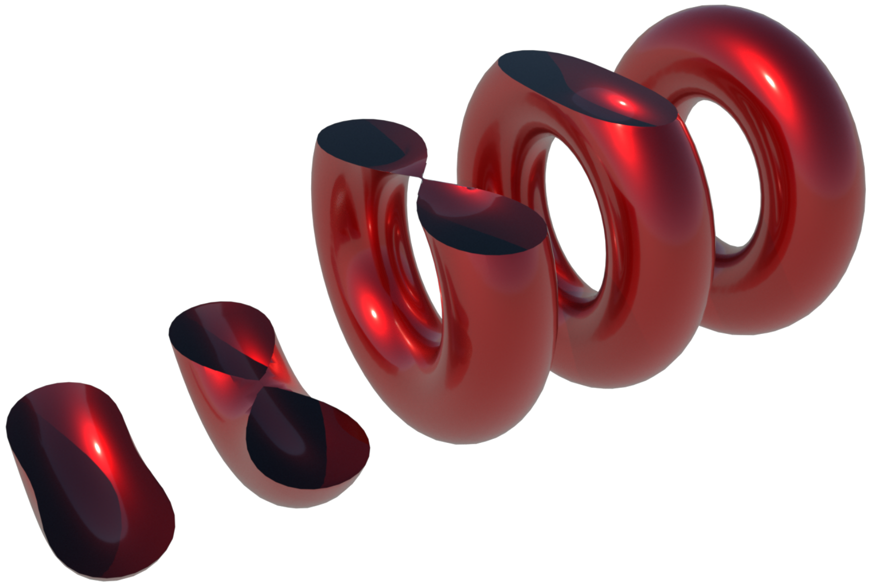
Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
SoSe 20

Seminar zur Morsetheorie

Vortragsprogramm

Die Morsetheorie kann man als eine Verallgemeinerung der Theorie von kritischen Werten glatter Funktionen im euklidischen Raum verstehen. Das Auftreten und die Art der kritischen Werte einer generischen glatten Funktion auf einer Mannigfaltigkeit liefert sehr viel Information über die Topologie der Mannigfaltigkeit.



Die Theorie hat eine Bandbreite an Anwendungen, wie etwa die Untersuchung von Geodäten auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, der Beweis, dass Wegeräume den Homotopietyp eines CW-Komplexes haben, sowie Bott-Periodizität.

Anspruch der Vortragsthemen auf einer Skala von $\star$ bis $\star\star\star$.

Endlichdimensionale Morse-Theorie

Für die folgenden Vorträge sollte man wissen, was eine Mannigfaltigkeit ist und mit Homotopien umgehen können. Für den dritten Vortrag sind grundlegende Kenntnisse über Homologie hilfreich. Die Vorträge sind meist elementar, aber an manchen Stellen technisch, deswegen ist es wichtig, sie sauber auszuarbeiten.

1. *Grundlagen der Morsetheorie* (Moritz Röttger):* Ziel dieses und des nächsten Vortrag ist es, zu zeigen, dass jede Mannigfaltigkeit eine Henkelzerlegung besitzt. In

diesem Vortrag soll die grundlegende Technik motiviert und an Beispielen veranschaulicht werden (Bilder sind hier sehr hilfreich). Definition und Existenz von Morsefunktionen, kritische Werte und Index, Morselemma [Mil73, §1–2]. Gegebenenfalls können grundlegende Definitionen wiederholt werden

2. *Homotopietyp von Subniveaumengen*** *(Timm Boyens):* Struktur der Subniveaumengen von Mannigfaltigkeiten unter Morsefunktionen. Ankleben eines Henkels definieren, Beweis der Fundamentaltheoreme der Morse-Theorie [Mat02, Theorem 3.1 & 3.2]. Beweis der Existenz einer Henkelzerlegung einer geschlossenen Mannigfaltigkeit [Mat02, Theorem 3.4]. Danach benutze man [Mat02, Theorem 4.18], um zu zeigen, dass jede Mannigfaltigkeit den Homotopietype eines CW-Komplexes hat.

3. *Morse-Ungleichungen und weitere Anwendungen****:* Einführung der wesentlichen Begriffe aus der algebraischen Topologie [Hat02] für die Morse-Ungleichungen, Beweis der Morse-Ungleichungen ([Mil73], §4-5). Die Morse-Ungleichungen liefern eine untere Schranke für die Anzahl der kritischen Punkten einer Morse-Funktion mit vorgegebenem Index in Termen von Rängen von Homologiegruppen. Wenn noch genügend Zeit bleibt, können weitere Anwendungen gezeigt werden, wie etwa Reebs Theorem [Mil73, Theorem 4.1] oder die integale Homologie von $\mathbb{C}P^n$ [Mil73, §4].

Morse-Theorie des Wegeraums

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Energiefunktional als Morsefunktion auf dem unendlichdimensionalen Raum der Wege zwischen zwei Punkten in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die kritischen Punkte sind genau Geodäten und der Index ist die genau die Anzahl der konjugierten Punkte auf einer Geodäten.

4. *Morse-Indexsatz*** *(Christoph Holzke):* Kurze Wiederholung der Grundbegriffe der Differentialgeometrie, Definition des Wegeraums einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, erste und zweite Variationsformel, geometrische Interpretation, kritische Punkte des Energiefunktionals [Mil73, §11-13]. Dieser Vortrag kann eventuell weggelassen werden, wenn alle Teilnehmende genügend Vorkenntnisse in Differentialgeometrie haben. Die Hessesche des Energiefunktionals kann entweder in diesem oder im nächsten Vortrag eingeführt werden. Der Morse-Indexsatz sagt, dass die Anzahl der konjugierten Punkte (mit Vielfachheit) auf einer Geodäten γ gleich dem Index des Energiefunktionals im Punkt γ ist. Quellen sind [Mil73, §14-15] und [dC92, Chapter 11].

5. *Hauptsatz der Morsetheorie auf Wegeräumen*****:* Zunächst approximiert man den Wegeraum durch endlichdimensionale Modelle und beweist, dass diese den Homotopietyp endlichdimensionaler CW-Komplexe haben [Mil73, §16]. Danach vereinigt man die endlichdimensionalen Modelle und benutzt den Satz von Whitehead um zu zeigen, dass der ganze Wegeraum auch den Homotopietyp eines CW-Komplexes

hat [Mil73, Theorem 17.3]. Als wichtiges Beispiel gebe man die Zellen eines CW-Modells von ΩS^n an [Mil73, Corollary 17.4].

Anwendungen

Dieser Teil hängt sehr stark von den Interessen der Teilnehmenden ab. Ein wichtige Anwendung der Morse-Theorie von Wegeräumen für die (topologische) K-Theorie ist Botts ursprünglicher Beweis des Periodizitätstheorems der Homotopiegruppen von $U(n)$ und $O(n)$. Im folgenden sind Vorschläge für Vortragsthemen. Für die genauere Ausgestaltung der Vorträge sprechen Sie sich bitte rechtzeitig mit den Betreuern des Seminars ab.

6. *Liegruppen und Symmetrische Räume*** *(Thomas Golüke):* Im Vordergrund könnte der Beweis von [Mil73, Theorem 21.7] stehen, das eine Aussage über die Zellen eines CW-Modells des Schleifenraums einer kompakten, einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe G macht. Damit sieht man insbesondere die überraschende Aussage, dass $\pi_2 G = 0$.

7. *Bott-Periodizität für $O(n)$ und $U(n)$*****:* Periodizitätsaussagen über die Homotopiegruppen der orthogonalen und unitären Gruppe [Mil73, §23-24]. Der Beweis benutzt den Haupsatz der Morsetheorie, um die Topologie des Schleifenraums einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zu verstehen, deren Geodäten bekannt sind.

8. *Geschlossene Geodäten auf Mannigfaltigkeiten*****:* Hier können verschiedene Anwendungen der Morse-Theorie besprochen werden, z. B. Existenz von geschlossenen Geodäten. Etwa lässt sich zeigen, dass es für jede Riemannsche Metrik auf S^2 mindestens drei geschlossene Geodäten gibt.

9. *Morse-Homologie*****:* Mit einer Morsefunktion und einer Riemannschen Metrik lässt sich ein Kettenkomplex definieren, dessen Ketten von den kritischen Punkten der Morsefunktion erzeugt wird. Ein fundamentales Resultat ist, dass die Homologie dieses Komplexes isomorph zur singulären Homologie der Mannigfaltigkeit ist. Daraus lässt sich leicht ein neuer Beweis der Morse-Ungleichungen ableiten.

Literatur

[dC92] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian Geometry.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser, Boston, 1992.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Mat02] Yukio Matsumoto. *An Introduction to Morse Theory*, volume 208 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[Mil73] John Willard Milnor. *Morse Theory.* Number 51 in Annals of Mathematics Studies. Princeton Univ. Press, Princeton, 5. edition, 1973.

→ bei Fragen bitte E-Mail an raphael.reinauer@wwu.de