

### 3. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und elementare Zahlentheorie“

SoSe 2017  
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer  
Cora Welsch

---

**Aufgabe 3.1** (4 Punkte)

Beweise, dass eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  genau dann ein Quadrat ist, wenn  $\nu_p(n)$  gerade ist für alle  $p \in \mathbb{P}$ .

**Aufgabe 3.2** (4 Punkte)

Wir definieren eine neue Menge von Zahlen  $Z := \{4n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Ein Element  $p \neq 1$  von  $Z$  nennen wir eine Promzahl, wenn die einzigen Zahlen  $z \in Z$ , die  $p$  teilen, 1 und  $p$  sind.

- i) Nenne die ersten zehn Promzahlen in  $Z$ .
- ii) Beweise, dass jede Zahl in  $Z$  als ein Produkt von Promzahlen geschrieben werden kann.
- iii) Zeige, dass diese Promfaktorzerlegung nicht notwendigerweise eindeutig ist.

**Aufgabe 3.3** (4 Punkte)

Sei  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Wenn gilt  $\text{ggT}(a, b) = 1$  und  $a|c$  und  $b|c$ , dann folgt  $ab|c$ .  
Hinweis: Dafür wird der Hauptsatz der Arithmetik nicht benötigt.

**Aufgabe 3.4** (4 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  und seien  $1 = k_1 < \dots < k_s = n$  die Teiler von  $n$ , (also  $\tau(n) = s$ ). Dann gilt  $k_1 \cdot \dots \cdot k_s = n^{s/2}$ .

Abgabe bis: Donnerstag, den 11.5.2017, 8 Uhr