2. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und elementare Zahlentheorie“

SoSe 2017
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Cora Welsch

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)
Beweise oder widerlege

a) Aus $a|bc$ folgt $a|b$ oder $a|c$.

b) Aus $a|(b+c)$ folgt $a|b$ oder $a|c$.

c) Aus $a|bc$ und $a|b$ folgt $a|c$.

d) Aus $a|(b+c)$ und $a|b$ folgt $a|c$.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)
Für $a \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{P}$ Primzahl ist

$$\nu_p(a) = \begin{cases} \infty & \text{falls } a = 0, \\ \max\{k \in \mathbb{N} \mid \ p^k | a\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

Man nennt $\nu_p(a)$ die *p-adische Bewertung* von a.

i) Zeige: $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$ (mit der Rechenregel $\infty + l = \infty = \infty + \infty$).

ii) Wir definieren für $a \in \mathbb{Z}$

$$|a|_p = \begin{cases} 0 & \text{falls } a = 0, \\ p^{-\nu_p(a)} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

Man nennt $|a|_p$ den *p-adischen Absolutbetrag.*
Zeige: für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt

(1) $|a \cdot b|_p = |a|_p \cdot |b|_p$,
(2) $|a + b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\} \leq |a|_p + |b|_p$,
(3) $|a|_p = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)
Zeige, dass das 1. Induktionsprinzip aus dem 2. Induktionsprinzip folgt.

Bitte wenden.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)
Zeige per Induktion, dass $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ein Vielfaches von 13 ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 4.5.2017, 8 Uhr