Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 10/11

7. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

(**Abgabe:** bis Donnerstag 16.12.2010, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Messräume, Maßräume, Cauchy-Folgen, konvergente Folgen, Gruppen

Aufgabe 7.1 (Messräume, Maßräume)

i) Seien $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie die folgende Gleichheit von σ-Algebren:
$$(g \circ f)_*(\mathcal{A}) = g_*(f_*(\mathcal{A})).$$

ii) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, Y eine Menge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren eine Abbildung:
$$f_*\mu : f_*(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$$
wie folgt:
$$B \mapsto \mu(f^{-1}(B)).$$
Zeigen Sie, dass $(Y, f_*(\mathcal{A}), f_*\mu)$ ein Maßraum ist.

Aufgabe 7.2 (Messräume)

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Weiter definieren wir $\mathcal{A}|Y := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{A}\}$. Zeigen Sie, dass $(Y, \mathcal{A}|Y)$ ein Messraum ist. Die σ-Algebra $\mathcal{A}|Y$ über Y heißt die von $\mathcal{A}$ auf Y induzierte σ-Algebra.

Aufgabe 7.3 (messbare Abbildungen, Cauchy-Folgen, konvergente Folgen)

Seien $(X, \mathcal{A})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ Messräume, wobei $\mathcal{B}$ die Borelalgebra auf $\mathbb{R}$ ist, die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ erzeugt wird. Weiter sei $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Menge
$$B := \{x \in X \mid (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert } \}$$
messbar ist.

Hinweise: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir definieren
$$X_{n,m} := \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon\}.$$
Zeigen Sie zuerst, dass $X_{n,m}$ eine messbare Menge ist. Weiter definieren wir
$$X_N(\epsilon) := \bigcap_{m \geq N} X_{N,m}(\epsilon) \quad \text{für } N \in \mathbb{N},$$
$$X(\epsilon) := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N(\epsilon),$$
$$X_* := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X\Big(\frac{1}{k}\Big).$$
Zeigen Sie, dass X_* eine messbare Menge ist und dass $X_* = B$ gilt.

Aufgabe 7.4 (Maßräume)

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Abbildung, die folgenden Eigenschaften genügt:

i) Es gilt $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Seien $A_1, \dots A_n$ paarweise disjunkte messbare Mengen, dann gilt $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, d.h. μ ist endlich additiv.

iii) Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von messbaren Mengen, dann gilt $\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \lim_k \mu(A_k)$.

Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist.

***-Aufgabe** (Gruppen)

Die Menge $\mathbb{R}$ ist mit Addition eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass man diese Addition nicht zu einer Gruppenstruktur auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fortsetzen kann.

Hinweis: Betrachten Sie $1 + \infty$.