Das affine Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

Jonas Flechsig

Seminar - Gruppentheorie und Geometrie - Coxetergruppen und Gebäude

January 16, 2018

To-Do-List

- Gebäude (als Simplizialkomplexe)

  $\rightarrow$ Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$
- Tits-Systeme

  $\rightarrow$ $SL_2(\mathbb{Q})$ besitzt Tits-System "vom Typ $\tilde{A}_1$"

  $\rightarrow$ Assoziation eines Gebäudes zum Tits-System
- Tits-Systeme "vom Typ $\tilde{A}_1$" sind Amalgame

  $\rightarrow$ Assoziation eines Baumes zum Amalgam

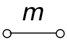
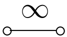
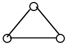
  $\rightarrow$ Vergleich: Gebäude vs. Baum

Coxetersysteme

- **Erinnerung:** Coxetersystem $(W, S) \leftrightarrow$ Coxetermatrix M
  $\leftrightarrow$ Coxetergraph Γ.

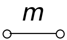
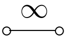
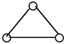
Coxetersysteme

- **Erinnerung:** Coxetersystem $(W, S) \leftrightarrow$ Coxetermatrix M
  $\leftrightarrow$ Coxetergraph Γ.
- Im Folgenden wichtig:

Coxetergraph		Coxetersystem
$I_2(m)$:		$< s, t \mid s^2, t^2, (st)^m > \rightsquigarrow (D_m, \{s, t\})$
$\tilde{A}_1$:		$< s, t \mid s^2, t^2 > \rightsquigarrow (D_\infty, \{s, t\})$
$\tilde{A}_2$:		$(< S \mid r^2, s^2, t^2, (rs)^3, (st)^3, (rt)^3 >, S)$ mit $S = \{r, s, t\}$.

Coxetersysteme

- **Erinnerung:** Coxetersystem $(W, S) \leftrightarrow$ Coxetermatrix M
  $\leftrightarrow$ Coxetergraph Γ.
- Im Folgenden wichtig:

Coxetergraph		Coxetersystem
$I_2(m)$:		$< s, t \| s^2, t^2, (st)^m > \rightsquigarrow (D_m, \{s, t\})$
$\tilde{A}_1$:		$< s, t \| s^2, t^2 > \rightsquigarrow (D_\infty, \{s, t\})$
$\tilde{A}_2$:		$(< S \| r^2, s^2, t^2, (rs)^3, (st)^3, (rt)^3 >, S)$ mit $S = \{r, s, t\}$.

- Im Folgenden gilt stets:
  (W, S) ist ein Coxetersystem mit Coxetergruppe W und Erzeugermenge S.

Simplizialkomplexe

- **Definition:** Sei X eine Menge und Δ eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$.
  Δ <u>Simplizialkomplex</u> $:\Leftrightarrow$ $(\Delta, \subseteq)$ bezüglich Abstieg abgeschlossen.

  Allgemeiner: Δ' Simplizialkomplex $:\Leftrightarrow$ $(\Delta', \leq) \cong (\Delta, \subseteq)$.

Simplizialkomplexe

- **Definition:** Sei X eine Menge und Δ eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$.
  Δ Simplizialkomplex $:\Leftrightarrow (\Delta, \subseteq)$ bezüglich Abstieg abgeschlossen.
  Allgemeiner: Δ' Simplizialkomplex $:\Leftrightarrow (\Delta', \leq) \cong (\Delta, \subseteq)$.
- $a \in \Delta :\Leftrightarrow$ Simplex der Dimension $\#a - 1$.
- Dimension des Simplizialkomplexes Δ:

$$dim(\Delta) = \max\{dim(a) | a \in \Delta\}.$$

Simplizialkomplexe

- **Definition:** Sei X eine Menge und Δ eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$.
  Δ <u>Simplizialkomplex</u> $:\Leftrightarrow (\Delta, \subseteq)$ bezüglich Abstieg abgeschlossen.

  Allgemeiner: Δ' Simplizialkomplex $:\Leftrightarrow (\Delta', \leq) \cong (\Delta, \subseteq)$.
- $a \in \Delta :\Leftrightarrow$ <u>Simplex</u> der Dimension $\#a - 1$.
- <u>Dimension des Simplizialkomplexes Δ</u>:

$$dim(\Delta) = \max\{dim(a) | a \in \Delta\}.$$

- **Beispiel:**
  1-dim. Simplizialkomplexe $\leftrightarrow$ kombinatorische Graphen

Simplizialkomplexe über S

- Seien Δ_1, Δ_2 Simplizialkomplexe.

$$\varphi : \Delta_1 \to \Delta_2 \text{ \underline{simpliziale Abbildung}}$$
$$:\Leftrightarrow \varphi \text{ ordnungs- und dimensionserhaltend.}$$

Simplizialkomplexe über S

- Seien Δ_1, Δ_2 Simplizialkomplexe.

  $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_2$ simpliziale Abbildung
  $:\Leftrightarrow$ φ ordnungs- und dimensionserhaltend.

- Sei S eine Menge und Δ ein Simplizialkomplex.

  Δ Simplizialkomplex über S
  $:\Leftrightarrow$ es gibt simpliziale Abbildung $t : \Delta \to \mathcal{P}(S)$ (Typfunktion).

Simplizialkomplexe über S

- Seien Δ_1, Δ_2 Simplizialkomplexe.

  $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_2$ <u>simpliziale Abbildung</u>
  $:\Leftrightarrow$ φ ordnungs- und dimensionserhaltend.

- Sei S eine Menge und Δ ein Simplizialkomplex.

  Δ <u>Simplizialkomplex über S</u>
  $:\Leftrightarrow$ es gibt simpliziale Abbildung $t : \Delta \to \mathcal{P}(S)$ (Typfunktion).

- Seien Δ_1, Δ_2 Simplizialkomplexe über S mit Typfunktionen $t_i : \Delta_i \to \mathcal{P}(S)$.

  $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_2$ <u>Homomorphismus über S</u>
  $:\Leftrightarrow$ φ simpliziale Abbildung, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "t_1"'] & & \Delta_2 \arrow[dl, "t_2"] \\
& \mathcal{P}(S) &
\end{tikzcd}$$

Coxeterkomplexe

- **Definition:** Sei $\mathcal{U}$ offene Überdeckung eines topologischen Raumes X.

  Nerv $\mathcal{N}$ (Simplizialkomplex) der offenen Überdeckung $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) := \{\{U_1, ..., U_m\} | \bigcap_{k=1}^{m} U_k \neq \emptyset\}.$$

Coxeterkomplexe

- **Definition:** Sei $\mathcal{U}$ offene Überdeckung eines topologischen Raumes X.

  Nerv $\mathcal{N}$ (Simplizialkomplex) der offenen Überdeckung $\mathcal{U}$:

  $$\mathcal{N}(\mathcal{U}) := \{\{U_1, ..., U_m\} | \bigcap_{k=1}^{m} U_k \neq \emptyset\}.$$

- Betrachte: $X = W$ mit diskreter Topologie
  und $\mathcal{U} = \{wW_{S-\{s\}} | w \in W, s \in S\}$
  mit $W_{S-\{s\}} = \langle S - \{s\} \rangle$

  Dann heißt $\Sigma(W, S) := \mathcal{N}(\mathcal{U})$ Coxeterkomplex.

Coxeterkomplexe

- **Definition:** Sei $\mathcal{U}$ offene Überdeckung eines topologischen Raumes X.

  Nerv $\mathcal{N}$ (Simplizialkomplex) der offenen Überdeckung $\mathcal{U}$:

  $$\mathcal{N}(\mathcal{U}) := \{\{U_1, ..., U_m\} | \bigcap_{k=1}^{m} U_k \neq \emptyset\}.$$

- Betrachte: $X = W$ mit diskreter Topologie
  und $\mathcal{U} = \{wW_{S-\{s\}} | w \in W, s \in S\}$
  mit $W_{S-\{s\}} = \langle S - \{s\} \rangle$

  Dann heißt $\Sigma(W, S) := \mathcal{N}(\mathcal{U})$ Coxeterkomplex.
- Elemente in $\Sigma(W, S)$ haben die Form:

  $$\{w_1 W_{S-\{s_1\}}, ..., w_n W_{S-\{s_n\}}\} = \{wW_{S-\{t\}} | t \in T = \{s_1, ...s_n\}\}$$

Eigenschaften Coxeterkomplexe

- Ordnungsisomorphie:

$$(\Sigma(W,S), \subseteq) \cong (\bigcup_{T \subseteq S} W/W_T, \leq),$$
$$\{wW_{S-\{t\}} | t \in T\} \mapsto wW_{S-T}$$
$$\text{wobei } wW_T \leq w'W_{T'} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} wW_T \supseteq w'W_{T'}.$$

Eigenschaften Coxeterkomplexe

- Ordnungsisomorphie:

$$(\Sigma(W,S),\subseteq) \cong (\bigcup_{T\subseteq S} W/W_T, \leq),$$

$$\{wW_{S-\{t\}} | t \in T\} \mapsto wW_{S-T}$$

$$\text{wobei } wW_T \leq w'W_{T'} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} wW_T \supseteq w'W_{T'}.$$

- **Beispiel:** Coxeterkomplex $\Sigma(W,S)$ Simplizialkomplex über S mit Typfunktion:

$$t : \Sigma(W,S) \to \mathcal{P}(S), wW_{S-T} \mapsto T.$$

Gebäude als Simplizialkomplexe

- **Definition:**
  Sei Δ Simplizialkomplex über S,
  $\mathcal{A}$ Menge von Unterkomplexen (Apartmentsystem).

  Δ heißt Gebäude vom Typ (W, S), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

  (G_1) Für alle $\Sigma \in \mathcal{A}$ (Apartment) gibt es einen Isomorphismus $\phi : \Sigma(W, S) \to \Sigma \subseteq \Delta$ über S.

Gebäude als Simplizialkomplexe

- **Definition:**
  Sei Δ Simplizialkomplex über S,
  $\mathcal{A}$ Menge von Unterkomplexen (Apartmentsystem).

  Δ heißt Gebäude vom Typ (W, S), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

  (G_1) Für alle $\Sigma \in \mathcal{A}$ (Apartment) gibt es einen Isomorphismus $\phi : \Sigma(W, S) \to \Sigma \subseteq \Delta$ über S.

  (G_2) Sind Σ_1, $\Sigma_2 \in \mathcal{A}$ und $a, b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\Sigma_1 \to \Sigma_2$ über S, der a und b fixiert.

Gebäude als Simplizialkomplexe

- **Definition:**
  Sei Δ Simplizialkomplex über S,
  $\mathcal{A}$ Menge von Unterkomplexen (Apartmentsystem).

  Δ heißt Gebäude vom Typ (W, S), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

  (G_1) Für alle $\Sigma \in \mathcal{A}$ (Apartment) gibt es einen Isomorphismus $\phi : \Sigma(W, S) \to \Sigma \subseteq \Delta$ über S.

  (G_2) Sind $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{A}$ und $a, b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\Sigma_1 \to \Sigma_2$ über S, der a und b fixiert.

  (G_3) Sind $a, b \in \Delta$, so gibt es $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

Gebäude als Simplizialkomplexe

- **Definition:**
  Sei Δ Simplizialkomplex über S,
  $\mathcal{A}$ Menge von Unterkomplexen (Apartmentsystem).

  Δ heißt Gebäude vom Typ (W, S), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

  (G_1) Für alle $\Sigma \in \mathcal{A}$ (Apartment) gibt es einen Isomorphismus $\phi : \Sigma(W, S) \to \Sigma \subseteq \Delta$ über S.

  (G_2) Sind $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{A}$ und $a, b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\Sigma_1 \to \Sigma_2$ über S, der a und b fixiert.

  (G_3) Sind $a, b \in \Delta$, so gibt es $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

- Ein Gebäude vom Typ (W, S) hat die Dimension $\#S - 1$.

Gebäude als Simplizialkomplexe

- **Definition:**
  Sei Δ Simplizialkomplex über S,
  $\mathcal{A}$ Menge von Unterkomplexen (Apartmentsystem).

  Δ heißt Gebäude vom Typ (W, S), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

  (G_1) Für alle $\Sigma \in \mathcal{A}$ (Apartment) gibt es einen Isomorphismus $\phi : \Sigma(W, S) \to \Sigma \subseteq \Delta$ über S.

  (G_2) Sind $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{A}$ und $a, b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\Sigma_1 \to \Sigma_2$ über S, der a und b fixiert.

  (G_3) Sind $a, b \in \Delta$, so gibt es $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

- Ein Gebäude vom Typ (W, S) hat die Dimension $\#S - 1$.
- Coxeterkomplex $\Sigma(W, S)$ mit Apartmentsystem $\mathcal{A} = \{\Sigma(W, S)\}$ ist ein Gebäude.

Dünne Gebäude und Gebäude vom Typ $I_2(m)$

- **Erinnerung:** Coxetersystem $(W, S) \leftrightarrow$ Coxetermatrix M
  $\leftrightarrow$ Coxetergraph Γ.
- "Dünne" Gebäude vom Typ $\Gamma \leftrightarrow$ Coxeterkomplexe $\Sigma(W, S)$.

Dünne Gebäude und Gebäude vom Typ $I_2(m)$

- **Erinnerung:** Coxetersystem $(W, S) \leftrightarrow$ Coxetermatrix M
  $\leftrightarrow$ Coxetergraph Γ.
- "Dünne" Gebäude vom Typ $\Gamma \leftrightarrow$ Coxeterkomplexe $\Sigma(W, S)$.
- Gebäude vom Typ $\overset{m}{\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ} \leftrightarrow$ verallgemeinerte m-Ecke.
- "Dicke" Gebäude vom Typ $\overset{m}{\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ} \leftrightarrow$ dicke verallgemeinerte m-Ecke.

Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Erinnerung:** Coxetergraph $\tilde{A}_1$: $\circ\overset{\infty}{\text{———}}\circ \leftrightarrow (D_\infty, \{s, t\})$.
- Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1 \leftrightarrow$ Bäume ohne Blätter.

Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Erinnerung:** Coxetergraph $\tilde{A}_1$: $\circ\overset{\infty}{\text{——}}\circ \leftrightarrow (D_\infty, \{s, t\})$.
- Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1 \leftrightarrow$ Bäume ohne Blätter.
- **Beweis "$\leftarrow$":** Sei X ein Baum ohne Blätter.
  Setze: $\mathcal{A} = \{$ in beide Richtungen unendlich lange Wege $\}$.

Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Erinnerung:** Coxetergraph $\tilde{A}_1$: $\circ\overset{\infty}{\text{———}}\circ \leftrightarrow (D_\infty, \{s, t\})$.
- Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1 \leftrightarrow$ Bäume ohne Blätter.
- **Beweis "$\leftarrow$":** Sei X ein Baum ohne Blätter.
  Setze: $\mathcal{A} = \{$ in beide Richtungen unendlich lange Wege $\}$.
  Dann gelten (G_1)

  (G_1) Für alle $\Sigma \in \mathcal{A}$ gibt es einen Isomorphismus
  $\phi : \Sigma(W, S) \to \Sigma \subseteq \Delta$ über S.

Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Erinnerung:** Coxetergraph $\tilde{A}_1$: $\overset{\infty}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ} \leftrightarrow (D_\infty, \{s, t\})$.
- Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1 \leftrightarrow$ Bäume ohne Blätter.
- **Beweis "$\leftarrow$":** Sei X ein Baum ohne Blätter.
  Setze: $\mathcal{A} = \{$ in beide Richtungen unendlich lange Wege $\}$.
  Dann gelten (G_1), (G_2)

  (G_2) Sind $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{A}$ und $a, b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\Sigma_1 \to \Sigma_2$ über S, der a und b fixiert.

Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Erinnerung:** Coxetergraph $\tilde{A}_1$: $\overset{\infty}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ} \leftrightarrow (D_\infty, \{s, t\})$.
- Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1 \leftrightarrow$ Bäume ohne Blätter.
- **Beweis "$\leftarrow$":** Sei X ein Baum ohne Blätter.
  Setze: $\mathcal{A} = \{$ in beide Richtungen unendlich lange Wege $\}$.
  Dann gelten (G_1), (G_2) und (G_3).

  (G_3) Sind $a, b \in \Delta$, so gibt es $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Erinnerung:** Coxetergraph $\tilde{A}_1$: $\circ\overset{\infty}{\text{———}}\circ \leftrightarrow (D_\infty, \{s, t\})$.
- Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1 \leftrightarrow$ Bäume ohne Blätter.
- **Beweis "$\leftarrow$":** Sei X ein Baum ohne Blätter.
  Setze: $\mathcal{A} = \{$ in beide Richtungen unendlich lange Wege $\}$.
  Dann gelten (G_1), (G_2) und (G_3).

  Folglich ist X ein Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$.

Beweis der Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Beweis "$\rightarrow$":** Sei Δ ein Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$.

  Dann hat Δ Dimension 1 $\Rightarrow$ Δ ein kombinatorischer Graph.

Beweis der Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Beweis "$\rightarrow$":** Sei Δ ein Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$.

  Dann hat Δ Dimension 1 $\Rightarrow$ Δ ein kombinatorischer Graph.

  Wegen (G_3) ist der Graph zusammenhängend.

  (G_3) Sind $a, b \in \Delta$, so gibt es $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

Beweis der Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Beweis "$\rightarrow$":** Sei Δ ein Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$.

  Dann hat Δ Dimension 1 $\Rightarrow$ Δ ein kombinatorischer Graph.

  Wegen (G_3) ist der Graph zusammenhängend.

  Jede Ecke a hat mindestens zwei Nachbarn, da a im Coxeterkomplex zwei Nachbarn hat.

Beweis der Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Beweis "$\rightarrow$":** Sei Δ ein Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$.

  Dann hat Δ Dimension 1 $\Rightarrow$ Δ ein kombinatorischer Graph.

  Wegen (G_3) ist der Graph zusammenhängend.

  Jede Ecke a hat mindestens zwei Nachbarn, da a im Coxeterkomplex zwei Nachbarn hat.

  Gebäude ein Simplizialkomplex über $S = \{s_1, s_2\}$
  $\Rightarrow$ Δ ein bipartiter Graph. Kreise haben gerade Länge.

Beweis der Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Beweis "→":** Sei Δ ein Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$.

  Dann hat Δ Dimension $1 \Rightarrow \Delta$ ein kombinatorischer Graph.

  Wegen (G_3) ist der Graph zusammenhängend.

  Jede Ecke a hat mindestens zwei Nachbarn, da a im Coxeterkomplex zwei Nachbarn hat.

  Gebäude ein Simplizialkomplex über $S = \{s_1, s_2\}$
  $\Rightarrow \Delta$ ein bipartiter Graph. Kreise haben gerade Länge.

  Angenommen: Es existieren Kreise in Δ. Wähle Kreis mit minimaler Länge.
  Dann existieren für zwei gegenüberliegende Kanten c und c' zwei minimale Galerien.
  Dies führt zu einem Widerspruch, da reduzierte Worte in D_∞ eindeutig sind.

Beweis der Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Beweis "$\rightarrow$":** Sei Δ ein Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$.

  Dann hat Δ Dimension 1 $\Rightarrow$ Δ ein kombinatorischer Graph.

  Wegen (G_3) ist der Graph zusammenhängend.

  Jede Ecke a hat mindestens zwei Nachbarn, da a im Coxeterkomplex zwei Nachbarn hat.

  Gebäude ein Simplizialkomplex über $S = \{s_1, s_2\}$
  $\Rightarrow$ Δ ein bipartiter Graph. Kreise haben gerade Länge.

  Angenommen: Es existieren Kreise in Δ. Wähle Kreis mit minimaler Länge.
  Dann existieren für zwei gegenüberliegende Kanten c und c' zwei minimale Galerien.
  Dies führt zu einem Widerspruch, da reduzierte Worte in D_∞ eindeutig sind.

  Insgesamt ist Δ ein Baum ohne Blätter. $\square$

To-Do-List

- Gebäude (als Simplizialkomplexe)

  $\rightarrow$ Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ ✓

- Tits-Systeme

  $\rightarrow$ $SL_2(\mathbb{Q})$ besitzt Tits-System "vom Typ $\tilde{A}_1$"

  $\rightarrow$ Assoziation eines Gebäudes zum Tits-System

- Tits-Systeme "vom Typ $\tilde{A}_1$" sind Amalgame

  $\rightarrow$ Assoziation eines Baumes zum Amalgam

  $\rightarrow$ Vergleich: Gebäude vs. Baum

Tits-Systeme

- **Definition:** Ein 4-Tupel (G, B, N, S) aus

  einer Gruppe G,

  Untergruppen B und N und

  einer Teilmenge $S \subseteq N$

  heißt Tits-System mit Weyl-Gruppe W, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Tits-Systeme

- **Definition:** Ein 4-Tupel (G, B, N, S) aus
  einer Gruppe G,
  Untergruppen B und N und
  einer Teilmenge $S \subseteq N$
  heißt Tits-System mit Weyl-Gruppe W, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
  (T_1) $G = \langle B \cup N \rangle$,
  $T := B \cap N$ ist ein Normalteiler in N und
  $W := N/T$.

Tits-Systeme

- **Definition:** Ein 4-Tupel (G, B, N, S) aus
  einer Gruppe G,
  Untergruppen B und N und
  einer Teilmenge $S \subseteq N$

  heißt Tits-System mit Weyl-Gruppe W, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

  (T_1) $G = \langle B \cup N \rangle$,
  $T := B \cap N$ ist ein Normalteiler in N und
  $W := N/T$.

  (T_2) $S' = \{sT | s \in S\}$ erzeugt W und
  für alle $sT \in S'$ gilt: $ord_W(sT) = 2$.

Tits-Systeme

- **Definition:** Ein 4-Tupel (G, B, N, S) aus
  einer Gruppe G,
  Untergruppen B und N und
  einer Teilmenge $S \subseteq N$

  heißt Tits-System mit Weyl-Gruppe W, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

  (T_1) $G = \langle B \cup N \rangle$,
  $T := B \cap N$ ist ein Normalteiler in N und
  $W := N/T$.

  (T_2) $S' = \{sT | s \in S\}$ erzeugt W und
  für alle $sT \in S'$ gilt: $ord_W(sT) = 2$.

  (T_3) Für beliebige $s \in S$ und $w \in W$ gilt:

$$BsBwB \subseteq BwB \cup BswB$$

Tits-Systeme

- **Definition:** Ein 4-Tupel (G, B, N, S) aus
  einer Gruppe G,
  Untergruppen B und N und
  einer Teilmenge $S \subseteq N$

  heißt Tits-System mit Weyl-Gruppe W, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

  (T_1) $G = \langle B \cup N \rangle$,
  $T := B \cap N$ ist ein Normalteiler in N und
  $W := N/T$.

  (T_2) $S' = \{sT | s \in S\}$ erzeugt W und
  für alle $sT \in S'$ gilt: $ord_W(sT) = 2$.

  (T_3) Für beliebige $s \in S$ und $w \in W$ gilt:

  $$BsBwB \subseteq BwB \cup BswB$$

  (T_4) Für alle $s \in S$ gilt:

  $$sBs^{-1} \not\subseteq B.$$

Diskrete Bewertung am Beispiel $\mathbb{Q}$

- **Beispiel:** Sei $K = \mathbb{Q}$ mit Bewertung

  $\nu_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, q = 2^k \cdot \frac{a}{b} \mapsto k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, wobei 2 teilt nicht a, b.

  mit dem zugehörigen Bewertungsring

$$\mathcal{O}_2 = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, 2 \text{ teilt nicht } b \right\}.$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- **Beispiel:** Sei $K = \mathbb{Q}$ mit der Bewertung ν_2 und Bewertungsring $\mathcal{O}_2$ (wie zuvor). Weiter setzen wir:

  $G = SL_2(\mathbb{Q})$,

  $$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) | c \equiv 0 \, (mod \; 2) \right\},$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- **Beispiel:** Sei $K = \mathbb{Q}$ mit der Bewertung ν_2 und Bewertungsring $\mathcal{O}_2$ (wie zuvor). Weiter setzen wir:

  $G = SL_2(\mathbb{Q})$,

  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) | c \equiv 0 \, (mod\ 2) \right\}$,

  Definition: Für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\frac{a}{b} \equiv 0 \, (mod\, 2) :\Leftrightarrow a \equiv 0 \, (mod\, 2) \text{ und } ggT(b, 2) = 1.$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- **Beispiel:** Sei $K = \mathbb{Q}$ mit der Bewertung ν_2 und Bewertungsring $\mathcal{O}_2$ (wie zuvor). Weiter setzen wir:

  $G = SL_2(\mathbb{Q})$,

  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) | c \equiv 0 \,(mod\ 2) \right\}$,

  Definition: Für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gilt:

  $$\frac{a}{b} \equiv 0 \,(mod\, 2) :\Leftrightarrow a \equiv 0 \,(mod\, 2) \text{ und } ggT(b, 2) = 1.$$

  $N = \left\{ \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| q \in \mathbb{Q}^* \right\}$ und

  $S = \{s_1, s_2\}$ mit $s_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- B ist Untergruppe von G: $\mathbb{1}_2 \in B$,
  für Abgeschlossenheit unter Inversion und Multiplikation:
  $$p, q \in \mathbb{Q} \text{ und } p \equiv 0\,(mod\,2)\text{, dann gilt:}$$
  $$-p \equiv 0\,(mod\,2) \text{ und}$$
  $$p \cdot q \equiv 0\,(mod\,2).$$
- N ist Untergruppe von G: Matrizenrechnung.
- $B \cap N$ ist ein Normalteiler in N: Matrizenrechnung und...

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- ... $G = \langle B \cup N \rangle$:

  Bekannt: $G = SL_2(\mathbb{Q}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Q} \right\rangle$

  Es genügt also zu zeigen: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \in \langle B \cup N \rangle$.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- ... $G = \langle B \cup N \rangle$:

  Bekannt: $G = SL_2(\mathbb{Q}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Q} \right\rangle$

  Es genügt also zu zeigen: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \in \langle B \cup N \rangle$.

  Für $x, y \in \mathcal{O}_2$ gilt:

  $$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B \text{ und}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in N} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in N} \in \langle B \cup N \rangle.$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Für $x, y \in \mathbb{Q} - \mathcal{O}_2$:
  $x = 2^{-2k} \cdot x', y = 2^{-2l} \cdot y'$ mit $k, l \in \mathbb{N}$ und $x', y' \in \mathcal{O}_2$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Für $x, y \in \mathbb{Q} - \mathcal{O}_2$:
  $x = 2^{-2k} \cdot x', y = 2^{-2l} \cdot y'$ mit $k, l \in \mathbb{N}$ und $x', y' \in \mathcal{O}_2$

$$\begin{pmatrix} 2^{-k} & 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^{-l} & 0 \\ -1 & 2^l \end{pmatrix} \in \langle B \cup N \rangle.$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Für $x, y \in \mathbb{Q} - \mathcal{O}_2$:
  $x = 2^{-2k} \cdot x', y = 2^{-2l} \cdot y'$ mit $k, l \in \mathbb{N}$ und $x', y' \in \mathcal{O}_2$

  $$\begin{pmatrix} 2^{-k} & 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^{-l} & 0 \\ -1 & 2^l \end{pmatrix} \in \langle B \cup N \rangle.$$

  Durch Konjugation von:

  $$\begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} 2^{-k} & 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \text{ und}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y' & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} 2^{-l} & 0 \\ -1 & 2^l \end{pmatrix}$$

  $$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \in \langle B \cup N \rangle.$$

Details zur Rechnung

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- (T_2) Für alle $s \in S$ gilt $s^2 = -\mathbb{1}_2 \in T$, also $ord(sT) = 2$ und:

$$W = N/T = \langle s_1 T, s_2 T \rangle$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- (T_2) Für alle $s \in S$ gilt $s^2 = -\mathbb{1}_2 \in T$, also $ord(sT) = 2$ und:

$$W = N/T = \langle s_1 T, s_2 T \rangle$$

"$\supseteq$": klar,

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- (T_2) Für alle $s \in S$ gilt $s^2 = -\mathbb{1}_2 \in T$, also $ord(sT) = 2$ und:

$$W = N/T = \langle s_1 T, s_2 T \rangle$$

"$\supseteq$": klar,
"$\subseteq$": Sei $w \in W$ beliebig.
Dann gilt für $q, \tilde{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\nu_2(\tilde{q}) = 0$ und $l \in \mathbb{Z}$:

$$w = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} T = \underbrace{\begin{pmatrix} 2^l & 0 \\ 0 & 2^{-l} \end{pmatrix}}_{\in \langle s_1 T, s_2 T \rangle} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{q} & 0 \\ 0 & \tilde{q}^{-1} \end{pmatrix}}_{\in T} T$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- (T_2) Für alle $s \in S$ gilt $s^2 = -\mathbb{1}_2 \in T$, also $ord(sT) = 2$ und:

$$W = N/T = \langle s_1 T, s_2 T \rangle$$

"$\supseteq$": klar,
"$\subseteq$": Sei $w \in W$ beliebig.
Dann gilt für $q, \tilde{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\nu_2(\tilde{q}) = 0$ und $l \in \mathbb{Z}$:

$$w = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} T = \underbrace{\begin{pmatrix} 2^l & 0 \\ 0 & 2^{-l} \end{pmatrix}}_{\in \langle s_1 T, s_2 T \rangle} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{q} & 0 \\ 0 & \tilde{q}^{-1} \end{pmatrix}}_{\in T} T$$

oder:

$$w = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^{-1} & 0 \end{pmatrix} T = \underbrace{\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}}_{\in \langle s_1 T, s_2 T \rangle} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in s_1 T} T.$$

Details zur Rechnung

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- (T_3) Es gilt: $BsBwB \subseteq BwB \cup BswB$ für alle $s \in S, w \in W$.

  Da W von Involutionen erzeugt wird, gilt:

  $$w = (st)^l \text{ oder } w = (st)^l s$$
  $$\text{mit } l \in \mathbb{N} \text{ und } s \neq t, s, t \in \{s_1, s_2\}.$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- (T_3) Es gilt: $BsBwB \subseteq BwB \cup BswB$ für alle $s \in S, w \in W$.

  Da W von Involutionen erzeugt wird, gilt:

  $$w = (st)^l \text{ oder } w = (st)^l s$$
  $$\text{mit } l \in \mathbb{N} \text{ und } s \neq t, s, t \in \{s_1, s_2\}.$$

  Behauptung:
  Im Fall $l_W(sw) = l_W(w) + 1$ gilt: $BsBwB = BswB$.
  Im Fall $l_W(sw) = l_W(w) - 1$ gilt: $BsBwB = BwB$.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Exemplarisch betrachten wir: $s = s_2$ und $w = (s_1 s_2)^l$
- Wir bemerken:

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B \Rightarrow \nu_2(a) = \nu_2(d) = 0, \nu_2(b) \geq 0 \text{ und } \nu_2(c) \geq 1.$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Exemplarisch betrachten wir: $s = s_2$ und $w = (s_1 s_2)^l$
- Wir bemerken:

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B \Rightarrow \nu_2(a) = \nu_2(d) = 0, \nu_2(b) \geq 0 \text{ und } \nu_2(c) \geq 1.$$

Für $s\tilde{b}w \in sBw$ folgt:

$$\begin{aligned} s\tilde{b}w &= (\pm\mathbb{1})^l \begin{pmatrix} -2^{l-1}c & -2^{-l+1}d \\ 2^{l+1}a & 2^{-l+1}b \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \nu_2(-2^{l-1}c) \geq l, \nu_2(-2^{-l+1}d) = l+1, \\ & \nu_2(2^{-l+1}a) = -l+1 \text{ und } \nu_2(-2^{-l+1}b) \geq -l+1. \end{aligned}$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Damit können wir zeigen: Details zur Rechnung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 d^{-1} b & 1 \end{pmatrix} s\tilde{b}w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{2l-2} d^{-1} c & 1 \end{pmatrix} T}_{\subseteq Bs\tilde{b}wB} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2^{-l-1} \\ 2^{l+1} & 0 \end{pmatrix} T}_{\subseteq BswB}$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Damit können wir zeigen: Details zur Rechnung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 d^{-1} b & 1 \end{pmatrix} s\tilde{b}w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{2l-2} d^{-1} c & 1 \end{pmatrix} T}_{\subseteq Bs\tilde{b}wB} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2^{-l-1} \\ 2^{l+1} & 0 \end{pmatrix} T}_{\subseteq BswB}$$

$$Bs\tilde{b}wB \cap BswB \neq \emptyset$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Damit können wir zeigen: Details zur Rechnung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 d^{-1} b & 1 \end{pmatrix} s\tilde{b}w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{2l-2} d^{-1} c & 1 \end{pmatrix} T}_{\subseteq Bs\tilde{b}wB} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2^{-l-1} \\ 2^{l+1} & 0 \end{pmatrix} T}_{\subseteq BswB}$$

$$Bs\tilde{b}wB \cap BswB \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow Bs\tilde{b}wB = BswB$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Damit können wir zeigen: ▸ Details zur Rechnung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 d^{-1} b & 1 \end{pmatrix} s\tilde{b}w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{2l-2} d^{-1} c & 1 \end{pmatrix} T}_{\subseteq Bs\tilde{b}wB} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2^{-l-1} \\ 2^{l+1} & 0 \end{pmatrix} T}_{\subseteq BswB}$$

$$Bs\tilde{b}wB \cap BswB \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow Bs\tilde{b}wB = BswB$$

- Da $\tilde{b} \in B$ beliebig war, folgt: $BsBwB = BswB$
- Ähnlich können die anderen Fälle nachgerechnet werden.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- (T_4) Zu zeigen: $sBs^{-1} \not\subseteq B$ für alle $s \in S$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=s_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=s_1^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin B \text{ und}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=s_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2^{-1} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}_{=s_2^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -2^{-1} \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \notin B.$$

Also gilt für alle $s \in S$: $sBs^{-1} \not\subseteq B$.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Insgesamt folgt: (G, B, N, S) ist ein Tits-System.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Insgesamt folgt: (G, B, N, S) ist ein Tits-System.
- Wegen $s_1 s_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2^{-1} \end{pmatrix}$ folgt: $ord_W(s_1 T s_2 T) = \infty$

  $\Rightarrow W = < s_1 T, s_2 T \mid (s_1 T)^2, (s_2 T)^2 > \cong D_\infty$

  $\Rightarrow (W, S') \leftrightarrow (D_\infty, S') \leftrightarrow \tilde{A}_1$.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Insgesamt folgt: (G, B, N, S) ist ein Tits-System.
- Wegen $s_1 s_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2^{-1} \end{pmatrix}$ folgt: $ord_W(s_1 T s_2 T) = \infty$

  $\Rightarrow W = < s_1 T, s_2 T \mid (s_1 T)^2, (s_2 T)^2 > \cong D_\infty$

  $\Rightarrow (W, S') \leftrightarrow (D_\infty, S') \leftrightarrow \tilde{A}_1$.
- Genauer gilt also: (G, B, N, S) ist ein Tits-System mit Weyl-Gruppe vom Typ $\tilde{A}_1$.

  Kurz: (G, B, N, S) ist Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Insgesamt folgt: (G, B, N, S) ist ein Tits-System.
- Wegen $s_1 s_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2^{-1} \end{pmatrix}$ folgt: $ord_W(s_1 T s_2 T) = \infty$

  $\Rightarrow W = < s_1 T, s_2 T \mid (s_1 T)^2, (s_2 T)^2 > \cong D_\infty$

  $\Rightarrow (W, S') \leftrightarrow (D_\infty, S') \leftrightarrow \tilde{A}_1$.
- Genauer gilt also: (G, B, N, S) ist ein Tits-System mit Weyl-Gruppe vom Typ $\tilde{A}_1$.

  Kurz: (G, B, N, S) ist Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$.
- Allgemeiner: Wähle beliebigen Körper K mit diskreter Bewertung ν, zum Beispiel $\mathbb{Q}_2$.

To-Do-List

- Gebäude (als Simplizialkomplexe)

  $\rightarrow$ Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ ✓
- Tits-Systeme

  $\rightarrow$ $SL_2(\mathbb{Q})$ besitzt Tits-System "vom Typ $\tilde{A}_1$" ✓

  $\rightarrow$ Assoziation eines Gebäudes zum Tits-System
- Tits-Systeme "vom Typ $\tilde{A}_1$" sind Amalgame

  $\rightarrow$ Assoziation eines Baumes zum Amalgam

  $\rightarrow$ Vergleich: Gebäude vs. Baum

Eigenschaften von Tits-Systemen

- **Konvention:** Sei (G, B, N, S) im Weiteren stets ein Tits-System mit Weyl-Gruppe $W = N/T$.
  Dann gelten die folgenden Eigenschaften:
- **Satz:** $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ ("Bruhat-Zerlegung").

Eigenschaften von Tits-Systemen

- **Konvention:** Sei (G, B, N, S) im Weiteren stets ein Tits-System mit Weyl-Gruppe $W = N/T$.
  Dann gelten die folgenden Eigenschaften:
- **Satz:** $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ ("Bruhat-Zerlegung").
- **Beweisidee:** Zeige: $\bigcup_{w \in W} BwB \subseteq G$ Untergruppe, die B und N enthält. Damit folgt: $G = \bigcup_{w \in W} BwB$.

Eigenschaften von Tits-Systemen

- **Konvention:** Sei (G, B, N, S) im Weiteren stets ein Tits-System mit Weyl-Gruppe $W = N/T$.
  Dann gelten die folgenden Eigenschaften:
- **Satz:** $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ ("Bruhat-Zerlegung").
- **Beweisidee:** Zeige: $\bigcup_{w \in W} BwB \subseteq G$ Untergruppe, die B und N enthält. Damit folgt: $G = \bigcup_{w \in W} BwB$.
  Weiter ist $W \to \bigcup_{w \in W} BwB, u \mapsto BuB$ ist injektiv.
  (z.B. Gebäude-Vorlesung, Varghese, Kap. 4, Lemma (A))
  Also: $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$.

Untergruppen in Tits-Systemen

- **Definition:** Sei $R \subseteq S$ eine Teilmenge. Dann ist:

$$W_R := \langle R \rangle \subseteq W.$$
$$P_R := BW_RB = \bigsqcup_{w \in W_R} BwB. \subseteq G$$

P_R heißt Standard-parabolische Untergruppe vom Typ R.

Assoziation eines Gebäudes zu einem Tits-System

- **Theorem:**
  Sei (G, B, N, S) ein Tits-System mit Weyl-Gruppe (W, S'). Dann existiert ein "dickes" Gebäude $\Delta(G, B, N, S)$ vom Typ (W, S') auf dem G "stark transitiv" wirkt.

Beweisidee: Assoziation eines Gebäudes zu einem Tits-System

Setze:

$$\Delta := \Delta(G, B, N, S) = \bigsqcup_{T \subseteq S'} G/P_T$$

$$\text{mit } gP_T \leq g'P_{T'} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} gP_T \supseteq g'P_{T'}$$

Mit $t(gP_T) := S' - T$ ist Δ ein Simplizialkomplex über S'.

Beweisidee: Assoziation eines Gebäudes zu einem Tits-System

Setze:

$$\Delta := \Delta(G, B, N, S) = \bigsqcup_{T \subseteq S'} G/P_T$$

$$\text{mit } gP_T \leq g'P_{T'} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} gP_T \supseteq g'P_{T'}$$

Mit $t(gP_T) := S' - T$ ist Δ ein Simplizialkomplex über S'.

Die Abbildung

$$\varphi : \Sigma(W, S') \to \Delta, wW_T \mapsto wP_T$$

ist wohldefiniert, injektiv(!) und simplizial.

Beweisidee: Assoziation eines Gebäudes zu einem Tits-System

Setze:

$$\Delta := \Delta(G, B, N, S) = \bigsqcup_{T \subseteq S'} G/P_T$$

$$\text{mit } gP_T \leq g'P_{T'} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} gP_T \supseteq g'P_{T'}$$

Mit $t(gP_T) := S' - T$ ist Δ ein Simplizialkomplex über S'.

Die Abbildung

$$\varphi : \Sigma(W, S') \to \Delta, wW_T \mapsto wP_T$$

ist wohldefiniert, injektiv(!) und simplizial.

$\Sigma_0 := \varphi(\Sigma(W, S')) \subseteq \Delta \Rightarrow \Sigma_0 \cong \Sigma(W, S')$.

G-Wirkung auf Δ: durch Linksmultiplikation.

Assoziation eines Gebäudes zum Tits-System

- Man kann zeigen: Δ ist Gebäude vom Typ (W, S') mit Apartmentsystem $\mathcal{A} := \{g(\Sigma_0) | g \in G\}$.
- Später: genauere Betrachtung im Beispiel $G = SL_2(\mathbb{Q})$.
- Unterschied: $SL_2(\mathbb{Q})$ Apartmentsystem abzählbar, $SL_2(\mathbb{Q}_2)$ Apartmentsystem überabzählbar.

Untergruppen in Tits-Systemen

- **Lemma:** Die Abbildung
  $$\mathcal{P}(S) \to \{H \subseteq G | H \subseteq G \text{ Untergruppe und } B \subseteq H\},$$
  $$R \mapsto P_R$$
  ist eine Bijektion.

Untergruppen in Tits-Systemen

- **Lemma:** Die Abbildung

  $$\mathcal{P}(S) \to \{H \subseteq G | H \subseteq G \text{ Untergruppe und } B \subseteq H\},$$
  $$R \mapsto P_R$$

  ist eine Bijektion.
- **Beweisidee:**
  Injektivität: folgt mit disjunkter Bruhat-Zerlegung.
  Surjektivität: H Untergruppe mit $B \subseteq H$, dann gilt:

  $$R := S \cap H \mapsto P_R = H.$$

  (z.B. Gebäude-Vorlesung, Kramer, Kap. 4, Satz 15)

To-Do-List

- Gebäude (als Simplizialkomplexe)

  $\rightarrow$ Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ ✓

- Tits-Systeme

  $\rightarrow$ $SL_2(\mathbb{Q})$ besitzt Tits-System "vom Typ $\tilde{A}_1$" ✓

  $\rightarrow$ Assoziation eines Gebäudes zum Tits-System ✓

- Tits-Systeme "vom Typ $\tilde{A}_1$" sind Amalgame

  $\rightarrow$ Assoziation eines Baumes zum Amalgam

  $\rightarrow$ Vergleich: Gebäude vs. Baum

Gruppen mit Tits-System und Amalgame

Algebra		Geometrie
Gruppe mit Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$	$\overset{\text{Wirkung}}{\curvearrowright}$	$\underbrace{\text{Gebäude vom Typ } \tilde{A}_1}_{\text{Bäume ohne Blätter}}$
Amalgam	$\overset{\text{Wirkung}}{\curvearrowright}$	Baum

To-Do-List

- Gebäude (als Simplizialkomplexe)

  $\rightarrow$ Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ ✓
- Tits-Systeme

  $\rightarrow$ $SL_2(\mathbb{Q})$ besitzt Tits-System "vom Typ $\tilde{A}_1$" ✓

  $\rightarrow$ Assoziation eines Gebäudes zum Tits-System ✓
- Tits-Systeme "vom Typ $\tilde{A}_1$" sind Amalgame

  $\rightsquigarrow$ algebraischer Beweis!!!

  $\rightarrow$ Assoziation eines Baumes zum Amalgam

  $\rightarrow$ Vergleich: Gebäude vs. Baum

Tits-Systeme vom Typ $\tilde{A}_1$

- Sei (G, B, N, S) ein Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$.
- **Notation:** In dieser Situation ist $S = \{s_1, s_2\}$ und wir schreiben:

$$P_1 := P_{\{s_1\}} = B \cup Bs_1B \text{ und}$$

$$P_2 := P_{\{s_2\}} = B \cup Bs_2B.$$

Strukturtheorem zum Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Theorem:** Sei (G, B, N, S) ein Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$.
  Dann ist G ein Amalgam der Form:

  $$G \cong P_1 *_B P_2,$$

  wobei P_1, P_2 die Standard-parabolischen Untergruppen in G.

Strukturtheorem zum Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

- **Theorem:** Sei (G, B, N, S) ein Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$. Dann ist G ein Amalgam der Form:

  $$G \cong P_1 *_B P_2,$$

  wobei P_1, P_2 die Standard-parabolischen Untergruppen in G.
- **Beweisstrategie:**
  Definieren durch Inklusionen $P_1 \hookrightarrow G, P_2 \hookrightarrow G$ induzierten Homomorphismus

  $$\varphi : P_1 *_B P_2 \to G.$$

  Surjektivität: Zeigen: $\langle P_1, P_2 \rangle = G$.

  Injektivität: Zeigen: $\ker(\varphi)$ trivial. ▸ Normalform ▸ Beweis

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- **Erinnerung:**
  $G = SL_2(\mathbb{Q})$,
  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) | c \equiv 0 \; (mod \; 2) \right\}$ und
  $S = \{s_1, s_2\}$ mit $s_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- **Erinnerung:**
  $G = SL_2(\mathbb{Q})$,
  $$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) | c \equiv 0 \ (mod\ 2) \right\} \text{ und}$$
  $$S = \{s_1, s_2\} \text{ mit } s_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Dann gilt: $P_1 = B \cup Bs_1B = SL_2(\mathcal{O}_2)$,
  $$\begin{aligned} P_2 &= B \cup Bs_2B \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1}b \\ 2c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) \right\}. \end{aligned}$$

  ▸ Details Rechnung
- Damit folgt:
  $$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Q}) = G &\overset{\text{Thm.}}{\cong} P_1 *_B P_2 \\ &= SL_2(\mathcal{O}_2) *_B \left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1}b \\ 2c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) \right\}. \end{aligned}$$

To-Do-List

- Gebäude (als Simplizialkomplexe)

  $\rightarrow$ Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ $\checkmark$

- Tits-Systeme

  $\rightarrow$ $SL_2(\mathbb{Q})$ besitzt Tits-System "vom Typ $\tilde{A}_1$" $\checkmark$

  $\rightarrow$ Assoziation eines Gebäudes zum Tits-System $\checkmark$

- Tits-Systeme "vom Typ $\tilde{A}_1$" sind Amalgame $\checkmark$

  $\rightarrow$ Assoziation eines Baumes zum Amalgam

  $\rightarrow$ Vergleich: Gebäude vs. Baum

Charakterisierung von Amalgamen über Gruppenwirkungen

- **Erinnerung:** Sei G eine Gruppe, die ohne Inversion auf einem <u>orientierten</u> Graphen X wirkt.

Charakterisierung von Amalgamen über Gruppenwirkungen

- **Erinnerung:** Sei G eine Gruppe, die ohne Inversion auf einem <u>orientierten</u> Graphen X wirkt.

  <u>Quotientengraph</u> $G\backslash X$:

  Graph der Äquivalenzklassen der Bahnen der Ecken und Kanten des Graphen X unter der Wirkung von G.

Charakterisierung von Amalgamen über Gruppenwirkungen

- **Erinnerung:** Sei G eine Gruppe, die ohne Inversion auf einem orientierten Graphen X wirkt.

  Quotientengraph $G \backslash X$:

  Graph der Äquivalenzklassen der Bahnen der Ecken und Kanten des Graphen X unter der Wirkung von G.

  G wirkt ohne Inversion
  $\Rightarrow$ Quotientengraph erhält Orientierung des Graphen X.

  Teilgraph $T \subseteq X$ Fundamentalbereich
  $:\Leftrightarrow$ T isomorph zum Quotientengraphen $G \backslash X$ ist.

Charakterisierung von Amalgamen über Gruppenwirkungen

- **Erinnerung:** Sei G eine Gruppe, die ohne Inversion auf einem orientierten Graphen X wirkt.

  Quotientengraph $G\backslash X$:

  Graph der Äquivalenzklassen der Bahnen der Ecken und Kanten des Graphen X unter der Wirkung von G.

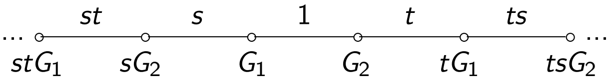
  G wirkt ohne Inversion
  $\Rightarrow$ Quotientengraph erhält Orientierung des Graphen X.

  Teilgraph $T \subseteq X$ Fundamentalbereich
  $:\Leftrightarrow$ T isomorph zum Quotientengraphen $G\backslash X$ ist.

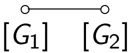
- **Theorem:** Die Gruppe G ist ein Amalgam $G_1 *_A G_2$
  $\Leftrightarrow$ G wirkt ohne Inversion
  mit einem Segment T als Fundamentalbereich
  auf einem Baum X.

Ein einfaches Beispiel

- Sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} *_{\{1\}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = G_1 *_{\{1\}} G_2$ mit $G_1 = \langle s \rangle$, $G_2 = \langle t \rangle$.
- G wirkt ohne Inversion auf dem Baum:



- Der Quotientengraph der Wirkung ist:



- Jedes Segment in X ist also ein Fundamentalbereich.

Beweisidee des Theorems über Amalgame und Bäume

- Zum Amalgam $G = G_1 *_B G_2$ konstruiere Graphen mittels:

  Ecken: $\quad vert(X) = G/G_1 \,\dot{\cup}\, G/G_2,$
  Kanten: $\; edge(X) = G/B \,\dot{\cup}\, \overline{G/B},$

  wobei $\overline{G/B}$ formale Kopie von G/B (orientierte Kanten).

Beweisidee des Theorems über Amalgame und Bäume

- Zum Amalgam $G = G_1 *_B G_2$ konstruiere Graphen mittels:

  Ecken: $\quad vert(X) = G/G_1 \,\dot\cup\, G/G_2$,
  Kanten: $edge(X) = G/B \,\dot\cup\, \overline{G/B}$,

  wobei $\overline{G/B}$ formale Kopie von G/B (orientierte Kanten).

- Anfangs- und Endpunktabbildung:

$$(*_0 \times *_1) : G/B \to G/G_1 \times G/G_2, gB \mapsto (gG_1, gG_2).$$

Beweisidee des Theorems über Amalgame und Bäume

- Zum Amalgam $G = G_1 *_B G_2$ konstruiere Graphen mittels:

  $$\begin{array}{ll} \text{Ecken:} & vert(X) = G/G_1 \dot\cup G/G_2, \\ \text{Kanten:} & edge(X) = G/B \dot\cup \overline{G/B}, \end{array}$$

  wobei $\overline{G/B}$ formale Kopie von G/B (orientierte Kanten).
- Anfangs- und Endpunktabbildung:

  $$(*_0 \times *_1) : G/B \to G/G_1 \times G/G_2, gB \mapsto (gG_1, gG_2).$$

- $G-$Wirkung auf dem Graphen X: durch Linksmultiplikation.

  Bahnen bezüglich dieser Wirkung:

  $$[G_1], [G_2], [B] \text{ und } [\overline{B}].$$

  Folglich ist der Fundamentalbereich ein Segment.

Beweisidee des Theorems über Amalgame und Bäume

Man kann zeigen: Der konstruierte Graph ist ein Baum.

Beweisidee: G wirkt auf Graph X mit Fundamentalbereich in Form eines Segments:
X ein Baum $\Leftrightarrow G_1 *_B G_2 \to G$ von Inklusionen induzierter Homomorphismus ein <u>Iso</u>morphismus.

To-Do-List

- Gebäude (als Simplizialkomplexe)

  $\rightarrow$ Charakterisierung der Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ ✓

- Tits-Systeme

  $\rightarrow$ $SL_2(\mathbb{Q})$ besitzt Tits-System "vom Typ $\tilde{A}_1$" ✓

  $\rightarrow$ Assoziation eines Gebäudes zum Tits-System ✓

- Tits-Systeme "vom Typ $\tilde{A}_1$" sind Amalgame ✓

  $\rightarrow$ Assoziation eines Baumes zum Amalgam ✓

  $\rightarrow$ Vergleich: Gebäude vs. Baum

Vergleich: Baum zum Amalgam und Gebäude zum Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

- Baum zum Amalgam $G = P_1 *_B P_2$:
  Ecken: $vert(X) = G/P_1 \dot\cup G/P_2$,
  Kanten: $edge(X) = G/B \dot\cup \overline{G/B}$.
- $gB \leftrightarrow (gP_1, gP_2)$, $\overline{gB} \leftrightarrow (gP_2, gP_1)$.
- G-Wirkung auf Baum X: durch Linksmultiplikation.

Vergleich: Baum zum Amalgam und Gebäude zum Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

- Baum zum Amalgam $G = P_1 *_B P_2$:
  Ecken: $\mathit{vert}(X) = G/P_1 \dot{\cup} G/P_2$,
  Kanten: $\mathit{edge}(X) = G/B \dot{\cup} \overline{G/B}$.
- $gB \leftrightarrow (gP_1, gP_2)$, $\overline{gB} \leftrightarrow (gP_2, gP_1)$.
- G-Wirkung auf Baum X: durch Linksmultiplikation.
- Gebäude zum Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$:

$$\Delta = \bigsqcup_{T \subseteq S} G/P_T$$
$$= \underbrace{G/P_1 \dot{\cup} G/P_2}_{\text{Ecken geom. Realisierung}} \quad \dot{\cup} \quad \underbrace{G/B}_{\text{Kanten der geom. Realisierung}},$$

mit partieller Ordnung: $gG_T \leq g'G_{T'} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} gG_T \supseteq g'G_{T'}$.

Vergleich Baum zum Amalgam und Gebäude zum Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& g''B \leftrightarrow (gP_1, g'P_2) \\
\Leftrightarrow\ & (*_0 \times *_1)(g''B) \overset{\text{Def.}}{=} (g''P_1, g''P_2) = (gP_1, g'P_2) \\
\Leftrightarrow\ & g^{-1}g'' \in P_1 \text{ und } g'^{-1}g'' \in P_2 \\
\Leftrightarrow\ & g^{-1}g''B \subseteq P_1 \text{ und } g'^{-1}g''B \subseteq P_2 \\
\Leftrightarrow\ & g''B \subseteq gP_1 \text{ und } g''B \subseteq g'P_2 \\
\Leftrightarrow\ & gP_1 \leq g''B \geq g'P_2.
\end{aligned}$$

Folglich stimmen die geometrischen Realisierungen des Baumes und des Gebäudes überein.

Der Baum / das Gebäude im Beispiel $G = SL_2(\mathbb{Q})$

- **Ausblick:** Der von uns konstruierte Baum stimmt im Beispiel $G = SL_2(\mathbb{Q})$ mit dem von Daniel konstruierten Baum überein.

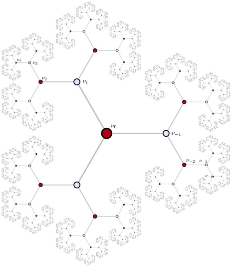
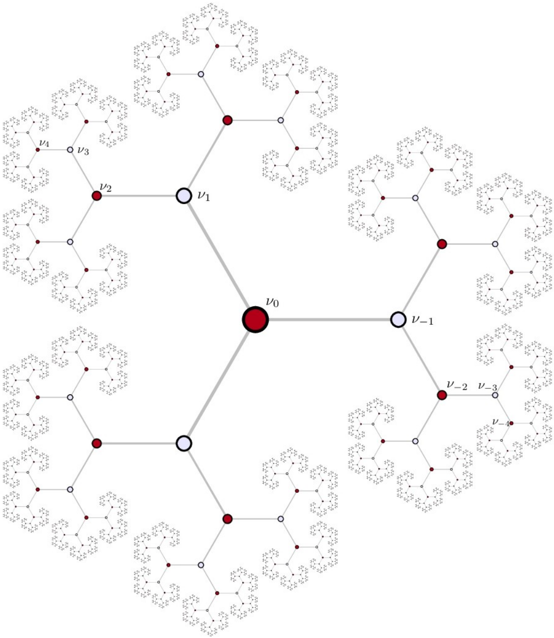


Figure: Der Bruhat-Tits-Baum,
https://www.math.ubc.ca/ cass/research/pdf/Tree.pdf

- Dafür genügt es zu zeigen: Jede Ecke hat Valenz drei.
- Dieser Baum heißt der Bruhat-Tits-Baum.

Der Bruhat-Tits-Baum



Zusammenfassung

- Gebäude sind Simplizialkomplexe mit vielen "schönen" Unterkomplexen.
  Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ sind genau die Bäume ohne Blätter.
- Die Gruppe $SL_2(\mathbb{Q})$ besitzt ein Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$.
- Zu jeder Gruppe G mit Tits-System finden wir ein Gebäude, auf dem die Gruppe G "schön" wirkt.
  Insbesondere erhalten wir zur Gruppe $SL_2(\mathbb{Q})$ einen Baum ohne Blätter.
- Die Gruppe $SL_2(\mathbb{Q})$ ist ein Amalgam.
  Zu diesem Amalgam erhalten wir einen Baum.
  In diesem Baum hat jede Ecke Valenz 3.
  $\rightsquigarrow$ Bruhat-Tits-Baum.

Amalgame

- **Definition:** Seien G_1, G_2 und A Gruppen mit Monomorphismen $\alpha_i : A \hookrightarrow G_i$.
  Eine Gruppe G heißt <u>Amalgam</u> der Gruppen G_i über A, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
A \arrow[ur, hook, "\alpha_1"] \arrow[dr, hook, "\alpha_2"'] & & G \\
 & G_2 \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

- Mit den obigen Bezeichnungen ist das Amalgam G bis auf Isomorphie eindeutig.
- **Notation:** $G = G_1 *_A G_2$.

Die Normalform von Amalgamen

- Identifiziere $A \cong \alpha_i(A) \subseteq G_i$ als Untergruppe.
- **Konstruktion:** Betrachte Rechtsnebenklassen $A \backslash G_i$.

  Wähle Repräsentantensystem S_i, in dem die Nebenklasse A durch 1 repräsentiert wird.

Die Normalform von Amalgamen

- Identifiziere $A \cong \alpha_i(A) \subseteq G_i$ als Untergruppe.
- **Konstruktion:** Betrachte Rechtsnebenklassen $A \backslash G_i$.

  Wähle Repräsentantensystem S_i, in dem die Nebenklasse A durch 1 repräsentiert wird.

  Dann ist die folgende Abbildung λ eine Bijektion:

  $$\lambda : A \times (S_i - \{1\}) \to G_i - A, (a, s) \mapsto a \cdot s.$$

  <u>reduziertes Wort</u> w im Amalgam $G_1 *_A G_2 \hat{=}$

  $$w = (a, s_1, ..., s_n) \text{ mit } a \in A, s_k \in S_{i_k} - \{1\}$$
  $$\text{für } (i_1, ..., i_n) \in \{1, 2\}^n \text{ mit } i_k \neq i_{k+1}.$$

Die Normalform von Amalgamen

- Identifiziere $A \cong \alpha_i(A) \subseteq G_i$ als Untergruppe.
- **Konstruktion:** Betrachte Rechtsnebenklassen $A \backslash G_i$.

  Wähle Repräsentantensystem S_i, in dem die Nebenklasse A durch 1 repräsentiert wird.

  Dann ist die folgende Abbildung λ eine Bijektion:

  $$\lambda : A \times (S_i - \{1\}) \to G_i - A, (a, s) \mapsto a \cdot s.$$

  <u>reduziertes Wort</u> w im Amalgam $G_1 *_A G_2 \hat{=}$

  $$w = (a, s_1, ..., s_n) \text{ mit } a \in A, s_k \in S_{i_k} - \{1\}$$
  $$\text{für } (i_1, ..., i_n) \in \{1, 2\}^n \text{ mit } i_k \neq i_{k+1}.$$

  Für alle $g \in G_1 *_A G_2$ existiert genau eine Darstellung:

  $$g = f_A(a) f_{i_1}(s_1) ... f_{i_n}(s_n) = a s_1 ... s_n.$$

  mit $n \geq 0$ als Bild eines reduzierten Wortes.

  Diese Darstellung heißt <u>Normalform</u> des Elements g.

Eigenschaften von Amalgamen

Beobachtungen:

- Die Faktoren G_i sind mittels der Identifikation $f_i(G_i) = G_i$ im Amalgam $G_1 *_A G_2$ enthalten (Normalform).

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
A \arrow[ur, hook, "\alpha_1"] \arrow[rr, "f_A"] \arrow[dr, hook, "\alpha_2"'] & & G \\
 & G_2 \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

▸ zurück zum Beweis ▸ zurück zum Strukturtheorem

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

$$\begin{pmatrix} 2^{-k} & -1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}}_{\in N} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \in \langle B \cup N \rangle,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2^{-k} & -1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}}_{\in \langle B \cup N \rangle} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2^k & 1 \\ 0 & 2^{-k} \end{pmatrix}}_{\in \langle B \cup N \rangle} \in \langle B \cup N \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 2^{-l} & 0 \\ -1 & 2^l \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^l & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2^{-l} & 0 \\ 0 & 2^l \end{pmatrix}}_{\in N} \in \langle B \cup N \rangle,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2^l & 0 \\ 1 & 2^{-l} \end{pmatrix}}_{\in \langle B \cup N \rangle} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y' & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2^{-l} & 0 \\ -1 & 2^l \end{pmatrix}}_{\in \langle B \cup N \rangle} \in \langle B \cup N \rangle.$$

zurück zum Beispiel des Tits-Systems

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

$$W = N/T \overset{!}{=} \langle s_1 T, s_2 T \rangle \text{ mit } s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zerlege:

$$\begin{aligned} q &= 2^l \tilde{q} \text{ mit } l \in \mathbb{Z}, \nu_2(\tilde{q}) = 0 \text{ und} \\ q^{-1} &= 2^{-l} \tilde{q}^{-1} \text{ mit } \nu_2(\tilde{q}^{-1}) = 0. \end{aligned}$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

$$W = N/T \overset{!}{=} \langle s_1 T, s_2 T \rangle \text{ mit } s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zerlege:

$$\begin{aligned} q &= 2^l \tilde{q} \text{ mit } l \in \mathbb{Z}, \nu_2(\tilde{q}) = 0 \text{ und} \\ q^{-1} &= 2^{-l} \tilde{q}^{-1} \text{ mit } \nu_2(\tilde{q}^{-1}) = 0. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $\begin{pmatrix} 2^l & 0 \\ 0 & 2^{-l} \end{pmatrix} \in \langle s_1 T, s_2 T \rangle$.

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

$$W = N/T \overset{!}{=} \langle s_1 T, s_2 T \rangle \text{ mit } s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zerlege:

$$q = 2^l \tilde{q} \text{ mit } l \in \mathbb{Z}, \nu_2(\tilde{q}) = 0 \text{ und}$$
$$q^{-1} = 2^{-l} \tilde{q}^{-1} \text{ mit } \nu_2(\tilde{q}^{-1}) = 0.$$

Es bleibt zu zeigen: $\begin{pmatrix} 2^l & 0 \\ 0 & 2^{-l} \end{pmatrix} \in \langle s_1 T, s_2 T \rangle$.

Aber es gilt:

$$\begin{pmatrix} 2^l & 0 \\ 0 & 2^{-l} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)^l (\pm \mathbb{1}_2) = (s_1 s_2)^l \underbrace{(\pm \mathbb{1}_2)}_{\in T}.$$

Damit folgt die Behauptung. ▸ zurück zum Beispiel des Tits-Systems

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Wegen $\nu_2(d) = 0, \nu_2(b) \geq 0$ und $\nu_2(c) \geq 1$ gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 d^{-1} b & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} s\tilde{b}w = \pm \begin{pmatrix} -2^{l-1}c & -2^{-l-1}d \\ -2^{l+1}(cd^{-1}b - a) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 d^{-1} b & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} s\tilde{b}w \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{2l-2} d^{-1} c & 1 \end{pmatrix}}_{\in B}$$

$$= \pm \begin{pmatrix} 0 & -2^{-l-1}d \\ -2^{l+1}(cd^{-1}b - a) & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel einer Gruppe mit Tits-System

- Damit können wir folgern:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 d^{-1} b & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} s\tilde{b}w \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{2l-2} d^{-1} c & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} T$$

$$= \pm \begin{pmatrix} 0 & -2^{-l-1} d \\ -2^{l+1}(cd^{-1}b - a) & 0 \end{pmatrix} T$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2^{-l-1} \\ 2^{l+1} & 0 \end{pmatrix} T}_{= s_2 (s_1 s_2)^l T = sw} .$$

zurück zum Beispiel des Tits-Systems

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

Wir definieren zunächst den Homomorphismus:

$$\varphi : P_1 *_B P_2 \to G, \text{ mittels } P_i \hookrightarrow G.$$

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

Wir definieren zunächst den Homomorphismus:

$$\varphi : P_1 *_B P_2 \to G, \text{ mittels } P_i \hookrightarrow G.$$

- Zur Surjektivität: Da φ von den Inklusionen induziert wird, gilt:

  $$P_1, P_2 \subseteq Im(\varphi) \subseteq G \text{ Untergruppe } \to \langle P_1, P_2 \rangle \subseteq Im(\varphi).$$

  Sei $G' =< P_1, P_2 >\subseteq G$ eine Untergruppe. Es gilt $B \subseteq P_1$, also auch $B \subseteq G'$.

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

Wir definieren zunächst den Homomorphismus:

$$\varphi : P_1 *_B P_2 \to G, \text{ mittels } P_i \hookrightarrow G.$$

- Zur Surjektivität: Da φ von den Inklusionen induziert wird, gilt:

  $$P_1, P_2 \subseteq Im(\varphi) \subseteq G \text{ Untergruppe } \to \langle P_1, P_2 \rangle \subseteq Im(\varphi).$$

  Sei $G' =< P_1, P_2 >\subseteq G$ eine Untergruppe. Es gilt $B \subseteq P_1$, also auch $B \subseteq G'$.
  Wegen

  $$\mathcal{P}(S) \overset{\cong}{\to} \{G \subseteq W | G \text{ Untergruppe mit } B \subseteq G\}, R \mapsto P_R$$

  folgt $G' = P_T$ für eine Teilmenge $T \subseteq S$.

Beweis Strukturthorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

- Angenommen, $T \subsetneq S$, dann gilt $G' = P_T = P_i$ oder $G' = P_\emptyset = B$.

  Andererseits gilt $s_1, s_2 \in G' = P_T$, Widerspruch, da P_i nach der Bruhat-Zerlegung nur ein s_i (bzw. B kein $s \in S$) enthält.

  Folglich gilt: $G' = P_S = G$, also: $G = G' \subseteq Im(\varphi)$, d.h. φ ist surjektiv.

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

- Zur Injektivität: Wir zeigen: $\tilde{g} \in ker(\varphi) \Rightarrow \tilde{g} = 1$.
  Sei $\tilde{g} = bp_1 ... p_n$ mit $b \in B, p_j \in P_{i_j} - B$ und $i_j \neq i_{j+1}$.
  ▸ Normalform.

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

- Zur Injektivität: Wir zeigen: $\tilde{g} \in ker(\varphi) \Rightarrow \tilde{g} = 1$.
  Sei $\tilde{g} = bp_1...p_n$ mit $b \in B, p_j \in P_{i_j} - B$ und $i_j \neq i_{j+1}$.
  Normalform.
  Falls $n = 0$ gilt, so ist $\tilde{g} \in B$ und $\varphi|_B$ ist injektiv. Also folgt $\tilde{g} = 1$.

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

- Zur Injektivität: Wir zeigen: $\tilde{g} \in ker(\varphi) \Rightarrow \tilde{g} = 1$.
  Sei $\tilde{g} = bp_1 ... p_n$ mit $b \in B, p_j \in P_{i_j} - B$ und $i_j \neq i_{j+1}$.
  Normalform.
  Falls $n = 0$ gilt, so ist $\tilde{g} \in B$ und $\varphi|_B$ ist injektiv. Also folgt $\tilde{g} = 1$.

  Für $n \geq 1$ ist $w := s_{i_1} ... s_{i_n} \in W = D_\infty$ mit $s_{i_j} \neq s_{i_{j+1}}$ aus S gilt:

$$l(w) = n \geq 1 \text{ , also } w \neq 1.$$

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

Andererseits folgt mit der Bruhat-Zerlegung: $P_{i_j} - B = Bs_{i_j}B$.
Für die Normalform gilt also:

$$\tilde{g} = bp_1...p_n \in Bs_{i_1}B...Bs_{i_n}B \stackrel{!}{=} Bs_{i_1}...s_{i_n}B = BwB.$$

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

Andererseits folgt mit der Bruhat-Zerlegung: $P_{i_j} - B = Bs_{i_j}B$.
Für die Normalform gilt also:

$$\tilde{g} = bp_1 ... p_n \in Bs_{i_1}B ... Bs_{i_n}B \stackrel{!}{=} Bs_{i_1} ... s_{i_n}B = BwB.$$

Da φ von den Inklusionen induziert wird, folgt:

$$\varphi(\tilde{g}) = g \in B \underbrace{w}_{\neq 1} B.$$

Beweis Strukturtheorem Tits-System vom Typ $\tilde{A}_1$

Andererseits folgt mit der Bruhat-Zerlegung: $P_{i_j} - B = Bs_{i_j}B$.
Für die Normalform gilt also:

$$\tilde{g} = bp_1 ... p_n \in Bs_{i_1}B ... Bs_{i_n}B \overset{!}{=} Bs_{i_1} ... s_{i_n}B = BwB.$$

Da φ von den Inklusionen induziert wird, folgt:

$$\varphi(\tilde{g}) = g \in B \underbrace{w}_{\neq 1} B.$$

Mit der Bruhat-Zerlegung folgt $g \notin B$. Also $g \neq 1_G$, Widerspruch zu $\tilde{g} \in ker(\varphi)$.
Damit folgt die Injektivität.
Insgesamt ist φ ein Gruppenisomorphismus. $\square$ zurück zum Vortrag

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- Zeige: $P_1 = B \cup Bs_1B = SL_2(\mathcal{O}_2)$.

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- Zeige: $P_1 = B \cup Bs_1B = SL_2(\mathcal{O}_2)$.

  "$\subseteq$": $B \subseteq SL_2(\mathcal{O}_2)$, $s_1 \in SL_2(\mathcal{O}_2)$ und $SL_2(\mathcal{O}_2) \subseteq G$ Untergr.

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- Zeige: $P_1 = B \cup Bs_1B = SL_2(\mathcal{O}_2)$.

  "$\subseteq$": $B \subseteq SL_2(\mathcal{O}_2)$, $s_1 \in SL_2(\mathcal{O}_2)$ und $SL_2(\mathcal{O}_2) \subseteq G$ Untergr.

  "$\supseteq$": $P_1 \subseteq G$ Untergruppe und für $x, y \in \mathcal{O}_2$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in Bs_1B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in Bs_1B} \in P_1.$$

  Also $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathcal{O}_2 \right\rangle = SL_2(\mathcal{O}_2) \subseteq P_1$.

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- Zeige:
$$P_2 = B \cup B s_2 B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1}b \\ 2c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) \right\} =: M.$$

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- Zeige:
$$P_2 = B \cup B s_2 B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1} b \\ 2c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) \right\} =: M.$$
"$\subseteq$": $B \subseteq M, s_2 \in M$ und $M \subseteq G$ Untergruppe.

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- Zeige:

$$P_2 = B \cup B s_2 B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1}b \\ 2c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) \right\} =: M.$$

"$\subseteq$": $B \subseteq M, s_2 \in M$ und $M \subseteq G$ Untergruppe.

"$\supseteq$": $P_2 \subseteq G$ Untergruppe und für $x, y \in \mathcal{O}_2$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2y & 1 \end{pmatrix} \in B,$$

$$\nu_2(x) \geq 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B,$$

$$\nu_2(x) = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2^{-1} \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2^{-1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_2$$

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- Zeige:

  $$P_2 = B \cup B s_2 B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1} b \\ 2c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) \right\} =: M.$$

  Haben für $x, y \in \mathcal{O}_2$ gezeigt:

  $$\left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1} b \\ 2c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\} \subseteq P_2.$$

Das Amalgam am Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$

- Zeige:

$$P_2 = B \cup B s_2 B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1}b \\ 2c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_2) \right\} =: M.$$

Haben für $x, y \in \mathcal{O}_2$ gezeigt:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 2^{-1}b \\ 2c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\} \subseteq P_2.$$

Auch wenn wir Produkte der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ zulassen, bleibt die Menge in P_2 enthalten.
Damit folgt die Behauptung.

zurück zum Beispiel $SL_2(\mathbb{Q})$