

3. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

(**Abgabe:** bis Donnerstag 11.11.2010, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Feinere/größere Topologie, Unterraumtopologie, Produkttopologie, Hausdorff-Räume, Stetigkeit, kompakte Räume, abgeschlossene Abbildungen.

Aufgabe 3.1 (Unterraumtopologie, kompakte Räume)

Sei X ein topologischer Raum und I eine endliche Indexmenge. Weiter seien $U_i \subseteq X$ für $i \in I$ kompakt. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i \in I} U_i$ kompakt ist.

Aufgabe 3.2 (feinere/größere Topologie, Hausdorff-Räume, kompakte Räume)

- a) Seien \mathcal{T} und \mathcal{T}' Topologien auf der Menge X mit $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
- Wenn (X, \mathcal{T}) kompakt ist, dann ist auch (X, \mathcal{T}') kompakt.
 - Wenn (X, \mathcal{T}') kompakt ist, dann ist auch (X, \mathcal{T}) kompakt.
- b) Seien (X, \mathcal{T}) und (X, \mathcal{T}') kompakte Hausdorff-Räume. Dann gilt entweder $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ oder \mathcal{T} und \mathcal{T}' sind nicht vergleichbar.

Aufgabe 3.3 (Hausdorff-Räume, Produkttopologie)

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie folgende Aussage: X ist genau dann Hausdorffsch, wenn $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.4 (kompakte Räume, Schlauchlemma, Hausdorff-Räume, Stetigkeit, abgeschlossene Abbildungen)

- a) Seien X, Y topologische Räume. Weiter sei Y ein kompakter Raum. Zeigen Sie, dass die Projektion auf die erste Komponente

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$$

eine abgeschlossene Abbildung ist.

- b) Sei Y ein kompakter Hausdorff-Raum und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Weiter bezeichnen wir mit $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ den Graph von f . Zeigen Sie folgende Aussage: Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn $G_f \subseteq X \times Y$ abgeschlossen ist.

Hinweise: Für die Hinrichtung benutzen Sie Aufgabe 3.3 und schreiben Sie G_f als Urbild von $\Delta \subseteq Y \times Y$. Für die Rückrichtung zeigen Sie, dass die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind und benutzen Sie dafür Aufgabe 3.4 a).