \in \mathbb{Z}$ mit $F \subseteq u^l L$. Sind also L_0, L_1 $\mathcal{O}$-Gitter, so gibt es $l \in \mathbb{Z}$ mit $L_1 \subseteq u^l L_0$ (wende obige Beobachtung auf eine Basis von L_1 an). Wir brauchen ein Hilfsmittel aus der Algebra

<u>Satz</u> (<u>Elementarteilersatz</u>) Sei $\mathcal{O}$ ein Hauptidealbereich, sei $A \in \mathcal{O}^{m \times m}$. Dann gibt es $g, h \in GL(m; \mathcal{O})$ (d.h. $\det(g), \det(h) \in \mathcal{O}^\times$) mit $gAh = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \lambda_s & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$

und $\lambda_i \mid \lambda_j$ für $i \leq j$. ($\to$ Jacobson, Basic Algebra, §3.7)

Die λ_i sind eindeutig bis auf Einheiten in $\mathcal{O}$

<u>Korollar</u> Sind L_0, L_1 $\mathcal{O}$-Gitter, mit $L_1 \subseteq L_0$, so gibt es eine K-Basis $v_1, \dots, v_m$ mit $L_0 = \mathcal{O} v_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O} v_m$ und

$L_1 = \mathcal{O} u^{l_1} v_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O} u^{l_m} v_m$ $\qquad l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m$ <u>eindeutig</u>.

<u>Folgerung</u> Ist $[L_0], [L_1] \in V$, so gibt es eine Basis $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ von K^m so, dass $[L_0], [L_1] \in A(\underline{v})$.

Um die Axiome (ii), (iii) in § 5.29 zu zeigen, muss man die <u>Bruhat-Zerlegung</u> von $SL(m,K)$ benutzen: sei $L_0 = \mathcal{O}^m \subseteq K^m$, $A = A(e_1, \dots, e_m)$

sei $N \subseteq SL(m,K)$ die Gruppe aller Matrizen mit genau einem Eintrag $\neq 0$ pro Zeile und Spalte (mit Determinante 1).

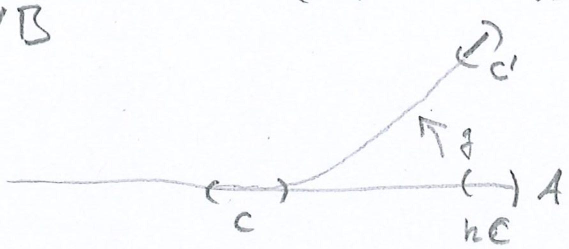
Dann ist $N = \{ g \in SL(m,K) \mid g(A) = A \}$

$$L_j = \begin{pmatrix} \underbrace{u \ \ddots \ u}_{j \text{ Einträge}} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{pmatrix} L_0 \quad , \quad c = \{[L_0], [L_1], \dots, [L_{m-1}]\}$$

Sei B der Stabilisator von c, $B = \left\{ \begin{pmatrix} v=0 & & v \geq 0 \\ & \ddots & \\ v > 0 & & v=0 \end{pmatrix} \right\}$

Dann gilt $SL(m,K) = BNB$

Damit folgt Axiom (ii)



$c' = b \cdot n(c) \quad \begin{matrix} n \in N \\ b \in B \end{matrix}$

Für Axiom (iii) ist eine noch genauere Rechnung nötig.

$\to$ Brown, § V. 8