§9. Čech-vollständige und Polnische Gruppen

Erinnerung: Eine Menge von Mengen $\mathcal{F}$ hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**, falls für jede **endliche Teilmenge** $\emptyset \neq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ gilt $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Bsp: X Hausdorffraum. Dann ist X kompakt genau dann, wenn für jede Familie abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{F}$ mit der E.D.E gilt $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ ($\Leftrightarrow$ Heine-Borel)

1. Def: Sei X vollständig regulär (= $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum = "Tychonov-Raum"), vgl. §2.25. Wir nennen X **Čech-vollständig**, falls es eine Familie von offenen Überdeckungen $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X gibt (jedes $\mathcal{U}_n$ ist offene Überdeckung von X) mit folgender Eigenschaft:

(ČV) Ist $\mathcal{F}$ Menge von abg. Teilmengen mit EDE und gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $F \in \mathcal{F}$ und ein $U \in \mathcal{U}_n$ mit $F \subseteq U$, so ist $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Man nennt $(\mathcal{U}_n)$ dann eine **vollständige Folge von Überdeckungen**.

Diese Definition sieht sehr umständlich aus, ist aber gut brauchbar.

2. Bsp (a) Jeder kompakte Raum X ist Čech-vollständig.

Denn: setze $\mathcal{U}_n = \{X\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Jeder vollständig metrisierbare Raum X ist Čech-vollständig.

Denn: Sei d eine vollständige Metrik auf X.
[X metrisch $\Rightarrow X$ ist $T_4 \Rightarrow X$ ist $T_{3\frac{1}{2}}$!]. Setze

$\mathcal{U}_n = \{ U \subseteq X$ offen $\mid \operatorname{diam}(U) < 2^{-n} \}$.

Sei $\mathcal{F}$ Menge von abg. Teilmengen mit EDE. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $F_n \in \mathcal{F}$ und $U \in \mathcal{U}_n$ mit $F_n \subseteq U$

$\Rightarrow \operatorname{diam}(F_n) < 2^{-n}$. Wähle $x_j \in F_0 \cap \ldots \cap F_j$, $j \geq 0$.

$\Rightarrow d(x_j, x_{j+1}) < 2^{-j} \Rightarrow (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge,

$x = \lim_j x_j$. Sei $E \in \mathcal{F}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es

$y_n \in F_n \cap E \Rightarrow d(y_n, x_n) < 2^{-n} \Rightarrow \lim_j y_j = x \in E$

$\Rightarrow x \in \bigcap \mathcal{F}$. $\square$

(c) Jeder lokal kompakte Raum ist Čech-vollständig.

3. Lemma Sei K ein kompakter Raum und sei $X \subseteq K$ eine G_δ-Menge. Dann ist X Čech-vollständig.

Beweis K kompakt $\Rightarrow$ K T_4-Raum $\Rightarrow$ K $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum $\Rightarrow$ X $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum. Schreibe $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} W_n$, $W_n \subseteq K$ offen. Wir setzen $\mathcal{U}_n = \{ X \cap V \mid V \subseteq K \text{ offen und } \overline{V} \subseteq W_n \}$. Da X regulär ist, gibt es zu jedem $x \in W_n$ eine offene Menge $V \subseteq K$ mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W_n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}_n$ ist offene Überdeckung von X für jedes n. Sei $\mathcal{F}$ Menge von Teilmengen von X mit EDE, die abg. in X sind. Für jedes n gibt es $E_n \in \mathcal{F}$, $U \in \mathcal{U}_n$ mit $E_n \subseteq U$. Da K kompakt ist, gibt es $z \in \bigcap \{ \overline{E} \mid E \in \mathcal{F} \}$. Da $z \in \overline{E_n}$, $\overline{E_n} \subseteq \overline{U} \subseteq W_n$ folgt $z \in X$. $\Rightarrow$ $z \in \overline{E} \cap X = E$ für alle $E \in \mathcal{F}$. $\square$

Korollar Jeder lokal kompakte Raum X ist Čech-vollständig.

Beweis Die Alexandrov-Kompaktifizierung $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ enthält X als offene Teilmenge, also als G_δ-Menge. $\square$

4. <u>Theorem</u> Jeder Čech-vollständige Raum X ist ein Baire-Raum.

<u>Beweis</u> Sei $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine vollständige Folge von Überdeckungen von X. Sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen dichten Teilmengen von X, sei $W \subseteq X$ offen, $W \neq \phi$.
Wir müssen zeigen: $\bigcap_{n=0}^{\infty} V_n \cap W \neq \phi$.

Setze $W_0 = W$, wähle induktiv x_n, W_n wie folgt:

$x_n \in W_{n-1} \cap V_n$, $U_n \in \mathcal{U}_n$ mit $x_n \in U_n$.
Jetzt W_n offen mit $x_n \in W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W_{n-1} \cap V_n \cap U_n$

$\boxed{X \text{ regulär!}}$

$\mathcal{F} = \{ \overline{W_n} \mid n \in \mathbb{N} \} \overset{\check{C}V}{\Rightarrow} \bigcap \mathcal{F} \neq \phi \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} W_{n-1} \cap V_n \cap U_n \neq \phi$

$\Rightarrow \bigcap V_n \cap W_0 \neq \phi$ $\square$

<u>Erinnerung</u> Jeder vollständig reguläre Raum X läßt sich einbetten in $\underbrace{[0,1]^{C(X,[0,1])}}_{\text{kompakt}} = K$, vgl. ÜA 3.4.

5. Theorem Sei X vollständig regulär. Dann sind äquivalent:

(i) X ist Čech-vollständig

(ii) Falls $i: X \to K$ eine Einbettung (mit dichtem Bild) ist, K kompakt, so ist $i(X) \subseteq K$ eine G_δ-Menge.

(iii) es gibt einen kompakten Raum K und eine Einbettung $j: X \to K$ so, dass $j(X)$ eine G_δ-Menge ist.

Beweis (i) ⇒ (ii).

Sei $(\mathcal{U}_n)$ vollst. Folge von Überdeckungen von X, sei $i: X \to K$ Einbettung, K kompakt. Sei $W_n = \bigcup \{V \subseteq K \text{ offen} \mid i^{-1}(V) \in \mathcal{U}_n\}$

Dann gilt $i(X) \subseteq W_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $i(X) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} W_n$.

Beh $i(X) = \bigcap_{n=0}^{\infty} W_n$.

Sei $z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} W_n$, sei $\mathcal{A}$ die Menge aller abg. Umgebungen von z in K. Da $z \in \overline{i(X)}$ gilt, hat die Menge

$\mathcal{F} = \{A \cap i(X) \mid A \in \mathcal{A}\}$ die EDE. Weiter gibt es

$V_n \subseteq K$ offen mit $i^{-1}(V_n) \in \mathcal{U}_n$ und $z \in V_n$. Da K regulär ist, gibt es $A_n \in \mathcal{A}$ mit $z \in A_n \subseteq V_n$.

Nun ist $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F}$ und $\{z\} = \bigcap \mathcal{A} \supseteq \bigcap \mathcal{F} \Rightarrow z \in i(X)$, also ist $i(X)$ eine G_δ-Menge.

(ii) ⇒ (iii) mit $K = \beta(X) =$ Abschluss von $X \subseteq [0,1]^{C(X,[0,1])}$

(iii) ⇒ (i) nach Lemma §4. 3. □

H (15.6.)

6. <u>Satz</u> Sei X Čech-vollständig und sei $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent: (i) A ist Čech-vollständig

(ii) A ist eine G_δ-Menge in $\bar{A}$.

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i): zunächst ist $\bar{A} \subseteq X$ Čech-vollständig: ist $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine vollständige Folge von Überdeckungen von X, so setze $\mathcal{U}_n' = \{U \cap \bar{A} \mid U \in \mathcal{U}_n\} \Rightarrow (\mathcal{U}_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ist vollst. Folge von Überdeckungen von $\bar{A}$.

Jetzt nehmen wir an, dass A eine G_δ-Menge in $\bar{A} = X$ ist. Nach §4.5 ist X eine G_δ-Menge in βX (= Čech-Stone Kompaktifizierung von X) $\Rightarrow A \subseteq X$ ist auch G_δ-Menge in $\beta(X) \Rightarrow A$ Čech-vollständig nach §4.5.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vollständige Folge von Überdeckungen von A. Für jedes $V \subseteq A$ das offen in A ist wähle $\tilde{V} \subseteq X$ offen mit $V = A \cap \tilde{V}$.

<u>Beh</u>: $A = \bar{A} \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup\{\tilde{V} \mid V \in \mathcal{U}_n\}$

Klar: "$\subseteq$", zeige "$\supseteq$". Sei $x \in \bar{A} - A$, sei $\mathcal{N}$ die Menge aller abg. Umgebungen von x in $X \Rightarrow \bigcap \mathcal{N} = \{x\} \not\subseteq A$.

Da $\{W \cap A \mid W \in \mathcal{N}\}$ die EDE hat, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass keine der Mengen $W \cap A$, $W \in \mathcal{N}$ in einem $V \in \mathcal{U}_m$ liegt. <u>Beh</u> $\underline{x \notin \bigcup\{\tilde{V} \mid V \in \mathcal{U}_m\}}$.

Denn sonst $x \in \tilde{V}$, $V \in \mathcal{U}_m \Rightarrow$ es gibt $W \in \mathcal{N}$ mit $W \subseteq \tilde{V}$ $\Rightarrow W \cap A \subseteq \tilde{V} \cap A = V$ ↯.

Wir haben gezeigt:

$$(\bar{A} - A) \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup \{ \check{V} \mid V \in \mathfrak{U}_n \} = \emptyset$$

Ist also $x \in \bar{A} \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup \{ \check{V} \mid V \in \mathfrak{U}_n \}$, so ist $x \in A$. $\square$

7. Satz Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Čech-vollständige Räume. Dann ist auch $\prod_{n=0}^{\infty} X_n = X$ Čech-vollständig.

Beweis Alle X_n vollst. regulär $\Rightarrow$ X vollst. regulär.

Setze $K_n = \beta X_n$ (= Čech-Stone Kompaktifizierung),

$K = \prod_{n=0}^{\infty} K_n$ mit Einbettung $X \xrightarrow{j} K$.

Beh $j(X) \subseteq K$ ist G_δ-Menge.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $X_n \subseteq K_n$ eine G_δ-Menge mit

$X_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_{n,k}$ $\quad U_{n,k} \subseteq K_n$ offen.

Setze $W_{n,k} = K_0 \times K_1 \times \ldots \times \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{U_{n,k}} \times \ldots$

$\Rightarrow W_{n,k} \subseteq K$ offen und $j(X) = \bigcap_{n,k=0}^{\infty} W_{n,k}$ $\square$

8. <u>Lemma</u> Sei X, Y Hausdorff-Räume, sei $A \subseteq X$. Sei $f: X \to Y$ stetig. Falls $f|_A : A \to Y$ eigentlich ist, so ist A abg. in X.

<u>Bew.</u> Sei $x \in X - A$. Dann ist $B = A \cap f^{-1}(f(x))$ kompakt, also gibt es $U \subseteq X$ offen mit $B \subseteq U$, $x \notin \overline{U}$ ($\to$ Wallace). Weiter ist $f(A-U) \subseteq Y$ abg., $f(x) \notin f(A-U) \Rightarrow f^{-1}(f(A-U)) \subseteq X$ abg., $x \notin f^{-1}(f(A-U))$ $\Rightarrow x \notin \overline{A-U}$. Da $x \notin \overline{U}$, folgt $x \notin \overline{A}$ (denn $\overline{A} \subseteq \overline{A-U} \cup \overline{U}$). $\square$

<u>Satz</u> Seien X, Y vollst. regulär, sei $f: X \to Y$ eigentlich und surjektiv. Dann sind äquivalent:

(i) X ist Čech-vollständig.
(ii) Y ist Čech-vollständig.

<u>Bew.</u> Betrachte $\beta f : \beta X \to \beta Y$

<u>Beh</u>: $\underline{\beta f(\beta X - X) = \beta Y - Y}$.

Setze dazu $Z = (\beta f)^{-1}(Y) \subseteq \beta X$, betrachte die Abbildung $h: Z \xrightarrow{\beta f} Y$.

~~Für jedes $y \in Y$ ist $h^{-1}(y) \subseteq \beta X$ kompakt. Da βf abg. ist, ist auch h abg. Also ist h eigentlich (vgl. §2.18)~~

Nach Lemma 8 ist $X \subseteq Z$ abg in Z. Da X dicht in $\beta X \supseteq Z$ ist, folgt $X = Z$

$\Rightarrow \beta f(\beta X - X) \subseteq \beta Y - Y$. Da $f(X) = Y$ dicht in βY ist, ist $\beta f(\beta X) = \beta Y \Rightarrow \beta f(\beta X - X) = \beta Y - Y$.

Da βf stetig und abg ist, ist $\beta f(\beta X - X)$ ein F_σ-Menge gdw $\beta X - X$ ein F_σ-Menge ist

$\Rightarrow X \subseteq \beta X$ G_δ-Menge gdw $Y \subseteq \beta Y$ G_δ-Menge $\square$

Den folgenden Satz beweisen wir nicht; vgl. Engelking ÜA 5.5.8 (b).

9. Satz (Pasynkov) Seien X, Y vollständig regulär, sei X Čech-vollständig und sei Y metrisierbar. Wenn es eine stetige, offene, surjektive Abbildung

$$f: X \to Y$$

gibt, so ist Y Čech-vollständig.

10. Satz Ein metrisierbarer Raum X ist genau dann Čech-vollständig, wenn X vollständig metrisierbar ist.

Beweis Wenn X vollst. metrisierbar ist, so ist X Čech-vollständig nach §4.2 (b).

Sei X metrisierbar und Čech-vollständig, sei d Metrik, die X metrisiert. Dann ist X eine G_δ-Menge in der Vervollständigung $\hat{X}$ von (X,d) nach §4.6.
Nach ÜA 4.4 ist X vollständig metrisierbar. $\square$

Korollar Jeder metrisierbare lokal kompakte Raum ist vollständig metrisierbar. $\square$

Korollar Sei X vollständig metrisierbar, sei $A \subseteq X$. Dann ist A vollst. metrisierbar gdw A ein G_δ-Menge in X ist.

Beweis: A G_δ-Menge $\Rightarrow$ A vollst. metrisierbar nach ÜA 4.4. Ist $A \subseteq X$ vollst. metrisierbar, so ist A ein G_δ-Menge in $\bar{A}$ nach §4.6. Weiter ist $\bar{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(A)$ auch G_δ-Menge in X $\Rightarrow$ A ist G_δ-Menge in X $\square$

Nun betrachten wir Čech-vollständige top. Gruppen

11. **Satz** Sei G eine Čech-vollständige Gruppe, sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann sind äquivalent:

(i) $H \subseteq G$ ist abg.

(ii) H ist Čech-vollständig.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) nach §4.6.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Dann ist H eine G_δ-Menge in $\overline{H}$ $\Rightarrow$ $H = \overline{H}$ nach §3.10 (B). $\square$

12. **Theorem** Sei G eine Hausdorffsche top. Gruppe, sei $\Psi \subseteq G$ eine G_δ-Menge mit $e \in \Psi$ (etwa $\Psi = G$ oder Ψ offene Einsumgebung). Dann sind äquivalent:

(i) G ist Čech-vollständig

(ii) es gibt eine stetige Längenfunktion $l : G \to \mathbb{R}$ so, dass $K = \{g \in G \mid l(g) = 0\}$ kompakt ist mit $K \subseteq \Psi$, und ${}_K\backslash G$ ist Čech-vollständig und wird metrisiert durch $d(Kx, Ky) = l(xy^{-1})$

(iii) es gibt eine kompakte Untergruppe $K \subseteq \Psi$ so, dass ${}_K\backslash G$ Čech-vollständig ist.

(iv) es gibt eine kompakte Untergruppe $K \subseteq G$ so, dass ${}_K\backslash G$ Čech-vollständig ist.

[Entsprechendes gilt für Linksnebenklassen G/K]

<u>Beweis</u>: (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) ist klar.

Angenommen, (iv) gilt. Da $G \to K\backslash G$ eigentlich und surjektiv ist, folgt (i) mit §4.8.

Bleibt zu zeigen: (i) $\Rightarrow$ (ii). # (18.6.)

Sei $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine vollständige Folge von Überdeckungen für G.

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ wähle $U_n \in \mathcal{U}_n$ mit $e\in U_n$.

Schreibe $Y = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n$, V_n offen.

Wähle nun induktiv $\overset{\text{(abg.)}}{\text{symmetrische}}$ Einsumgebungen $K_0 \supseteq K_{-1} \supseteq \dots$ mit $K_{-n} \subseteq U_n \cap V_n$ und $K_{-n-1}\cdot K_{-n-1}\cdot K_{-n-1} \subseteq K_{-n}$.

Für $n \geq 1$ setze $K_n = G$. Sei $\ell : G \to \mathbb{R}$ die stetige Längenfunktion nach §3.18. Für

$K = \{g\in G \mid \ell(g) = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} K_n$ gilt dann $K \subseteq Y$.

<u>Beh</u> <u>K ist kompakt.</u> Denn: sei $\mathcal{E}$ Menge von abg. Teilmengen von K mit E.D.E. Jedes $E\in\mathcal{E}$ ist in $U_n \in \mathcal{U}_n$ $\Rightarrow$ $\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ K ist kompakt. Nach §4.8 ist $K\backslash G$ Čech-vollständig, denn $G \to K\backslash G$ ist eigentlich nach §2.23. Betrachte das

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\text{stetig}", "(x,y)\mapsto \ell(xy^{-1})"'] \arrow[d, "\text{offen}"'] & \mathbb{R} \\
K\backslash G \times K\backslash G \arrow[ur, "(Kx,Ky)\mapsto \ell(xy^{-1})"']
\end{tikzcd}$$

Die Pseudometrik d ist stetig auf ${}_K\backslash^G$ und

$d(Kx, Ky) = 0 \Leftrightarrow \ell(xy^{-1}) = 0 \Leftrightarrow xy^{-1} \in K \Leftrightarrow Kx = Ky$

also ist d stetige Metrik auf ${}_K\backslash^G$.

Sei $W \subseteq {}_K\backslash^G$ offene Umgebung von Ke, setze

$U = q^{-1}(W)$ offen $[q(g) = Kg]$. Beh: es gibt $n \in \mathbb{N}$

mit $K_n \subseteq U$. Denn sonst wäre $A_n = K_n - U$

nicht leer, abg für alle n mit EDE $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq K - U$

nicht leer ↯. Also gibt es n mit $K_n \subseteq U$ und damit

$\{Kg \mid d(Ke, Kg) < 2^{-n}\} \subseteq W \Rightarrow d$ metrisiert ${}_K\backslash^G$ $\square$

13. Theorem Sei G Čech vollständige topol. Gruppe, sei $H \subseteq G$ abg. Untergruppe. Dann sind H und G/H Čech-vollständig.

Beweis. Da $H \subseteq G$ abg. ist, ist H Čech-vollständig nach §4.6. Betrachte nun G/H. Sei ℓ, G wie in §4.12 (mit $Y = G$). Die kompakte Gruppe K wirkt von links auf G und auf G/H. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, "r"] & \\
K\backslash G \arrow[dr, "\tilde p"'] & & G/H \arrow[dl, "\tilde q"] \\
 & K\backslash G/H &
\end{tikzcd}$$

Die Abbildungen $p, q, \tilde q$ sind offen, also ist r offen und damit auch $\tilde p$. <u>Beh</u> $K\backslash G/H$ wird metrisiert durch die Metrik

$$\bar d_H(KxH, KyH) = \inf l(KxHy^{-1}K)$$
$$= \inf l(xHy^{-1})$$

Da l stetig ist, ist $d_H : G/H \times G/H \to \mathbb{R}$,

$d_H(xH, yH) = \inf l(xHy^{-1})$ stetig, vgl. § 3.21, damit ist auch $\bar d_H$ stetig, da $\tilde q \times \tilde q : G/H \times G/H \to K\backslash G/H \times K\backslash G/H$ offen ist.

Sei $W \subseteq K\backslash G/H$ offen mit $KgH \in W$. Da $d(Kx, Ky) = l(xy^{-1})$ den Raum $K\backslash G$ metrisiert, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $\tilde p(\{Kx \mid d(Kx, Kg) < \varepsilon\}) \subseteq W$.

Ist $\bar d_H(KyH, KgH) < \varepsilon$, so gibt es $h \in H$ mit

$d(Kyh, Kg) < \varepsilon \Rightarrow KyH \in W \Rightarrow$ Beh $\square$

Nach Thm 4.9 folgt: $K\backslash G/H$ ist Čech-vollständig, da $K\backslash G$ Čech-vollständig ist. Da $G/H \to K\backslash G/H$ eigentlich ist, ist auch G/H Čech-vollständig. □

Wir benutzen das, um Ergebnisse über vollständig metrisierbare Gruppen zu erhalten.

14. <u>Satz</u> Sei G eine Čech vollständige Gruppe. Wenn es eine G_δ-Menge $Y \subseteq G$ gibt mit $e \in Y$, die <u>keine</u> kompakte Untergruppe enthält, so ist G vollständig metrisierbar. □

15. <u>Satz</u> Sei G eine vollst. metrisierbare top. Gruppe, sei $H \subseteq G$ abg. Untergruppe. Dann sind H und G/H vollständig metrisierbar.

<u>Beweis</u> Klar: G vollst. metr $\Rightarrow$ H vollst. metr., da H abg. Weiter ist G/H metrisierbar nach §3.23 und Čech-vollständig nach §4.13, also vollst. metrisierbar nach §4.10. □

16. Satz Sei G vollst. metrisierbare Gruppe, sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann sind äquivalent:

(i) H ist abg. (ii) H ist G_δ-Menge

(iii) H ist vollst. metrisierbar

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i) nach §4.11 $\square$

17. Satz Sei G vollständig metrisierbar. Dann ist G Raikov-vollständig.

Beweis $RC(G)$ ist vollständig (metr.) und $j_G(G) \subseteq RC(G)$ ist dicht und vollständig metr. $\Rightarrow$ $j_G(G) = RC(G)$ $\square$

Korollar Sei A eine abelsche top. Gruppe. Wenn d eine links invariante Metrik ist, die A metrisiert und wenn A vollständig metrisierbar ist, so ist (A,d) vollständig.

Insbesondere: ist $(V, |\cdot|)$ ein reeller normierter Vektorraum, der vollständig metrisierbar ist, so ist $(V, |\cdot|)$ ein Banachraum.

Beweis Da A abelsch ist, ist $d_T = 2 \cdot d$, also ist $WC(A) = RC(A) \cong A$ $\square$

#

22.6.

18. **Def** Ein topologischer Raum X heißt Polnisch, wenn er vollständig metrisierbar ist und separabel, d.h. es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge in X. Solche Räume wurden z.B. von Sierpinski, Kuratowski, Tarski vor 100 Jahren untersucht. In den letzten Jahren erlebten sie eine Renaissance in der Logik, Operatortheorie und W-Theorie.

Lemma A Sei X ein top. Raum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist Polnisch
(ii) X ist vollst. metrisierbar und hat eine abzählbare Basis
(iii) X ist Čech-vollständig, metrisierbar und hat abz. Basis.

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i) ; (ii) $\Rightarrow$ (i) denn: $D \subseteq X$ abz. dicht, d Metrik $\Rightarrow \{B_{1/n}(x) \mid x \in D, n \geq 1\} = \mathfrak{B}$ Basis.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) nach §4.2 (b). $\square$

Lemma B Sei X Polnischer Raum, $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent: (i) A ist Polnisch (ii) A ist G_δ-Menge.

Beweis $A \subseteq X$ hat abz. Basis, da X abz. Basis hat. Die Beh. folgt nun aus §4.6. $\square$

Erinnerung Der Raum $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ ist Polnisch, denn

$$d(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \delta_{a_k, b_k}$$

ist vollständige Metrik und die Mengen

$$U_{(x_0,\dots,x_m)} = \{ a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid a_j = x_j \; j = 0,\dots,m \}$$

bilden eine Basis, $m \geq 0$, $x_0,\dots,x_m \in \mathbb{N}$.

19. Satz Sei X ein Polnischer Raum. Dann gibt es eine stetige surjektive Abbildung $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{F} X$.

Beweis Sei d_X vollst. Metrik, die X metrisiert, sei $Z \subseteq X$ abzählbar und dicht, $Z = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$.

Für $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiere Folge s^a in Z wie folgt:

$$s^a_0 = z_0 \,, \quad s^a_{k+1} = \begin{cases} z_{a_k} & \text{falls } d_X(z_{a_k}, s^a_k) \leq 2^{-k} \\ s^a_k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt $d_X(s^a_{k+1}, s^a_k) \leq 2^{-k}$ $\Rightarrow$ s^a ist Cauchy-Folge.

Wir setzen $f(a) = \lim_k s^a_k$.

Ist $a_j = b_j$ für $j = 0, 1, \dots, m$, so ist $s^a_j = s^b_j$ $j = 0, \dots, m$

$\Rightarrow$ $d(F(a), f(b)) \leq 2^{-m+2}$ falls $d(a,b) \leq 2^{-m}$

$\Rightarrow$ f ist stetig.

Sei $x \in X$ beliebig, setze $a_m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid d(x, z_k) \leq 2^{-m-1}\}$

$m = 0, 1, 2, \dots$. Es folgt

$s^a_0 = z_0$, $s^a_1 = z_{a_1}$ $s^a_2 = z_{a_2}$ usw $\Rightarrow$ $f(a) = x$ $\square$

20. <u>Def</u> Sei $S = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \mathbb{N}^3 \cup \ldots$ die Menge aller endlichen Folgen von natürlichen Zahlen. Sei P eine Menge von Mengen. Ein <u>Suslin-Schema</u> ist eine Abbildung $u: S \to P$, $s \mapsto u_s$.
Für $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definieren wir

$$u_a = u_{(a_0)} \cap u_{(a_0,a_1)} \cap u_{(a_0,a_1,a_2)} \cap \ldots$$

sowie $A(u) = \bigcup \{ u_a \mid a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$. Man nennt A die <u>Alexandrov-Suslin-Operation</u>.

<u>Satz</u> Sei X ein Hausdorff-Raum, sei $f: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ stetig. Sei P die Menge aller abg. Teilmengen von X. Dann existiert ein Suslin-Schema $u: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to P$ mit $A(u) = f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$

<u>Beweis</u> Für $s \in S$ setze $E_s = \{ a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid a_j = s_j \;\; j = 0,\ldots,m-1 \}$

$$s = (s_0, s_1, \ldots, s_{m-1})$$

sowie $u_s = \overline{f(E_s)} \subseteq X$ $\Rightarrow$ u ist Suslin-Schema.
Es folgt $f(a) \in u_a \Rightarrow f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \subseteq A(u)$
Ist $x \in A(u)$, so gibt es $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit

$$x \in u_a = u_{(a_0)} \cap u_{(a_0,a_1)} \cap \ldots$$

d.h. $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f(\{ b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid b_k = a_k \;\; k = 0,\ldots,n \})}$

<u>Beh</u> <u>$x = f(a)$</u> <u>Denn</u>: sei V Umgebung von x.

Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es $b(m) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit

$b_j = a_j$, $j = 0, \dots, m$ mit $f(b(m)) \in V$. Nun gilt

$\lim_m b(m) = a \Rightarrow \lim_m f(b(m)) = f(a) \Rightarrow f(a) \in \overline{V}$

Da $\{x\} = \bigcap \{ \overline{V} \mid V$ Umgebung von $x \}$ folgt $x = f(a)$. $\square$

Ist $x = f(a)$, so $a \in E_{(a_0, \dots, a_m)} \Rightarrow f(a) \in U_a$

<u>Fazit</u>: $f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = A(u)$. $\square$

21. <u>Satz</u> Sei X top. Raum, sei $A \subseteq X$. Dann gibt es eine Baire-messbare Menge B mit $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ so, dass jede Baire-messbare Teilmenge $Z \subseteq B - A$ mager ist.

<u>Beweis</u> Setze $\mathcal{U} = \{ U \subseteq X$ offen $\mid U \cap A$ mager $\}$, $W = \bigcup \mathcal{U}$. Nach Banachs Kategoriesatz § 3.4 ist $Y = A \cap W$ mager. Wir setzen

$$B = (X - W) \cup A = (X - W) \cup Y$$

Dann ist B Baire-messbar, $A \subseteq B$. Da $X - \overline{A} \in \mathcal{U}$ folgt $X - W \subseteq \overline{A} \Rightarrow B \subseteq \overline{A}$.

Ist $Z \subseteq B - A$ Baire-messbar, so gibt es $V \subseteq X$ offen so, dass $M = Z \triangle V$ mager ist.

Da $Z \cap A = \emptyset$ folgt $V \cap A \subseteq M \Rightarrow V \subseteq W$.

Da $Z \subseteq X - W$ ist $Z \cap V = \emptyset \Rightarrow Z \subseteq M$ mager. $\square$

22. Satz (Nikodym) Sei X top. Raum, sei P die Menge der Baire-messbaren Teilmengen von X, sei $u: S \to P$ ein Suslin-Schema. Dann ist $A(u) \subseteq X$ Baire-messbar.

Beweis Wir definieren ein Suslin-Schema $v: S \to P$ durch $v_{(s_0,\dots,s_{m-1})} = u_{(s_0)} \cap u_{(s_0,s_1)} \cap \dots \cap u_{(s_0,\dots,s_{m-1})}$

es folgt $u_a = v_a$ für $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und damit $A(v) = A(u)$.

Für $s \in \mathbb{N}^m$ sei $E_s = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid a_j = s_j \;\; j = 0,\dots,m-1\}$

$A_s = \bigcup\{v_a \mid a \in E_s\} \Rightarrow A_s \subseteq v_s$

Weiter führen wir formal das leere Tupel $()$ ein,

$E_{()} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $v_{()} = X \Rightarrow A_{()} = A(v)$. Für $s \in S \cup \{()\}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreibe $s.n = (s_0,\dots,s_{m-1},n)$

$s = (s_0,\dots,s_{m-1})$,

Nach §4.21 gibt es $B \subseteq X$ Baire-messbar mit $A_s \subseteq B \subseteq \bar{A}_s$, so dass alle $Z \subseteq B - A$, die Baire-messbar sind, mager sind.

Setze $B_s = B \cap v_s \Rightarrow A_s \subseteq B_s \subseteq \bar{A}_s$, $Z \subseteq B_s - A_s$ Baire-messbar $\Rightarrow Z$ mager.

Nun gilt $A_s = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{s\cdot n}$. Setze $M_s = B_s - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_{s,n}$.

Da $A_s \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} B_{s\cdot n}$ gilt, ist M_s mager.

Beh $B_{()} - M_{()} \subseteq A_{()} = A(u)$.

Denn Sei $x \in B_{()} - M_{()} = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_{(n)} \Rightarrow$

$x \in B_{(a_0)}$ für ein $a_0 \in \mathbb{N}$. Weiter $x \in B_{(a_0)} - M_{(a_0)}$

$\Rightarrow x \in B_{(a_0, a_1)}$ für ein $a_1 \in \mathbb{N}$ usw $\Rightarrow$

es gibt $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $x \in B_{(a_0)} \cap B_{(a_0,a_1)} \cap \ldots \subseteq V_a \subseteq A(u)$ $\square$

Da $M_{()}$ mager ist und $B_{()} - A_{()} \subseteq M_{()}$ ist $A_{()}$

Baire-messbar. $\square$

Korollar (Lusin-Sierpiński?) Sei X Polnischer Raum, sei Y Hausdorffsch, sei $f: X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X) = A \subseteq Y$ Baire-messbar.

Beweis Nach §4,19 ist OE $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Nach §4.20 gibt es ein Suslin-Schema $S \xrightarrow{u} \{L \subseteq Y \mid L \text{ abg}\}$ mit $f(X) = A(u)$. Nach 4.22 ist $A(u)$ dann Baire-messbar. $\square$

\# 25.6.

23. <u>Theorem</u> (Der Satz von der offenen Abbildung, II).

Sei G eine Polnische Gruppe, sei K eine Hausdorffsche top. Gruppe, sei $f: G \to K$ ein Morphismus. Wenn $f(G)$ nicht mager ist, so ist f offen.

<u>Beweis</u> Sei $N = \ker(f)$. Dann ist G/N Polnisch nach §4.14, denn: $Z \subseteq G$ abzählbar + dicht $\Rightarrow$ $p(Z) \subseteq G/N$ abzählbar und dicht. Betrachte $\bar{F}: G/N \to K$.
Also OE: f ist injektiv. Angenommen, $f(G) \subseteq K$ ist nicht mager. Da $f(G)$ Baire-messbar ist, ist $f(G)$ nach Pettis Lemma §3.9 offen. Ersetze K durch $f(G)$ und zeige, dass f ein Homöomorphismus ist.

Sei $U \subseteq G$ Einsumgebung. Dann existiert eine abg. Einsumgebung $V \subseteq G$ mit $V^{-1} \circ V \subseteq U$. Weiter ist $f(V) = E$ Baire-messbar (weil V abg. in G, also Polnisch).
Da G separabel ist, gibt es eine abz. dichte Menge $Z \subseteq G$. $\Rightarrow$ $G = \bigcup\{zV \mid z \in Z\}$ $\Rightarrow$ $K = \bigcup\{f(zV) \mid z \in Z\}$ $\Rightarrow$ ein $f(zV)$ ist nicht mager $\Rightarrow$ E ist nicht mager $\overset{\text{Pettis}}{\Rightarrow}$ $E^{-1} \circ E \subseteq f(U)$ ist Einsumgebung in K $\Rightarrow$ f^{-1} ist stetig beim Neutralelement $\Rightarrow$ f^{-1} ist stetig nach §1.3. $\square$

<u>Korollar</u> Sei $f: G \to K$ ein surjektiver Morphismus von Polnisch Gruppen. Dann ist f offen. Insbesondere: f bijektiv $\Rightarrow$ f Isomorphismus □

<u>Erinnerung</u>. $G = \mathbb{R}$ mit diskreter Topologie $\Rightarrow$ G vollst. metr., <u>nicht</u> Polnisch, $id: G \to \mathbb{R}$ stetiger Morphismus, <u>nicht</u> offen.

24. <u>Theorem</u> (Der Satz vom abg. Graphen, II).

Seien G, K Polnisch Gruppen, sei $f: G \to K$ ein abstrakter Homomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) f ist ein Morphismus

(ii) Der Graph von f ist abg. in $G \times K$

(iii) Der Graph von f ist G_δ-Menge in $G \times K$.

<u>Klar</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii), da in metr. Räumen jede abg. Menge eine G_δ-Menge ist.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $H = \{(g, f(g)) \mid g \in G\} \subseteq G \times K$ ist G_δ-Untergruppe, $G \times K$ ist Polnisch $\Rightarrow$ H abg nach §4.16. Betrachte

$$H \xrightarrow{f} G, \quad (g, f(g)) \mapsto g$$

$\Rightarrow$ f ist stetig, also Isomorphismus $\Rightarrow$ $g \mapsto (g, f(g))$ stetig

$\Rightarrow$ $g \mapsto f(g)$ stetig □

25. Theorem (Satz von der offenen Abbildung, III).

Sei G Polnische Gruppe, sei K Hausdorffsche top. Gruppe, sei $f: G \to K$ ein Morphismus. Wenn für jede Einsumgebung $V \subseteq G$ die Menge $\overline{f(V)} \subseteq K$ nicht leeres Inneres hat, so ist f offen.

Beweis Nach §4.21 genügt es zu zeigen, dass $f(G)$ nicht mager ist.

Angenommen, $f(G) \subseteq K$ ist mager $\Rightarrow$ es gibt abg. Mengen $A_n \subseteq K$ mit nichtleerem Innern mit $f(G) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Setze $B_n = f^{-1}(A_n) \Rightarrow G = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$. Da G nicht mager ist, gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq B_m$ offen, $U \neq \emptyset$. Für $g \in U$ ist $g^{-1}U$ Einsumgebung $\Rightarrow$ $\overline{f(g^{-1}U)}$ hat nicht leeres Inneres $\Rightarrow$ $\overline{f(U)}$ hat nicht leeres Inneres $\Rightarrow$ A_m hat nicht leeres Inneres ↯

$\square$