Kommentar zu (IP2) $\Longrightarrow$ (IP1)

Die Übungsaufgabe

$$\text{(IP2) impliziert (IP1)}$$

war leider etwas unglücklich von mir ausgesucht. Ob sie lösbar ist hängt davon ab, was man über die geordnete Menge $(\mathbb{N}, <)$ voraussetzt. Unproblematisch ist die Ausage

$$\text{(IP2) impliziert (WP).}$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ *ein kleinstes Element* $a = \min(A)$ *hat. Sei also* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$*. Falls* $0 \in A$ *ist* $\min(A) = 0$ *und wir sind fertig. Andernfalls betrachte* $S = \mathbb{N} - A$*. Da* $0 \in S$ *und* $S \neq \mathbb{N}$ *gilt, gibt es ein* $a \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $t < a$ *gilt* $t \in S$*, aber* $a \notin S$*. Es folgt* $a = \min(A)$. $\square$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass (IP2) eine Konsequenz von (WP) ist. Also sind (IP2) und (WP) äquivalent. Da es wohlgeordnete Mengen gibt, die anders aussehen als [Teilmengen von] $\mathbb{N}$, kann man nicht *für angeordnete Mengen allgemein* zeigen, dass (IP1) aus (IP2) folgt. Man braucht irgendeine Zusatzinformation über die Menge $\mathbb{N}$. Wir benutzen folgende Eigenschaft von $\mathbb{N}$:

$$\text{Jedes } n \neq 0 \text{ hat einen Vorgänger } n-1.$$

Mit dieser Zusatzinformation kann man wie folgt zeigen, dass (IP1) aus (WP) folgt.

Sei $S \subseteq \mathbb{N}$ *eine Teilmenge mit* $0 \in S$*, die abgeschlossen ist unter Nachfolgern. Zu zeigen ist* $S = \mathbb{N}$*. Setzt* $A = \mathbb{N} \setminus S$*. Wenn* A *nicht leer ist, so existiert nach (WP) eine Element* $a = \min(A)$*. Es folgt* $a \neq 0$*, also ist* a *ein Nachfolger,* $a = n + 1$*. Es folgt* $n \in S$*, damit aber* $n + 1 = a \in S$*, ein Widerspruch. Folglich ist* $A = \emptyset$*.* $\square$

Wir benutzen also die Information, dass jede natürliche Zahl $n \neq 0$ einen Vorgänger $n - 1$ hat. Damit gilt (IP2) $\Longrightarrow$ (IP1).

L. Kramer