Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 10/11

9. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

Diese Aufgaben werden **nicht** mehr abgegeben, sondern in den folgenden Übungen besprochen.

Stichworte zur Vorbereitung

Stetigkeit, charakteristische Funktion, Lebesguemaß, Lebesgue-integrable Funktion, Lebesgue-Integral, $\|\cdot\|_1$-Norm

Aufgabe 9.1 (Stetigkeit, charakteristische Funktion, Lebesguemaß)

(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ stetig mit $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = 0$, wobei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie, dass dann f die Nullfunktion ist.

(ii) Gilt die Aussage in (i) auch, wenn f nicht als stetig vorausgesetzt wird? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 9.2 (Eigenschaften des Lebesguemaßes)

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Sei weiter $N \subseteq [0,1]$ eine Menge, welche genau einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse enthält. Zeigen Sie, dass N nicht Lebesgue-messbar ist.

Hinweise: Nehmen Sie an, dass N Lebesgue-messbar ist. Definieren Sie:

$$N_q := \{n + q \mid n \in N\} \qquad \text{und} \qquad V := \bigcup_{q \in I} N_q \quad \text{mit} \quad I := [-2,2] \cap \mathbb{Q}$$

Zeigen Sie dann, dass für $\lambda(V)$ nur zwei Werte in Frage kommen können. Zeigen sie weiter, dass $[0,1] \subseteq V \subseteq [-2,3]$ gilt und folgern Sie, dass die beiden potentiellen Werte für $\lambda(V)$ unmöglich sind.

Aufgabe 9.3 ((Lebesgue-)integrable Funktionen, Integral, $\|\cdot\|_1$-Norm, Satz von Fubini)

Es sei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$. Für zwei integrable Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir ihre *Faltung* $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t) g(x-t) d\lambda(t)$$

(Dabei bedeutet die Notation $d\lambda(t)$ nichts anderes als $d\lambda$ mit der Zusatzangabe, bezüglich welcher Variable integriert wird.)

Zeigen Sie, dass $f * g$ wohldefiniert ist, also dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $t \mapsto f(t)g(x-t)$ integrabel ist. Zeigen Sie weiter, dass $f * g$ wiederum integrabel ist und dass gilt: $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Hinweis: Benutzen Sie folgende Version des *Satzes von Fubini*, der demnächst Teil der Vorlesung sein wird:

Es sei $h\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrable Funktion. Dann ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $y \mapsto h(x,y)$ integrabel. Weiter ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)d\lambda(y)$ integrabel, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} h(x,y)d\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)d\lambda(y)d\lambda(x)$$

Dabei sind die Rollen von x und y vertauschbar.

Aufgabe 9.4 ((Lebesgue-)integrable Funktionen, Integral)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrable Funktion. Mit $B_r(p)$ bezeichnen wir die (offene) Kugel mit Mittelpunkt p und Radius r, also $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - p\| < r\}$, wobei $\|\cdot\|$ die gewöhnliche Euklidische Norm bezeichnet. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Wenn für jedes $r > 0$ und jedes $p \in \mathbb{R}^n$ gilt $\int_{B_r(p)} f d\lambda = 0$, dann ist $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Wenn für jedes $r > 0$ gilt $\int_{B_r(0)} f d\lambda = 0$, dann ist $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.