Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 10/11

2. Quiz zur Analysis III

am Freitag 14.01.2011 in der Vorlesung, Abgabe in die Briefkästen
Version 1

Name: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 1 Es existiert ein Homöomorphismus zwischen den Intervallen $(0,1)$ und $[0,1]$.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 2 Sei X ein topologischer Raum. Der Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung von X auf den diskreten Raum $\{0,1\}$ gibt.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 3 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist mit der koendlichen Topologie zusammenhängend.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 4 Seien X, Y topologische Räume, I eine unendliche Indexmenge, A_i für $i \in I$ abgeschlossen und $\bigcup_{i\in I} A_i = X$. Weiter sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $f_{|A_i} : A_i \to Y$ für $i \in I$ stetig. Dann ist f in jedem Fall stetig.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 5 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ Teilmenge. Die Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn die Häufungspunkte von A in A enthalten sind.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 6 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ Teilmenge mit der Teilraumtopologie versehen. Dann ist die Inklusion $i : A \to X$ stetig.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 7 Seien X, Y topologische Räume, Y hausdorffsch, X kompakt und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 8 Sei X ein metrischer Raum. Der Raum X ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 9 Sei I eine unendliche Indexmenge und X_i für $i \in I$ topologische Räume. Sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie versehen. Dann hat die Produkttopologie eine Basis $\mathcal{B}$ folgender Form: Die Elemente $U \in \mathcal{B}$ sind $U = \prod_{i\in I} U_i$ mit $U_i \subseteq X_i$ offen.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 10 Sei I eine beliebige Indexmenge und X_i für $i \in I$ Hausdorff-Räume. Dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ hausdorffsch.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 11 Der topologischer Raum $X = \prod_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} [2,3]$ ist mit der Produkttopologie kompakt.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 12 Es existiert keine stetige surjektive Abbildung $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 13 Sei X ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ abgeschlossene disjunkte Mengen. Dann existiert eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 14 Sei X kompakt und (Y, d_Y) vollständig. Weiter sei $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ endlich. Dann ist der Abschluss von $\mathcal{F}$ in $C(X, Y)$ bezüglich der Supremumsnorm kompakt.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 15 Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist eine Borelmenge in $\mathbb{R}$.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 16 Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist f eine Borel-messbare Abbildung.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 17 Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Borel-messbare Abbildung. Dann ist f stetig.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 18 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und (Y, d) ein metrischer Raum. Weiter sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wenn eine Folge $(f_j)_{j \in J}$ messbarer Funktionen in $M(X, Y)$ existiert die punktweise gegen f konvergiert, dann ist f messbar.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 19 Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $M_k \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Dann ist die Vereinigung $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} M_k \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 20 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

i) $\mu(\emptyset) = c \in [0, \infty)$

ii) Sei I eine abzählbare Indexmenge und $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in I$ messbar, $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l$, so gilt $\mu(\bigcup\limits_{n \in I} A_n) = \sum\limits_{n \in I} \mu(A_n)$.

Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 21 Sei X ein Maßraum und $A \subseteq X$ eine Nullmenge. Weiter sei $B \subseteq A$ messbar. Dann ist B eine Nullmenge.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 22 Sei X ein Messraum und $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + h(x)$ für alle $x \in X$. Falls f nicht messbar ist, so ist mindestens eine der Funktionen g, h nicht messbar.

□ richtig □ falsch

Aufgabe 23 Sei X ein Maßraum und $f \in \mathrm{Step}(X, \mathbb{R})$ mit $\|f\|_1 = 0$. Dann ist f die Nullfunktion.

□ richtig □ falsch