§2 Die kompakt-offene Topologie und Transformationsgruppen

1. **Erinnerung** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt Basis für $\mathcal{T}$, wenn es für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jedes $x \in U$ ein $V \in \mathcal{B}$ gibt mit

$$x \in V \subseteq U$$

Äquivalent dazu: jede offene Menge in X ist eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Bsp.
- X metrischer Raum, $\mathcal{B}$ Menge aller offenen ε-Bälle, $0 < \varepsilon \le 1$ ist Basis
- $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ ist immer eine Basis

Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ heißt Subbasis, wenn es zu jeder offenen $U \subseteq X$ und jedem $x \in U$ Elemente $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{S}$ gibt mit $x \in V_1 \cap \dots \cap V_m \subseteq U$.

Äquivalent dazu: jede offene Menge in X ist eine Vereinigung von Schnitten von endlichen Teilmengen von $\mathcal{S}$.

Konstruktion Ist X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von X mit $\bigcup \mathcal{S} = X$, so setze

$$\mathcal{B} = \{ \bigcap E \mid E \subseteq \mathcal{S} \cup \{\emptyset\} \text{ endlich} \}$$

$$\mathcal{T} = \{ \bigcup B \mid B \subseteq \mathcal{B} \}$$

Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X mit Basis $\mathcal{B}$ und Subbasis $\mathcal{S}$, die kleinste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält. Man nennt $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie.

2. Lemma Seien X, Y top. Räume, sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie auf Y, sei $x \in X$. Dann sind äquivalent: (i) f ist stetig in x
(ii) für jedes $V \in \mathcal{S}$ mit $f(x) \in V$ gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) klar
(ii) $\Rightarrow$ (i): sei W eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{S}$ mit $f(x) \in V_1 \cap \dots \cap V_m \subseteq W$, also Umgebungen U_j von x mit $f(U_j) \subseteq V_j$ $\Rightarrow$ $U = U_1 \cap \dots \cap U_m$ Umgebung von x mit $f(U) \subseteq W$ $\Rightarrow$ f stetig in x. $\square$

3. Def Seien X, Y Hausdorffräume, sei $C(X,Y) = \{ f : X \to Y \mid f \text{ ist stetig} \}$. Für $A \subseteq X$ und $W \subseteq Y$ sei $\langle A; W \rangle = \{ f \in C(X,Y) \mid f(A) \subseteq W \}$.
Die kompakt-offene Topologie auf $C(X,Y)$ ist die Topologie, die von der Subbasis

$$\{ \langle K; W \rangle \mid K \subseteq X \text{ kompakt},\ W \subseteq Y \text{ offen} \}$$

erzeugt wird.

4. <u>Beispiel</u> Y ein Hausdorffraum, X ein diskreter topologischer Raum. $C(X,Y) = Y^X$ = Menge aller Abbildungen von X nach Y.

Die kompakten Teilmengen von X sind genau die endlichen Teilmengen, die k-o-Topologie ist die Topologie der punktweisen Konvergenz = Produkttopologie auf $Y^X = \prod_{x \in X} Y$.

Ist $X = \{x\}$ einelementig, so ist insbesondere

$$C(\{x\},Y) \overset{\sim}{=} Y \quad \text{via} \quad f \longmapsto f(x)$$

homöomorph.

Ist $h: Z \to X$ stetig, so erhalten wir eine Abbildung

$$h^*: C(X,Y) \to C(Z,Y), \quad f \longmapsto h^*(f) = f \circ h$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h^*(f)"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd}$$

5. <u>Lemma</u> Seien X, Y, Z Hausdorffräume, sei $h: Z \to X$ stetig. Dann ist auch

$$h^*: C(X,Y) \to C(Z,Y)$$

stetig bzgl. der k-o-Topologie.

Bew. Sei $K \subseteq Z$ kompakt, $W \subseteq Y$ offen, sei $g: X \to Y$ stetig mit $h^*(g) = g \circ h \in \langle K; W \rangle \subseteq C(Z, Y)$.

Dann ist $h(K) \subseteq X$ kompakt und es gilt $g \in \langle h(K); W \rangle$,

$$h^*(\langle h(K); W \rangle) \subseteq \langle K; W \rangle.$$

Nach §2.2 ist h^* stetig. $\square$

<u>Folgerungen</u> (1) $Z = X$ mit diskreter Topologie, $h = id: X \to X$ ergibt stetige Injektion $C(X, Y) \to Y^X$, insbesondere ist $C(X, Y)$ Hausdorffsch (und regulär $= T_3$, falls Y regulär ist)

(2) $Z = \{x\} \subseteq X$, $h(x) = x$ ~> stetige Abbildung $ev_x: C(X, Y) \longrightarrow Y$, $f \longmapsto f(x)$, denn $Y \cong C(\{x\}, Y)$

Auswertungsabbildung.

6. <u>Def</u> Ein <u>topologisches Monoid</u> $(M, \cdot, \mathcal{T})$ ist ein Monoid (= assoziative Verknüpfung mit beidseitigem Neutralelement $e \in M$) mit einer Topologie $\mathcal{T}$ auf M so, dass die Abbildung $m: M \times M \to M$, $(x, y) \to x \cdot y$ stetig ist.

<u>Bsp</u>: Jede topologische Gruppe ist ein topologisches Monoid.

7. Satz Seien X, Y, Z Hausdorff-Räume, sei Y lokalkompakt. Dann ist die Abbildung

$$c : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$$
$$(f,g) \longmapsto c(f,g) = g \circ f$$

stetig in der kompakt-offenen Topologie.

Beweis Sei $K \subseteq X$ kompakt, $W \subseteq Z$ offen, $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,Z)$ mit $g \circ f \in \langle K; W \rangle$.

Sei $U = g^{-1}(W) \subseteq Y$. Da Y lokalkompakt ist, gibt es zu jedem $u \in U$ eine kompakte Umgebung C_u mit $u \in C_u \subseteq U$. Da $f(K) \subseteq U$ kompakt ist, gibt es $u_1, \dots, u_m \in f(K)$ mit $f(K) \subseteq \mathring{C}_{u_1} \cup \dots \cup \mathring{C}_{u_m} =: V$

Dann ist $\overline{V} \subseteq C_{u_1} \cup \dots \cup C_{u_m}$ kompakt und

$f \in \langle K; V \rangle$, $g \in \langle \overline{V}; W \rangle$ und

$c(\langle K; V \rangle \times \langle \overline{V}; W \rangle) \subseteq \langle K; W \rangle$. Nach §2.2 ist c stetig.

Korollar A Ist Y ein lokalkompakter Raum, so ist $C(Y,Y)$ ein topologisches Monoid (bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen) in der k-o-Topologie.

<u>Korollar B</u> Sei Y lokal kompakt und sei Z Hausdorffsch. Dann ist die Auswertung

$$Y \times C(Y,Z) \to Z, \quad (y,f) \mapsto f(y)$$

stetig in der k-o-Topologie.

<u>Beweis</u> Setze $X = \{x\}$ und $C(\{x\}, Y) \cong Y$, erhalte

$$Y \times C(Y,Z) \cong C(\{x\},Y) \times C(Y,Z) \to Z \text{ stetig} \quad \square$$

8. <u>Lemma</u> Seien X, Y Hausdorff-Räume, sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie auf Y. Dann ist

$$\{\langle K;V\rangle \mid K \subseteq X \text{ kompakt}, V \in \mathcal{S}\}$$ eine Subbasis

der k-o-Topologie

<u>Beweis</u> Sei $f \in \langle K, W\rangle$ $\quad K \subseteq X$ kompakt, $W \subseteq Y$ offen.

Für jedes $x \in K$ gibt es $n_x \geq 1$ und

$V_{x,1}, \ldots, V_{x,n_x} \in \mathcal{S}$ mit $f(x) \in V_{x,1} \cap \ldots \cap V_{x,n_x} \subseteq W$.

Da K normal ist, gibt es eine abg Umgebung K_x von x <u>in K</u> mit $f(K_x) \subseteq V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x,n_x} \subseteq W$.

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E \subseteq K$ mit $K \subseteq \bigcup_{x\in E} K_x$. Es folgt

$$f \in \bigcap_{x\in E} \bigcap_{j=1}^{n_x} \langle K_x; V_{x_j}\rangle \subseteq \langle K; W\rangle \quad \square$$

9. Theorem Seien X, Y, Z Hausdorff-Räume.

Die Abbildung

$$C(X\times Y, Z) \longrightarrow C(X, C(Y,Z))$$

$$f \longmapsto \hat{f} = [x \longmapsto f(x,-)]$$

ist injektiv und stetig bzgl. der k-o-Topologie.

Wenn Y lokal kompakt ist, ist sie bijektiv.

Wenn sie bijektiv ist, ist sie ein Homöomorphismus.

Beweis Die Zuordnung $f \longmapsto \hat{f}$ ist injektiv (✓)

1. Schritt Wenn $f: X\times Y \to Z$ stetig ist, so ist auch

$\hat{f}: X \longrightarrow C(Y,Z)$ stetig.

Denn: Wenn $L \subseteq Y$ kompakt ist, $W \subseteq Z$ offen, $\hat{f}(x) \in \langle L;W\rangle$
$f(\{x\}\times L) \subseteq W$,

so gibt es nach Wallace' Lemma §1.16

ein offene Umgebung U von x mit $f(U\times L) \subseteq W$

$\Rightarrow \hat{f}(U) \subseteq \langle L;W\rangle \Rightarrow \hat{f}$ stetig nach §2.2. □

2. Schritt Wenn Y lokal kompakt ist und

$h: X \to C(Y,Z)$ stetig, so ist auch $f: (x,y) \longmapsto h(x)(y)$

stetig.

Denn: $f = [(x,y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stetig}}}{\longmapsto} (h(x),y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{§2.7} \\ \text{stetig}}}{\longmapsto} h(x)(y)]$ □

3. <u>Schritt</u> Die Mengen $\langle K; \langle L; W\rangle\rangle$ mit $K \subseteq X$, $L \subseteq Y$ kompakt, $W \subseteq Z$ offen bilden eine Subbasis der k-o-Topologie auf $C(X, C(Y,Z))$ nach §2.8. □

4. <u>Schritt</u> Die Mengen $\langle K \times L; W\rangle$ mit $K \subseteq X$, $L \subseteq Y$ kompakt, $W \subseteq Z$ offen bilden eine Subbasis der k-o-Topologie auf $C(X \times Y, Z)$.

<u>Denn:</u> Sei $M \subseteq X \times Y$ kompakt, $W \subseteq Z$ offen, $f \in \langle M; W\rangle$. Setze $K = pr_1(M)$, $L = pr_2(M)$. Jedes $p \in M$ hat in $K \times L$ eine Umgebung der Form $K_p \times L_p$ mit $f(K_p \times L_p) \subseteq W$. Da M kompakt ist, gibt es $E \subseteq M$ endlich mit

$$M \subseteq \bigcup_{p \in E} K_p \times L_p \quad \text{und} \quad f \in \bigcap_{p \in E} \langle K_p \times L_p; W\rangle \subseteq \langle M; W\rangle$$

□

<u>Beweis des Theorems.</u> Nach Schritt 1 ist $f \mapsto \hat{f}$ wohldefiniert. Nach Schritt 2 ist $f \mapsto \hat{f}$ bijektiv, wenn Y lokal kompakt ist. Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ bildet eine Subbasis von $C(X \times Y, Z)$ in eine Subbasis von $C(X, C(Y,Z))$ ab, also ist sie stetig nach §2.2. Wenn sie bijektiv ist, gilt dasselbe auch für ihre Umkehrabbildung.

□

#

<u>Fazit</u> Sei X, Y, Z Hausdorffräume, Y sei lokal kompakt. Dann gilt

(i) Die Verknüpfung
$$C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$$
$$(f,g) \longmapsto g \circ f$$
ist stetig in der k-o-Topologie.

(ii) Die kanonische Abbildung
$$C(X \times Y, Z) \longrightarrow C(X, C(Y,Z)), \; f \mapsto \hat{f}$$
$$\hat{f}(x) = f(x,-)$$
ist ein Homöomorphismus.

Jetzt wenden wir das auf <u>Wirkung</u> von Gruppen an.

10. <u>Satz</u> Sei M ein Hausdorffsches topologisches Monoid (= Halbgruppe mit Eins), sei X lokal kompakt, sei
$$h : M \longrightarrow C(X,X)$$
ein abstrakter Monoid-Homomorphismus
[d.h. $h(e) = id_X$, $h(a \cdot b) = h(a) \circ h(b)$]

Dann sind äquivalent:

(i) h ist stetig (bzgl. der k-o-Topologie)

(ii) die Wirkung
$$M \times X \longrightarrow X$$
$$(a,x) \longmapsto h(a)(x)$$
ist stetig.

<u>Beweis</u> Das folgt direkt aus Thm §2, 9 $\square$

Insbesondere ist die k-o-Topologie die gröbste

Topologie auf $C(X,X)$, die die Wirkung

$$M \times X \to X$$ stetig macht.

Für einen topologischen Raum X sei $\mathrm{Homeo}(X) \subseteq C(X,X)$ die Gruppe aller Homöomorphismen von X auf sich (Verknüpfung = Komposition).

Wenn X lokalkompakt ist, so ist die Multiplikation in $\mathrm{Homeo}(X)$ stetig. Was ist mit der Inversion?

11. Lemma Sei G eine Gruppe, sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G, bezüglich der die Multiplikation $m: G \times G \to G$, $m(x,y) = xy$ stetig ist. Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis für $\mathcal{T}$. Sei $\mathcal{S}^i = \mathcal{S} \cup \{V^{-1} \mid V \in \mathcal{S}\}$. Die von der Subbasis $\mathcal{S}^i$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}^i \supseteq \mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf G, bezüglich der G eine topologische Gruppe ist.

Beweis Nach Konstruktion von $\mathcal{S}^i$ ist die Inversion $i: G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ stetig, vgl. Lemma §2.2: für jedes $V \in \mathcal{S}^i$ ist $i^{-1}(V) \in \mathcal{S}^i$.

Die Multiplikation ist auch stetig, denn: ist $W \in \mathcal{S}^i \Rightarrow W \in \mathcal{S}$ oder $W^{-1} \in \mathcal{S}$

Klar: Ist $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ eine Gruppentopologie auf G, so ist notwendig $\mathcal{S}^i \subseteq \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T}^i \subseteq \mathcal{T}'$

Sei $a, b \in G$. Wenn $a \cdot b \in W \in \mathcal{S}$, so gibt es $U_1, \dots, U_k, V_1, \dots, V_\ell \in \mathcal{S}$ mit $a \in U_1 \cap \dots \cap U_k$, $b \in V_1 \cap \dots \cap V_\ell$ und $m((U_1 \cap \dots \cap U_k) \times (V_1 \cap \dots \cap V_\ell)) \subseteq W$ (v)

Wenn $ab \in W$, $W^{-1} \in \mathcal{S}$, so $b^{-1}a^{-1} \in W^{-1} \in \mathcal{S}$, es gibt $U_1, \dots, U_k, V_1, \dots, V_\ell \in \mathcal{S}$ mit $a \in U_1^{-1} \cap \dots \cap U_k^{-1}$, $b \in V_1^{-1} \cap \dots \cap V_\ell^{-1}$ und $m((U_1^{-1} \cap \dots \cap U_k^{-1}) \times (V_1^{-1} \cap \dots \cap V_\ell^{-1})) \subseteq W$ $\square$

Wir wenden das auf die k-o-Topologie auf Homeo(X) an.

Beobachtung: Sei X lokal kompakt, sei $K \subseteq X$ kompakt, $W \subseteq X$ offen, $g \in \mathrm{Homeo}(X)$. Dann gilt

$$g \in \langle K; W \rangle \iff g(K) \subseteq W \iff K \subseteq g^{-1}(W)$$
$$\iff X - K \supseteq g^{-1}(X - W) \iff g^{-1} \in \langle \underbrace{X-W}_{\text{abg}}; \underbrace{X-K}_{\text{offen}} \rangle$$

Damit folgt sofort:

12. Satz (Arens) Sei X lokal kompakt, sei $\mathcal{S}$ folgende Subbasis auf Homeo(X)

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathrm{Homeo}(X) \cap \langle A; W \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} A \subseteq X \text{ abg.}, W \subseteq X \text{ offen} \\ A \text{ kompakt oder } W - X \text{ kompakt} \end{array} \right\}$$

Die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie macht Homeo(X) zu einer topologischen Gruppe. Diese Topologie ist die gröbste Topologie, die die k-o-Topologie enthält und die G zu einer top. Gruppe macht.

$\square$

Wir nennen diese Topologie auf Homeo(X) die <u>Arens-Topologie</u>.

13. <u>Satz</u> Wenn X kompakt ist, so stimmen die k-o-Topologie und die Arenstopologie auf Homeo(X) überein.

<u>Beweis</u> $A \subseteq X$ abg $\Longleftrightarrow$ $A \subseteq X$ kompakt $\square$

14. <u>Satz</u> Sei G eine Hausdorffsche top. Gruppe, sei X lokalkompakt, sei $h: G \to$ Homeo(X) ein abstrakter Homomorphismus. Dann sind äquivalent: (i) h ist stetig in der Arens-Topologie auf Homeo(X)

(ii) Die Wirkung $G \times X \to X$ ist stetig
$(g, x) \longmapsto h(g)(x)$

<u>Beweis</u> (i)$\Rightarrow$(ii): $G \xrightarrow{h} \underset{\text{Arens-Top}}{\text{Homeo}(X)} \longrightarrow \underset{\text{k-o-Top}}{C(X,X)}$ ist stetig $\overset{§2.10}{\Longrightarrow}$ $G \times X \to X$ stetig.

(ii)$\Rightarrow$(i): Dann ist h stetig bzgl. der k-o-Topologie nach §2.10. Ist $K \subseteq X$ kompakt, $W \subseteq X$ offen, $V =$ Homeo$(X) \cap \langle K; W \rangle$, so ist

$h^{-1}(V^{-1}) = (h^{-1}(V))^{-1}$ offen in G, weil $h^{-1}(V) \subseteq G$ offen ist $\Longrightarrow$ h ist stetig in Arens-Topologie $\square$

\#

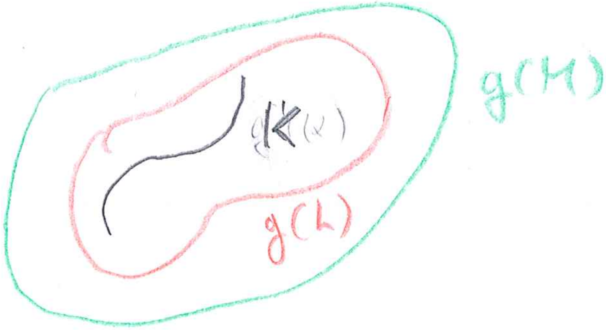
15. Theorem (Arens-Dijkstra)

Sei X lokal kompakt. Wenn jedes $x \in X$ eine kompakte und zush. Umgebung hat, dann stimmen die Arens-Topologie und die k-o-Topologie auf $\mathrm{Homeo}(X)$ überein.

Beweis Die Arens-Topologie auf $\mathrm{Homeo}(X)$ wird erzeugt von den Mengen $\langle A;W\rangle \cap \mathrm{Homeo}(X)$, $A \subseteq X$ abg, $W \subseteq X$ offen, A kompakt oder $X-W$ kompakt, vgl. § 2.12. Es genügt also zu zeigen: ist $A \subseteq X$ abg, $K \subseteq X$ kompakt, $W = X-K$, so ist $\langle A;W\rangle \cap \mathrm{Homeo}(X)$ offen in der k-o-Topologie auf $\mathrm{Homeo}(X)$. Das zeigen wir nun.

Sei $g \in \langle A;W\rangle \cap \mathrm{Homeo}(X)$. Für jedes $x \in X$ sei C_x kp. zush. Umgebung von x, mit Innerem U_x. Da $K = X-W$ kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $F \subseteq g^{-1}(K)$ mit $g^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{x\in F} C_x =: L$.

Da X lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Menge $M \subseteq X$, die L in ihrem Inneren hat (z.B. $M = \bigcup_{y\in E} C_y$, $E \subseteq L$ endlich). Sei $\partial M = M \cap \overline{(X-M)}$ der Rand von M. Dann gilt $L \cap \partial M = \emptyset$, da L im Inneren von M liegt.



Sei $V = \mathrm{Homeo}(X) \cap \langle A \cap M; W \rangle \cap \langle \partial M; g(X-L) \rangle$

$$\cap \bigcap_{x \in F} \langle \{x\}, g(U_x) \rangle$$

Dann gilt $g \in V$ und V ist offen in der k-o-Topologie auf $\mathrm{Homeo}(X)$. <u>Beh:</u> $V \subseteq \langle A; W \rangle$.

Sei $h \in V$, sei $x \in F$. Dann gilt $h(\partial M) \cap g(L) = \emptyset$ und $h(x) \in g(C_x) \subseteq g(L)$. Weiter ist $h(x)$ im Innern von $h(M)$. Da $g(C_x)$ zush. ist, folgt:

$g(C_x)$ ist im Innern von $h(M)$, also $\boxed{K \subseteq g(L) \subseteq h(M)}$

Damit $h(X-M) \subseteq W$. Weiter $h(A \cap M) \subseteq W$

$\Rightarrow h(A) \subseteq W$ □

<u>Erinnerung</u> Ein top. Raum X heißt <u>lokal zush.</u>, wenn jeder Punkt $x \in X$ beliebig kleine offene zush. Umgebungen hat. Jeder lokalkompakte und lokal zush. top. Raum erfüllt die Voraussetzungen von Theorem §2, 15.

Insbesondere ist die Homeomorphismengruppe jeder Mannigfaltigkeit oder jedes lokal endlichen Zellkomplexes in der k-o-Topologie eine topologische Gruppe (z.B. Homeo($\mathbb{R}^m$)).

Wenn X nicht die Voraussetz. aus Thm §2.15 erfüllt, so ist die Arens-Topologie ev. strikt feiner als die k-o-Topologie.

16. <u>Beispiel</u> Sei $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller $\{0,1\}$-Folgen in der Produkttopologie = Topologie der punktweisen Konvergenz.

Sei $\underline{0} = (0,0,\ldots)$, $\underline{1} = (1,1,1\ldots)$

$$U_n = \{c \in C \mid c_1 = \ldots = c_n = 0\} \qquad n \geq 1$$

$$V_n = \{c \in C \mid c_1 = \ldots = c_n = 1\}$$

$\leadsto$ die U_n, V_n sind abg. + offen in C. Wir definieren Homeomorphismen $h_n : C \to C$ wie folgt

$$h_n((\underbrace{0,\ldots,0}_{n},0,*)) = (\underbrace{0,\ldots 0}_{n},*) \qquad h_n(U_{n+1}) = U_n$$

$$h_n((\underbrace{0,\ldots,0}_{n},1,*)) = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n},1,*) \qquad h_n(U_n - U_{n+1}) = V_{n+1}$$

$$h_n((\underbrace{1,\ldots,1}_{n},*)) = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n},0,*) \qquad h_n(V_n) = V_n - V_{n+1}$$

$$h_n(c) = c \quad \text{sonst}, \quad h_n|_{C-(U_n \cup V_n)} = id_{C-(U_n \cup V_n)}$$

Es gilt $h_1(\underline{0}) = \underline{0}$. Sei $X = \mathbb{C} - \{\underline{0}\}$

__Beh__: $\lim_n h_n|_X = id_X$ aber $\lim_n (h_n|_X)^{-1} \neq id_X$

in der k-o-Topologie, also ist Homeo(X) in der k-o-Topologie __keine__ top. Gruppe.

__Denn__ Sei $K \subseteq X$ kompakt, $W \subseteq X$ offen mit $id_X \in \langle K; W \rangle$ ($\Rightarrow K \subseteq W$). Da $\underline{0} \notin K$ gibt es $m \geq 1$ mit $U_m \cap K = \emptyset$.

__1. Fall__ $\underline{1} \notin K$. Dann gibt es $l \geq 1$ mit $V_l \cap K = \emptyset$

$\Rightarrow h_j(K) = K$ für $j \geq l, m \Rightarrow h_j \in \langle K; W \rangle$

__2. Fall__ $\underline{1} \in K$. Dann gibt es $l \geq 1$ mit $V_l \subseteq W$

Für $j \geq l, m$ ist $\left.\begin{array}{l} h_j(V_j) \subseteq V_j \subseteq W \\ h_j(K - V_j) \subseteq K \end{array}\right\} h_j \in \langle K; W \rangle$

$\Rightarrow \lim_n (h_n|_X) = id_X$ in der k-o-Topologie.

Andererseits ist $\cancel{h_n}\,\underline{1} \in h_n(U_n)$ für alle $n \geq 1$

$\Rightarrow h_n^{-1}(1) \in U_n$ für alle $n \Rightarrow \lim_n h_n^{-1}(\underline{1}) \neq \underline{1}$

$\Rightarrow \lim_n (h_n|_X)^{-1} \neq id_X$ $\square$

Wir betrachten jetzt eigentlich Transformationsgruppen.

17. <u>Thm</u> (Kuratowski) Sei X ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent: (i) X ist kompakt

(ii) Für jeden Hausdorffraum Z ist $p: X \times Z \to Z$, $(x,z) \mapsto z$ eine abg. Abbildung.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $A \subseteq X \times Z$ abg., sei

$z \in Z - p(A) \Rightarrow (X \times \{z\}) \cap A = \emptyset \overset{\text{Vorlesung}}{\Rightarrow}$ es gibt eine Umgebung U von z mit $(X \times U) \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap p(A) = \emptyset$.

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii): Wenn X nicht kompakt ist, gibt es eine Familie von abg. Teilmengen $(K_i)_{i \in I}$ so, dass für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ gilt $\bigcap_{i \in E} K_i \neq \emptyset$, aber $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$.

Setze $Z = X \cup \{\infty\}$ mit folgender Topologie:

$U \subseteq Z$ offen $\overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow}$ $U \subseteq X$ oder es gibt $E \subseteq I$ endlich mit $\bigcap_{i \in E} K_i \subseteq U$

Z ist Hausdorffsch ($x \neq \infty \Rightarrow$ es gibt $i \in I$ mit $x \notin K_i$ $\quad \{\infty\} \cup K_i$ disjunkt zu $\{x\}$)

Betrachte $A = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times Z$, $\quad p(A) = X \subseteq Z$
$p(x,z) = z$

In Z gilt: $\overline{X} = Z$ weil $\infty \in \overline{X}$

Wäre p abgeschlossen, so $p(\overline{A}) = \overline{X} = Z \Rightarrow$

$(x, \infty) \in \overline{A}$ für ein $x \in X$

$\Rightarrow$ für jede Umgebung $\{\infty\} \cup \bigcap_{i \in E} K_i$ $\emptyset \neq E$ endlich

ist $x \in \bigcap_{i \in E} K_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} K_i$ ↯ $\square$

18. <u>Def</u> Seien X, Y Hausdorffräume, sei $f : X \to Y$ stetig. Wir nennen f <u>eigentlich</u> (engl. <u>proper</u>), wenn für jeden Hausdorffraum Z gilt:

$$f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z \quad \text{ist abg.}$$

(Dann ist auch $f \times \mathrm{id}_Z$ eigentlich) #

<u>Beobachtungen</u> Sei $f : X \to Y$ eigentlich. Dann gilt:

(i) f ist abgeschlossen

(ii) f injektiv $\Rightarrow$ f Einbettung

(iii) für jedes $B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(B) \xrightarrow{f} B$ eigentlich

(iv) für jedes abg. $A \subseteq X$ ist $A \xrightarrow{f} f(A)$ eigentlich

(v) Wenn f konstant ist, so ist X kompakt.

(vi) Ist $B \subseteq Y$ kompakt, so ist $f^{-1}(B) \subseteq X$ auch kompakt.

<u>Bew:</u> (i): setze $Z = \{0\}$; es folgt (ii).

~~(iii) $E \subseteq f^{-1}(B) \times Z$ abg in Teilraumtopologie~~

~~$\Rightarrow (f \times \mathrm{id}_Z)(\bar{E}) \subseteq (f \times \mathrm{id}_Z)(E)$~~

Wenn $f \times id : X \times Z \to Y \times Z$ abg. ist, so auch die Einschränkung $f^{-1}(B) \times Z \to B \times Z$ (gilt allgemein).

(iv) $E \subseteq A \times Z$ abg $\Rightarrow$ $E \subseteq X \times Z$ abg $\Rightarrow$ $(f \times id_Z)(E)$ abg.

(v) Folgt aus (iii) und Kuratowskis Theorem §2.17.

(vi) Gilt zunächst für $B = \{b\}$ nach (v).

Sei $B \subseteq Y$ kompakt und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $f^{-1}(B)$. Für jedes $b \in B$ gibt es $\mathcal{U}_b \subseteq \mathcal{U}$ endlich mit $f^{-1}(b) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_b$. Weiter ist $A_b = f(X - \bigcup \mathcal{U}_b)$ abg. und $b \notin A_b \Rightarrow$ $V_b = X - A_b$ Umgebung von $b \Rightarrow$ es gibt $b_1, .., b_m \in B$ mit $B \subseteq V_{b_1} \cup .. \cup V_{b_m}$. Sei $x \in X$.

$x \notin \bigcup \mathcal{U}_b \Rightarrow f(x) \in f(X - \bigcup \mathcal{U}_b) = A_b$, also

$$f^{-1}(B) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup \mathcal{U}_{b_j} \qquad \square$$

19. <u>Satz</u> Sei $f : X \to Y$ stetig, X, Y Hausdorffsch.

Dann sind äquivalent:

(i) f ist eigentlich

(ii) f ist abg. und für jedes $b \in Y$ ist $f^{-1}(b) \subseteq X$ kompakt.

Falls Y lokal kompakt ist und falls jedes (kompakte $B \subseteq Y$) auch ein kompaktes Urbild hat, so ist f eigentlich und X ist lokal kompakt.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) nach § 2.18.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei Z Hausdorffraum und $E \subseteq X \times Z$ abg.
Zz: $(f \times id_Z)(E) = F \subseteq Y \times Z$ ist abg. Sei $(y,z) \in (Y \times Z) - F$. Das $f \times id_Z$-Urbild ist $f^{-1}(y) \times \{z\}$. Nach Wallace' Lemma gibt es offene Mengen $U \supseteq f^{-1}(y)$, $V \ni z$ mit $(U \times V) \cap E = \emptyset$. Sei $A = f(X-U) \Rightarrow$ $W = Y - A$ ist offen, $y \in W$ und $f^{-1}(W) \subseteq U$
$\Rightarrow (W \times V) \cap F = \emptyset$. $\square$

<u>Zusatz.</u> Sei $x \in X$, sei $V \subseteq Y$ Umgebung von $f(x)$ mit kompaktem Abschluss $\Rightarrow f^{-1}(\overline{V})$ ist kompakte Umgebung von $x \Rightarrow X$ lokal kompakt.

Sei $A \subseteq X$ abg. und sei $y \in \overline{f(A)}$.
Sei U eine kompakte Umgebung von y. Dann ist $f(A) \cap U = f(A \cap f^{-1}(U))$ kompakt, also abgeschlossen $\Rightarrow y \in f(A) \cap U = \overline{f(A)} \cap U$ $\square$

20. <u>Def</u> Sei G eine Hausdorffsche top. Gruppe, sei X ein Hausdorffraum. Eine Gruppenwirkung $\alpha: G \times X \to X$ heißt <u>topologische Transformationsgruppe</u>, falls α stetig ist.

Wir versehen den <u>Bahnenraum</u> $G\backslash X$ mit der Quotiententopologie bezüglich der Abbildung

$$q: X \to G\backslash X, \quad x \mapsto G(x) = \{gx \mid g \in G\}.$$

(*) Weiter ist q offen.

Falls die Abbildung

$$\hat{\alpha}: G \times X \to X \times X, \quad (g,x) \mapsto (gx, x)$$

eigentlich ist, heißt die Wirkung <u>eigentlich</u>.

<u>Beobachtungen</u> Sei $\alpha: G \times X \to X$ eine eigentliche Wirkung. Dann gilt:

(i) jeder Stabilisator $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ ist kompakt.

(ii) für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $G \to X$, $g \mapsto gx$ eigentlich und insbesondere abgeschlossen.

(iii) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung

$$G/G_x \to G(x), \quad gG_x \mapsto g(x)$$

ein Homöomorphismus.

(iv) Jede Bahn $G(x) \subseteq X$ ist abg.

(v) Der Bahnenraum $_G\backslash X$ ist Hausdorffsch.

<u>Beweis</u> (i): $\hat{\alpha}_x^{-1}(x,x) = G_x \times \{x\}$

(ii): $\hat{\alpha}_x^{-1}(X \times \{x\}) = G \times \{x\}$, benutze §2.18(iii)

(iv): folgt aus (ii), da $G \times \{x\} \to X \times \{x\}$ abg. ist, Die Abbildung $G \to G(x)$, $g \mapsto g(x)$ ist insbesondere eigentlich nach §2.18 (iii); also abg. Die Abbildung $G \to G/G_x$ ist eine Quotientabb. und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & G(x) \\ G/G_x \arrow[ur, "\text{bij}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, es folgt (iii).

(v). Da $q^{-1}(q(U)) = \bigcup\{g(U) \mid g \in G\}$ ist q <u>offen</u>. Damit ist auch $q \times q$ offen. Das $q \times q$-Urbild der Diagonale in $_G\backslash X \times {}_G\backslash X$ ist genau $(\alpha \times id_X)(G \times X) \subseteq X \times X$ und damit ist die Diagonale abgeschlossen. $\square$

Jetzt suchen wir Kriterien für eigentliche Wirkungen (engl. <u>proper actions</u>)

21. <u>Theorem</u> Sei $\alpha: G\times X \to X$ eine topologische Transformationsgruppe. Sei G lokal kompakt. Dann sind äquivalent:

(i) Die Wirkung ist eigentlich

(ii) für alle $x,y\in X$ gibt es Umgebungen U,V von x und y so, dass die Menge $\{g\in G \mid U\cap g(V)\neq\emptyset\}$ <u>kompakten</u> Abschluss hat.

<u>Beweis</u> Vorüberlegung:

$$(gz,z)\in U\times V \Leftrightarrow gz\in U\cap g(V).$$

Wir setzen $Q=\{(gz,z)\mid g\in G, z\in X\}=(\alpha\times id_X)(G\times X)\subseteq X\times X$.

<u>(i) ⇒ (ii):</u> <u>Fall a.</u> x und y haben verschiedene Bahnen

$\Rightarrow (x,y)\notin Q$. Da die Wirkung eigentlich ist, ist Q abgeschlossen. Also gibt es Umgebungen U,V von x,y mit $U\times V\cap Q=\emptyset \Rightarrow \{g\in G\mid U\cap g(V)\neq\emptyset\}=\emptyset$ (✓)

<u>Fall b.</u> $(x,y)\in Q \Rightarrow$ es gibt $h\in G$ mit $x=hy$,

$$P=\{(g,z)\in G\times X\mid (gz,z)=(x,y)\}=\{(g,y)\in G\times X\mid g\in hG_y\}$$

ist kompakt. Sei $W\supseteq hG_y$ offen mit kompaktem Abschluss (G ist lokal kompakt!)

Dann ist $A = \hat{\alpha}((G-W)\times X) \subseteq X \times X$ abgeschlossen,

$(x,y) \notin A \Rightarrow$ es gibt U, V offen mit $(x,y) \in U \times V$ und

$(U \times V) \cap A = \emptyset \Rightarrow \{ (g,z) \in G \times X \mid (gz, z) \in U \times V \} \subseteq W \times X$

$\Rightarrow \{ g \in G \mid U \cap gV \neq \emptyset \} \subseteq W$ □

(ii) $\Rightarrow$ (i): Für alle $x, y \in X \times X$ ist die Menge

$\{ (g,z) \in G \times X \mid (gz, z) = (x,y) \}$ kompakt nach Voraussetzung. Nach §2.19 reicht es zu zeigen, dass die Abbildung $\hat{\alpha}_X$ abgeschlossen ist. Sei $E \subseteq G \times X$ abgeschlossen, $F = \hat{\alpha}_X(E)$. Angenommen, $(x,y) \in \overline{F}$.

Sei U, V Umgebung von x, y so, dass

$\{ g \in G \mid U \cap gV \neq \emptyset \}$ kompakten Abschluss $A \subseteq G$ hat.

Beh: $x = ay$ für $(a,y) \in E \cap (A \times \{y\})$.

Wäre das falsch, gäbe es nach Wallace' Lemma offene Umgebungen $U' \subseteq U$, $V' \subseteq V$ von x und y mit

$U' \cap \{ av \mid (a,v) \in E \cap (A \times V') \} = \emptyset$.

Andererseits gibt es $(g,z) \in E$ mit $(gz, z) \in U' \times V'$, weil $(x,y) \in \overline{F}$ und dann $z \in V'$, $g \in A$ ↯

□

Also $(x,y) = (ay, y) \in F$

#

22. <u>Def</u> Sei X ein Hausdorffraum, sei Γ eine Gruppe, die auf X so wirkt, dass für jedes $g \in \Gamma$ die Abbildung $x \mapsto gx$ stetig ist. Dann ist $\Gamma \times X \to X$ eine topologische Transformationsgruppe bezüglich der diskreten Topologie auf Γ.

Diese Wirkung ist eigentlich genau dann, wenn es für alle $x, y \in X$ offene Umgebungen $U, V \subseteq X$ gibt so, dass die Menge $\{g \in G \mid U \cap g(V) \neq \emptyset\}$ <u>endlich</u> ist.

In dieser Situation nennt man die Wirkung

$$\Gamma \times X \to X$$

eigentlich diskontinuierlich (properly discontinuous).

|| Achtung!! Manche Autoren verlangen mehr. ||

<u>Beispiel</u> $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{ [x \mapsto ax+b] \mid a = \pm 1, b \in \mathbb{Z} \}$ ist eigentlich diskontinuierlich, $\Gamma \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$

$x, y \in \mathbb{R}$ $\quad U = (x-1, x+1)$
$\quad V = (y-1, y+1)$

$a(x+\varepsilon) + b = y + \delta \qquad |\varepsilon|, |\delta| < 1$

$\rightsquigarrow$ $a = 1$ und $b \in (y-x-2, y-x+2)$
oder $a = -1$ und $b \in (y+x-2, y+x+2)$

23. Def Eine topologische Transformationsgruppe $K \times X \to X$ heißt kompakt, wenn K kompakt ist.

Satz Sei $K \times X \to X$ eine kompakte Transformationsgruppe. Dann ist die Wirkung eigentlich, die Abbildung $q: X \to K\backslash X$ ist eigentlich, abg. und offen. Weiter ist $K\backslash X$ genau dann lokalkompakt, wenn X lokalkompakt ist.

Beweis Nach Thm §2.21 ist die Wirkung eigentlich. Da jede K-Bahn $K(x) \subseteq X$ kompakt ist, reicht es zu zeigen, dass q abgeschlossen ist, vgl. §2.19. Sei $A \subseteq X$ abg. zZ: $q^{-1}(q(A)) = K(A) \subseteq X$ ist abg. Sei $x \in X - K(A)$ uns $K(x) \cap A = \emptyset$. Nach Wallace' Lemma gibt es eine offene Umgebung U von x mit $K(U) \cap A = \emptyset$. Es folgt $U \cap K(A) = \emptyset$.

Die Abbildung q ist offen für jede (top.) Transformationsgruppe.

Falls $K\backslash X$ lokalkompakt ist, so auch X nach Zusatz zu §2.19. Falls X lokalkompakt ist, V offene Umgebung von x mit $\bar{V}$ kompakt, so ist $q(V)$ offen Umgebung von $F(x)$ und

$\overline{q(V)} = q(\bar{V})$ ist kompakt $\leadsto$ $K\backslash X$ lokalkompakt. $\square$

<u>Korollar</u> Ist G eine Hausdorffsche top. Gruppe und $K \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe, so ist die Abbildung $G \to G/K$ offen, abg. und eigentlich. Weiter ist G genau dann lokalkompakt, wenn G/K lokalkompakt ist.

<u>Beweis</u> Betrachte $K \times G \to G$, $(k,x) \mapsto xk^{-1}$ $\square$

24. <u>Lemma</u> Sei $K \times X \to X$ eine kompakte Transformationsgruppe. Falls $a \in X$ ein Fixpunkt ist (d.h. $K_a = K$), so gibt es beliebig kleine offene K-invariante Umgebungen von a.

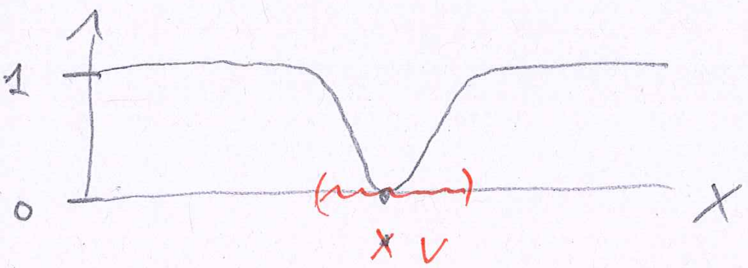
<u>Beweis</u> Sei W eine Umgebung von a. Nach Wallace' Lemma gibt es eine offene Umgebung V von a mit $K(V) \subseteq W$. Setze $U = K(V)$. $\square$

<u>Korollar</u> Ist G eine Hausdorffsche top. Gruppe und ist $K \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe, so

gibt es beliebig kleine Einsumgebungen $U \subseteq G$, die invariant unter Konjugation mit Elementen aus K sind. □

25. __Erinnerung.__ Ein Hausdorffraum X heißt __vollständig regulär__ oder __Tychonov-Raum__ oder __$T_{3\frac{1}{2}}$-Raum__, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung V von x eine stetige Abbildung

$$\varphi : X \to [0,1] \text{ gibt mit } \varphi(x) = 0$$
$$\varphi(z) = 1 \quad \text{für } z \in X - V$$



Jeder metrische Raum und jeder normale Raum ($= T_4$-Raum) ist ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

__Lemma__ Sei X eine Menge, seien $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, sei $\varepsilon > 0$. Falls $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in X$ gilt, so auch

$$\left| \inf_{x\in X}(\varphi(x)) - \inf_{x\in X}(\psi(x)) \right| \leq \varepsilon.$$

<u>Bew</u> Zu jedem $l \geq 1$ gibt es $z_l \in X$ mit

$\varphi(z_l) - \inf \varphi(X) \leq \frac{1}{l} \Rightarrow \psi(z_l) - \inf \varphi(X) \leq \varepsilon + \frac{1}{l}$

$\Rightarrow \inf(\psi(X)) \leq \inf(\varphi(X)) + \varepsilon + \frac{1}{l} \quad \forall l \geq 1$

$\Rightarrow \inf(\psi(X)) \leq \inf(\varphi(X)) + \varepsilon$ $\square$

<u>Satz</u> Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, sei $K \times X \to X$ eine kompakte Transformationsgruppe. Dann ist auch $K\backslash X$ ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

<u>Bew</u> Sei $V \subseteq K\backslash X$ eine Umgebung von $q(x)$, sei U eine Umgebung von x mit $q(U) \subseteq V$, sei $\psi: X \to [0,1]$ stetig mit $\psi(x) = 0$, $\psi(z) = 1$ für $z \in X - U$.

Sei $\bar{\psi}(z) = \min \psi(K(z))$. <u>Beh</u> $\bar{\psi}$ ist stetig auf X.

Denn: für $z \in X$ betrachte $h: K \times X \to [0,1]$, $h(g,y) = |\psi(gy) - \psi(gz)|$. Da $h(g,z) = 0 \ \forall g \in K$ gibt es nach Wallace' Lemma für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung W_ε von z so, dass $h(g,y) < \varepsilon$ für alle $g \in K$, $y \in W_\varepsilon$

$\Rightarrow |\inf \psi(K(z)) - \inf \psi(K(y))| \leq \varepsilon$ für alle $y \in W_\varepsilon$

$\Rightarrow \bar{\psi}$ stetig

Betrachte jetzt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[d] & {[0,1]} \\ K\backslash X \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ φ ist stetig

$\varphi(K(x)) = \bar{\varphi}(q(x)) = 0$. Ist $q(y) \notin V$, so ist

$K(y) \cap U = \emptyset \rightsquigarrow \varphi(K(y)) = 1$ $\square$