Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 10/11

# 6. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

(**Abgabe:** bis Donnerstag 9.12.2010, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

### Stichworte zur Vorbereitung

Gleichgradige Stetigkeit, Ascolis Theorem, Produkttopologie, Konvergenz, $\sigma$-Algebren, Borelalgebren, Nikolaus

**Aufgabe 6.1** (gleichgradige Stetigkeit, Ascolis Theorem)

Es sei $X$ ein kompakter topologischer Raum und $(Y, d)$ ein vollständiger metrischer Raum. Weiter sei $f_n\colon X \to Y$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f\colon X \to Y$ konvergiert, d. h. für jedes $x \in X$ gilt $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Zeigen Sie: Ist die Menge $\{f_n \mid n \geq 0\}$ gleichgradig stetig, so ist $f$ stetig und $f_n$ konvergiert gegen $f$ im Raum $C(X, Y)$ bezüglich der Supremumsmetrik $d_\infty$.

**Aufgabe 6.2** (Produkttopologie, Konvergenz in topologischen Räumen)

Es sei $M$ eine Menge und $X$ ein topologischer Raum. Der Raum aller Funktionen $\{f\colon M \to X\}$ kann kanonisch mit dem Produkt $\prod\limits_M X$ identifiziert werden (wieso?).

Zeigen Sie: Eine Folge von Funktionen $f_n\colon M \to X$ konvergiert genau dann punktweise gegen eine Funktion $f\colon M \to X$ (d. h. für jedes $m \in M$ konvergiert $(f_n(m))_n$ in $X$), wenn sie bezüglich der Produkttopologie auf $\prod\limits_M X$ gegen $f$ konvergiert.

**Aufgabe 6.3** (Algebren und $\sigma$-Algebren)

Es sei $M = \{1, 2, 3\}$. Weiter seien $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, M\}$ und $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, M\}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind $\sigma$-Algebren auf $M$.

(ii) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ sind $\sigma$-Algebren auf $M$.

**Aufgabe 6.4** ((erzeugte) $\sigma$-Algebren, Borelalgebren, Produkte)

Es sei $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie versehen und $\mathcal{B}$ sei die Borelalgebra auf $\mathbb{R}$. Wir definieren $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ als die vom Mengensystem $\{A \times B \mid A, B \in \mathcal{B}\}$ erzeugte $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^2$. Weiter sei $\mathbb{R}^2$ mit der Produkttopologie versehen und $\mathcal{B}_2$ sei die Borelalgebra auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{B}_2$ gilt.

*Hinweis:* Überlegen Sie sich zunächst, dass $\mathbb{R}$ (und damit auch $\mathbb{R}^2$) eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Suchen Sie dann geeignete Mengensysteme, die ebenfalls die $\sigma$-Algebren $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}_2$ erzeugen.

**Nikolausaufgabe** (Nikolaus, Geschenke, Rentiere, $\sigma$-Algebren)

Am Vorabend des Nikolaustages sind die Geschenke des Nikolauses alle fein säuberlich geordnet. Das war harte Arbeit, aber immerhin hatte er ein Jahr Zeit dafür. Andererseits handelt es sich auch um eine ganze Menge Geschenke – fast schon um eine *Un*menge, also eine echte Klasse, aber soweit lässt es der Nikolaus dann lieber doch nicht kommen. Bei der Ordnung seiner Geschenke hat er sich ein ganz besonderes System ausgedacht: Er fasst die Geschenke zu allen möglichen Teilmengen zusammen, z. B. die Geschenke für kleine Kinder, die für große Kinder, für gescheite Kinder, für blöde Kinder, usw. Manchmal sind auch mehrere Eigenschaften gleichzeitig zu erfüllen, etwa die Geschenke für kleine dicke, aber nicht blonde Kinder. Umgekehrt sind andere Geschenke universell genug, dass sie sowohl für große leise Kinder als auch für kleine laute geeignet sind.
Vor einigen Jahren hat ein aufgewecktes Kind den Nikolaus darüber aufgeklärt, dass sein System von Geschenkteilmengen eine $\sigma$-Algebra bildet. Seither muss das Kind zwar ohne Nikolausgeschenke leben, aber insgeheim war der Nikolaus doch beeindruckt. Daher kann man seine Aufgebrachtheit verstehen, als während eines kurzen Moments der Unaufmerksamkeit seine Horde Rentiere im Zuge eines Einkriege-Spieles durchs Zimmer rast und alle Geschenke durcheinanderwirbelt. Es handelt sich dabei um eine Permutation der Geschenke, also eine Bijektion der Geschenkmenge auf sich, doch für solche Überlegungen hat der Nikolaus momentan keinen Nerv. Er ist wütend, dass seine schöne $\sigma$-Algebra kaputt ist, und fragt sich ernsthaft, ob sich seine Rentiere überhaupt rentieren.
Nach einigen Gläsern Glühwein sieht die Welt schon wieder anders aus, und der Nikolaus besieht sich den Schaden erst mal genauer. Freudig stellt er fest, dass einige Geschenke an ihrem Platz geblieben sind. Außerdem gibt es einige Teilmengen, bei denen die Geschenke nur innerhalb der Teilmenge permutiert wurden. Und plötzlich triff den Nikolaus der Blitz der Erkenntnis: Wenn er genau die Teilmengen seiner Geschenke betrachtet, die unter der Permutation invariant geblieben sind (als Menge, nicht unbedingt elementweise), dann bilden diese Teilmengen eine $\sigma$-Algebra. Hocherfreut sieht der Nikolaus die Situation gerettet und kann sich auf das Verteilen der Geschenke vorbereiten.

Wenn Sie den maßtheoretischen Fähigkeiten des heiligen Mannes nicht nachstehen wollen, dann beweisen Sie die obige Aussage, d. h.: Ist $G$ eine Menge von Geschenken und $\varphi\colon G \to G$ eine Bijektion induziert durch Rentiere, so ist $\mathcal{A} = \{A \subseteq G \mid \varphi(A) = A\}$ eine $\sigma$-Algebra auf $G$.

Und an alle, denen Topologie besser gefallen hat als Maßtheorie, hat der Nikolaus ebenfalls gedacht: Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Topologie auf $G$ ist.