4. Übungszettel zur Vorlesung „Topologische Gruppen“

SoSe 2020
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Daniel Keppeler
Philip Möller

Aufgabe 4.1
Zeige: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ konvergiert gegen f in der kompakt-offenen Topologie genau dann, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 4.2
Sei V der Dualraum von $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die kompakt-offene Topologie auf $V \subseteq C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ mit der gewöhnlichen Topologie von V überein stimmt.

Aufgabe 4.3
Zeige:

a) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen vollständig regulären Räumen induziert eine stetige Abbildung $\beta f : \beta X \to \beta Y$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ \beta X \arrow[r, "\beta f"'] & \beta Y \end{tikzcd}$$

wobei i_X und i_Y wie in Aufgabe 3.4 definiert sind.
Hinweis: Für $\varphi \in \beta X$ und $h \in C(Y,[0,1])$ setze $\beta f(\varphi)(h) = \varphi(h \circ f)$.

b) Die Zuordnung $\beta : X \mapsto \beta X$ ist ein Funktor von der Kategorie der vollständig regulären Räume in die Kategorie der kompakten Hausdorffräume.
Hinweis: Schlage unbekannte Begriffe nach.

c) Ist X vollständig regulär, Y kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\bar{f} : \beta X \to K$, so dass $\bar{f} \circ i = f$.

Aufgabe 4.4
Sei (X,d) vollständig metrisch. Zeige:

a) Ist $U \subseteq X$ offen, so ist U vollständig metrisierbar.
Hinweis: Betrachte die Abbildung $h : U \to X \times \mathbb{R}$, $h(u) = (u, d(u, X - U))$.

b) Ist $Y \subseteq X$ eine G_δ-Menge (das heißt: Y ist abzählbarer Durchschnitt offener Mengen), so ist Y vollständig metrisierbar.

Abgabe bis: Freitag, den 22.05.2020, 8 Uhr online im Learnwebkurs