# 1. Übungszettel zur Vorlesung „Topologische Gruppen“

SoSe 2020
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Daniel Keppeler
Philip Möller

---

**Aufgabe 1.1**
Zeige:

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Morphismus der topologischen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$. Dann gibt es $r \in \mathbb{R}$ so, dass $f(t) = rt$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Jeder Morphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ der topologischen Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ ist konstant.

**Aufgabe 1.2**
Sei $G$ eine topologische Gruppe und $N(e)$ die Menge der Einsumgebungen. Zeige, dass für jede Teilmenge $X \subset G$ der Abschluss $\overline{X}$ von $X$ gegeben ist durch

$$\overline{X} = \bigcap \{VX \mid V \in N(e)\}.$$

**Aufgabe 1.3**
Betrachte die topologische Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) Jede diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist zyklisch.

b) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist diskret.

**Aufgabe 1.4**
Beweise, dass auf den folgenden topologischen Räumen keine Struktur einer topologischen Gruppe definiert werden kann.

a) $[0, 1]$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Teilraumtopologie

b) $\mathbb{N}$ mit der kofiniten Topologie $\mathcal{T}_{cof} = \{U \subset \mathbb{N} \mid U = \emptyset \text{ oder } \#(\mathbb{N} - U) < \infty\}$

Abgabe bis: Donnerstag, den 30.04.2020, 8 Uhr online im Learnwebkurs