Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 10/11

4. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

(**Abgabe:** bis Donnerstag 18.11.2010, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Zusammenhang, Eigenschaften von $\mathbb{R}$, Produkttopologie, durch Metrik induzierte Topologie, Vergleichbarkeit von Topologien, Stetigkeit

Aufgabe 4.1 (Zusammenhang, Existenz des Supremums)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie zusammenhängend ist.

Aufgabe 4.2 (Produkttopologie, feinere / gröbere Topologie)

Wir betrachten das abzählbar unendliche kartesische Produkt des Einheitsintervalls $[0,1]$ mit sich selbst:

$$[0,1]^\omega := \prod_{\mathbb{N}}[0,1] = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_n \in [0,1] \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

Wir betrachten die folgenden topologischen Räume:

$([0,1]^\omega, \mathcal{T}_\Pi)$
Dabei sei $\mathcal{T}_\Pi$ die Produkttopologie auf $[0,1]^\omega$, wobei $[0,1]$ mit der üblichen Topologie versehen ist.

$([0,1]^\omega, \mathcal{T}_\infty)$
Dabei sei $\mathcal{T}_\infty$ die durch die Supremumsmetrik d_∞ induzierte Topologie, wobei

$$d_\infty((x_i),(y_i)) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|.$$

$([0,1]^\omega \cap l_2, \mathcal{T}_2)$
Dabei sei $\mathcal{T}_2$ die durch die Euklidische Metrik d_2 induzierte Topologie, wobei

$$d_2((x_i),(y_i)) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|^2} \qquad \text{und} \qquad l_2 = \left\{ (x_i) \text{ reelle Folge} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

Untersuchen Sie die Topologien auf Vergleichbarkeit, d. h. bestimmen Sie für jedes Paar obiger Räume, welche Topologie auf dem jeweils gemeinsamen Punktraum feiner oder gröber ist oder ob sie nicht vergleichbar sind.

Aufgabe 4.3 (Produkttopologie, Stetigkeit)

Es sei X ein topologischer Raum und I eine Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei Y_i ein topologischer Raum und $f_i\colon X \to Y_i$ eine Abbildung. Wir definieren:

$$f\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i \ , \ x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$$

Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn f_i stetig ist für alle $i \in I$.

Aufgabe 4.4 (Produkttopologie, Zusammenhang, Cantormenge)

Es sei $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie versehen und $X := \prod_{\mathbb{N}} \{0,1\}$ mit der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende Teilmenge von X einelementig ist. Zeigen Sie weiter, dass einelementige Mengen in X jedoch nicht offen sind. Mit anderen Worten, X trägt nicht die diskrete Topologie. Folgern Sie, dass diese Ergebnisse ebenso für die Cantormenge gelten.

(*-Aufgabe)

Eine Menge heißt *perfekt*, wenn jeder Punkt ein Häufungspunkt ist. Zeigen Sie, dass die Cantormenge perfekt ist.