

1. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und elementare Zahlentheorie“

SoSe 2017
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Cora Welsch

Aufgabe 1.1 (8 Punkte)

Eine Relation R auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ der Menge der geordneten Paare (x, x') von Elementen aus M . Man schreibt $x \sim x'$, wenn $(x, x') \in R$. Die Relation \sim heißt Äquivalenzrelation, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

Reflexivität: Es gilt $x \sim x$ für alle $x \in M$,

Symmetrie: Es gilt $x \sim x'$ genau dann, wenn $x' \sim x$.

Transitivität: Aus $x \sim x'$ und $x' \sim x''$ folgt $x \sim x''$.

Beweise oder widerlege, dass die folgenden Mengen zusammen mit den gegebenen Relationen Äquivalenzrelationen sind.

- i) Sei $M = \mathbb{R}$ und für $a, b \in M$ gelte $a \sim b \Leftrightarrow a < b$.
- ii) Sei $M = \mathbb{R}$ und für $a, b \in M$ gelte $a \sim b \Leftrightarrow a \leq b$.
- iii) Sei $M = \mathbb{R}$ und für $a, b \in M$ gelte $a \sim b \Leftrightarrow a = b$.
- iv) Sei $M = \mathbb{R}$ und für $a, b \in M$ gelte $a \sim b \Leftrightarrow a \neq b$.
- v) Sei M die Menge aller Menschen. Person A und B sind in Relation (\sim), wenn A und B sich kennen.
- vi) Sei $M = \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$ fest. Für $a, b \in M$ gilt $a \sim b \Leftrightarrow m|(a - b)$ (d.h. m teilt $a - b$).
- vii) Sei M die Menge aller Geraden in der Ebene und für $g, h \in M$ gelte $g \sim h \Leftrightarrow g \parallel h$ (d.h. g ist parallel zu h).
- viii) Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Finde eine Menge und Relation, die

- a) nur symmetrisch und transitiv ist,
- b) nur transitiv ist,
- c) nur reflexiv und transitiv ist,
- d) nur reflexiv und symmetrisch ist.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Es war kurz vor Ostern und der Osterhase will seinen Bestand an Eiern überprüfen. Auf dem Weg in den Keller kommt ihm eine seiner Arbeiter-Hennen aufgeregt entgegen. Sie gackert etwas davon, dass alle Beschriftungen der Körbe falsch sind und verschwindet. Der Osterhase geht in sein Lager, in dem drei Körbe mit Deckeln stehen. In den Körben liegen bemalte Eier. Der Osterhase weiß, dass in einem nur rote, in einem nur gelbe und in einem rote und gelbe Eier liegen (alle Eier sind einfarbig). Die Deckel sind mit rot, gelb und rot-gelb beschriftet. Der Osterhase nimmt nur ein Ei aus einem Korb ohne hinein zu sehen und weiß, was in welchem Korb enthalten ist. Wie hat er das gemacht?

Abgabe bis: Donnerstag, den 27.4.2017, 8 Uhr