Seminar: Rechtwinklige Artin-Gruppen

18.04.2018

Übersichtsvortrag:

Erinnerung: Coxetergruppen sind „gewisse" von Involutionen erzeugte Gruppen. Diese sind abstrakt definiert: Erzeuger + Relationen

Definition:

Sei I eine (endliche) Menge. Eine Coxetermatrix über I ist eine Matrix $M=(m_{ij})_{ij}$ mit $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ für alle $i,j \in I$ welche $m_{ii}=1$ $\forall i \in I$ und $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ für $i \neq j$ erfüllt.

$W := \langle I \mid (ij)^{m_{ij}}$ für alle $i,j \in I$ mit $m_{ij} < \infty \rangle$ ist die zugehörige Coxetergruppe.

Das Paar (W,I) nennt man Coxetersystem, und die Kardinalität $\# I$ heißt Rang von (W,I).

- Wir nehmen immer an, dass $\# I < \infty$.

Beispiele:

	M	W
(i)	(1)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(ii)	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & & 2 \\ 3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathrm{Sym}(n)$
(iii)	$\begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(iv)	$\begin{pmatrix} 1 & \infty & & \infty \\ \infty & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \infty \\ \infty & & \infty & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ „universelle" Coxetergruppe

Die Informationen, die in einer Coxetermatrix stehen, lassen sich anschaulicher durch einen gewichteten Graphen kodieren:

1. Möglichkeit: Coxetergraph $\tilde{\Gamma}$

- die Menge der Ecken ist I
- zwischen zwei Ecken $i,j \in I$ $(i \neq j)$ gibt es
  - keine Kante, falls $m_{ij} = 2$.
  - eine mit m_{ij} beschriftete Kante, falls $m_{ij} > 2$, wobei Kanten $\overset{3}{\bullet\!\!-\!\!\bullet}$ der Einfachheit halber auch als $\bullet\!\!-\!\!\bullet$ notiert werden.

    (solche Kanten treten in Anwendungen besonders oft auf).

Bemerkung: $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \tilde{\Gamma}_k \implies C(\tilde{\Gamma}) \cong C(\tilde{\Gamma}_1) \times \ldots \times C(\tilde{\Gamma}_k)$

Zusammenhangskomponenten

Coxetergruppe die durch $\tilde{\Gamma}$ definiert ist.

Beispiel:

(i) $\tilde{\Gamma}_1 : \quad \bullet \qquad \bullet\!\!-\!\!\bullet \qquad C(\tilde{\Gamma}_1) \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times Sym(3)$

$\cong$

(ii) $\tilde{\Gamma}_2 : \quad \overset{6}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} \qquad C(\tilde{\Gamma}_2) \cong D_6$

Isomorphieproblem: $\tilde{\Gamma}_1 \cong \tilde{\Gamma}_2 \overset{???}{\Longleftrightarrow} C(\tilde{\Gamma}_1) \cong C(\tilde{\Gamma}_2)$

für bel. Coxetergruppen ist diese Aussage i.A. falsch, aber für RACG ist das richtig

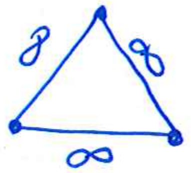
2. Möglichkeit: (Definierender) Graph Γ

- die Menge der Ecken ist I.
- zwischen zwei Ecken $i,j \in I$ $(i \neq j)$ gibt es genau dann eine mit m_{ij} beschriftete Kante, falls $m_{ij} < \infty$, wobei wir Kanten der Form $\bullet\overset{2}{—}\bullet$ als $\bullet—\bullet$ notieren.

Bemerkung:

$$\Gamma = \Gamma_1 \dot\cup \dots \dot\cup \Gamma_e \Rightarrow C(\Gamma) \cong C(\Gamma_1) * \dots * C(\Gamma_e)$$

Beispiel:

Coxetermatrix	Coxetergraph	Def. Graph	Coxetergruppe
$\begin{pmatrix} 1 & & \infty \\ & \ddots & \\ \infty & & 1 \end{pmatrix}$			$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Wir werden weiter im Seminar mit dem def. Graph Γ arbeiten.

Was wissen wir alles über Coxetergruppen?

- $J \subseteq I$. Dann $\langle J \rangle = W_J$ wieder eine Coxetergruppe
- Coxetergruppen sind linear
- Coxetergruppen sind CAT(0)
- Das Wortproblem + das Konjugationsproblem sind lösbar.

- Coxetergruppen haben Serre's Eigenschaft FA $\Longleftrightarrow$ alle $m_{ij} < \infty$ $\Longleftrightarrow$ def. Graph ist vollständig.

...

Nun wollen wir „verwandte" Gruppen studieren:

I: **Artin-Gruppen** II: Graphprodukte

Definition:

Sei $\Gamma = (I, E)$ ein endl. Graph mit Kantenbeschriftung $m_{ij} \in \mathbb{N} - \{0,1\}$

und

$$C(\Gamma) = \langle I \mid i^2, (ij)^{m_{ij}} \text{ falls } \{i,j\} \in E \text{ mit Beschriftung } m_{ij} \rangle$$

die zug. Coxetergruppe.

Die **Artingruppe** $A(\Gamma)$ ist wie folgt definiert:

$$A(\Gamma) = \langle I \mid \underbrace{ijij\ldots}_{} = \underbrace{jiji\ldots}_{} \quad \text{falls } \{i,j\} \in E \text{ mit Beschriftung } m_{ij} \rangle$$

m_{ij} - Buchstaben

Bemerkung: $A(\Gamma) \twoheadrightarrow C(\Gamma)$

Beispiel:

(i) Γ_1  $A(\Gamma_1) \cong F_3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = C(\Gamma_1)$

(ii) Γ_2  $A(\Gamma_2) \cong \mathbb{Z}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = C(\Gamma_2)$

Definition:

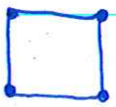
(i) Eine Artingruppe $A(\Gamma)$ heißt sphärisch, falls $C(\Gamma)$ sphärisch ist.

(ii) Eine Artingruppe $A(\Gamma)$ heißt rechtwinklig (RAAG), falls Γ ein Graph ohne Beschriftung ist, d.h. alle Einträge in der Coxetermatrix ~~[illegible]~~ von der Coxetergruppe $C(\Gamma)$ sind Elemente aus $\{2, \infty\}$.

$\uparrow$

RACG

Beispiele:

Γ	$A(\Gamma)$	$C(\Gamma)$
	Zopfgruppe	Sym(3)
	$\mathbb{Z}^4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$
	$F_2 \times F_2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Bem:

$A(\Gamma)$ ist eine RAAGruppe $:\iff$ Γ ist ein endlicher simplizialer Graph.

Ein wenig Geschichte:

- RAAG's wurden '70 vom Baudisch eingeführt und '80 von Droms untersucht unter den Namen: „graph groups".

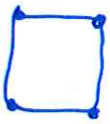
Fragen:

- Sind Artingruppen torsionsfrei?
- Sind Artingruppen linear?
- Sind Artingruppen CAT(0)?
- $\Gamma_1 \cong \Gamma_2 \overset{???}{\iff} A(\Gamma_1) \cong A(\Gamma_2)$
- Wortproblem
- Konjugationsproblem

...

für bel. Artingruppen sind das offene Fragen: für RAAG's wurden diese Fragen beantwortet.

Ziele vom Seminar:

- RAAG's sind torsionsfrei (Nils)
- RAAG's sind linear (Okan)
- RAAG's $\overset{\text{geometrisch}}{\curvearrowright}$ CAT(0) kub. Komplexen
- $\Gamma_1 \cong \Gamma_2 \Leftrightarrow A(\Gamma_1) \cong A(\Gamma_2)$ für RAAG's (Lara)
- Untergruppen v. RAAG's:
  - Jede endl. erz. Untergruppe von RAAG ist genau dann endlich präsentierbar, wenn  kein voller Untergraph ist. (Lea)
  - Jede endl. erz. Untergruppe von RAAG ist wieder RAAG $\Leftrightarrow$  und  keine vollen Untergraphen sind. (Lea)