Unterraumendliche Dimensionsvektoren sternförmiger Köcher

Diplomarbeit

vorgelegt von
Angela Holtmann

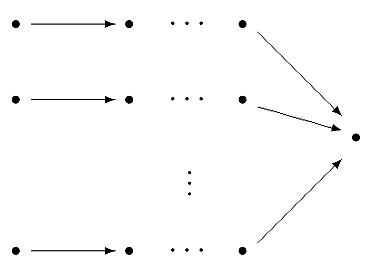
Fakultät für Mathematik
der
Universität Bielefeld
Dezember 1999

Inhaltsverzeichnis

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. C. M. Ringel und Dr. T. Brüstle für die sehr gute Betreuung und Unterstützung beim Schreiben dieser Arbeit bedanken.

Einleitung

Ein *Köcher* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ist gegeben durch eine *Punktmenge* Q_0, eine *Pfeilmenge* Q_1 und zwei Abbildungen $s, t : Q_1 \to Q_0$, die jedem Pfeil $\alpha \in Q_1$ seinen *Startpunkt* $s(\alpha)$ und seinen *Endpunkt* $t(\alpha)$ zuordnen. Man nennt einen Köcher *sternförmig*, wenn er von folgender Form ist:



Ist Q ein Köcher, so nennt man $D = (V_l, V_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ eine *Darstellung* des Köchers, wenn alle V_l Vektorräume über einem fest gewählten Körper K und alle $V_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ lineare Abbildungen sind. Damit läßt sich eine Darstellung auffassen als ein Element in

$$\prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(V_{s(\alpha)}, V_{t(\alpha)}).$$

Sei V ein Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und $(V_l)_{l \in Q_0}$ eine Menge von Untervektorräumen von V. Eine Darstellung eines sternförmigen Köchers Q wird *Unterraumdarstellung* genannt, wenn für alle $\alpha \in Q_1$ für die Vektorräume $V_{s(\alpha)} \subseteq V_{t(\alpha)}$ gilt und V_α die Inklusionsabbildung des Vektorraumes $V_{s(\alpha)}$ in den Vektorraum $V_{t(\alpha)}$ ist (vgl. auch Kapitel 1).

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß Q_0 eine endliche Menge und die Dimensionen aller Vektorräume V_l für $l \in Q_0$ über K endlich sind. Auf der Menge $\mathrm{rep}\, Q$ der Darstellungen eines Köchers Q ist eine Funktion

$$\underline{\dim} : \mathrm{rep}\, Q \to \mathbb{Z}^{|Q_0|}$$

gegeben, die jeder Darstellung ihren *Dimensionsvektor* zuordnet. Dabei wird $D = (V_l, V_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ abgebildet auf $(\dim_K V_l)_{l \in Q_0}$. Zwei Darstellungen $D_1 = (V_l, V_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ und $D_2 = (W_l, W_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ eines Köchers Q heißen *isomorph*, wenn es für jeden Punkt $l \in Q_0$ einen Isomorphismus $\varphi_l : V_l \to W_l$ von Vektorräumen gibt, so daß für alle $\alpha \in Q_1$ die entstehenden Diagramme

$$\begin{tikzcd} V_{s(\alpha)} \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\varphi_{t(\alpha)}"'] \\ W_{s(\alpha)} \arrow[r, "W_\alpha"'] & W_{t(\alpha)} \end{tikzcd}$$

kommutativ sind.

Ein Dimensionsvektor von Unterraumdarstellungen heißt *unterraumendlich*, wenn es zu ihm nur endlich viele Isomorphieklassen von Unterraumdarstellungen gibt.

Im folgenden sei Q ein sternförmiger Köcher. Man kann zeigen, daß jede Darstellung $D = (V_l, V_\alpha)_{l\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ des Köchers Q, bei der die V_α für alle $\alpha \in Q_1$ injektiv sind, isomorph zu einer Unterraumdarstellung ist (vgl. Kapitel 2).

Jede Darstellung läßt sich nach Krull-Remak-Schmidt (vgl. [8], S. 441) als direkte Summe von unzerlegbaren Darstellungen schreiben. Jede Unterraumdarstellung läßt sich sogar als direkte Summe von unzerlegbaren Unterraumdarstellungen schreiben (vgl. Kapitel 6). Die Dimensionsvektoren von Unterraumdarstellungen sind somit Summen von Dimensionsvektoren von unzerlegbaren Unterraumdarstellungen.

Auf $\mathbb{Z}^{|Q_0|}$ ist eine quadratische Form q definiert, die sogenannte *Titsform* (vgl. Kapitel 5). Kac hat in [6] gezeigt, daß es für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K zu $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^{|Q_0|}$

- keine unzerlegbare Darstellung mit Dimensionsvektor $\mathbf{d}$ gibt, wenn $q(\mathbf{d}) > 1$,
- höchstens eine Isomorphieklasse von unzerlegbaren Darstellungen mit Dimensionsvektor $\mathbf{d}$ gibt, wenn $q(\mathbf{d}) = 1$,
- keine oder unendlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren Darstellungen mit Dimensionsvektor $\mathbf{d}$ gibt, wenn $q(\mathbf{d}) \leq 0$.

Dieses Ergebnis wird bei der Klassifizierung der unterraumendlichen Dimensionsvektoren benutzt.

Die unterraumendlichen Dimensionsvektoren sternförmiger Köcher entsprechen den Tupeln von Kompositionen einer Zahl, die von endlichem Typ sind. Um den Zusammenhang zu erklären, wird zunächst noch eine Definition eingeführt:

Eine *Fahne* eines Vektorraumes V ist eine Kette

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_p = V$$

von Untervektorräumen von V. Für einen Vektorraum V und ein Tupel $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{N}_0^p$ sei $\ell(\mathbf{a}) = p$ und $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ die Menge der Fahnen

$$F = \big(0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_p = V\big)$$

von Untervektorräumen mit

$$\dim_K V_j/V_{j-1} = a_j$$

für $j = 1, \ldots, p$.

Man kann jedem k-Tupel

$$F = \Big(\big(0 \subseteq V_{11} \subseteq \cdots \subseteq V_{1,p_1} = V\big), \ldots, \big(0 \subseteq V_{k1} \subseteq \cdots \subseteq V_{k,p_k} = V\big)\Big)$$

von Fahnen eines Vektorraumes V folgende Unterraumdarstellung eines sternförmigen Köchers zuordnen:

$$\begin{tikzcd}
V_{11} \arrow[r] & V_{12} \cdots & V_{1,p_1-1} \arrow[dr] & \\
V_{21} \arrow[r] & V_{22} \cdots & V_{2,p_2-1} \arrow[r] & V = V_{1,p_1} = V_{2,p_2} = \ldots = V_{k,p_k}, \\
& \vdots & & \\
V_{k1} \arrow[r] & V_{k2} \cdots & V_{k,p_k-1} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

wobei als Abbildungen die Inklusionsabbildungen der Vektorräume gewählt werden. Umgekehrt liefert jede Unterraumdarstellung des Köchers Q ein Tupel von Fahnen eines Vektorraumes. Die Tupel von Fahnen entsprechen also bijektiv den Unterraumdarstellungen.

Die Gruppe $GL(V)$ operiert auf $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ durch

$$\begin{aligned}
*: \quad & GL(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \to \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \\
& g * \big(0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_p = V\big) \\
& := \big(0 = g(V_0) \subseteq g(V_1) \subseteq \cdots \subseteq g(V_p) = V\big).
\end{aligned}$$

Entsprechend operiert $GL(V)$ auf dem Produktraum $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$.

Es wird in Kapitel 2 gezeigt, daß zwei Tupel von Fahnen eines Vektorraumes V genau dann in derselben Bahn unter der Gruppenoperation von $GL(V)$ liegen, wenn die zugehörigen Unterraumdarstellungen isomorph sind.

Ein Tupel $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{N}_0^p$ heißt *Komposition* von $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $\sum_{j=1}^{p} a_j = n$ gilt. Falls sogar $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^p$ gilt, heißt $\mathbf{a}$ *strikte Komposition* von n. In Kapitel 3 wird gezeigt, daß Tupel von Kompositionen einer Zahl n bijektiv den Dimensionsvektoren von Unterraumdarstellungen eines Vektorraumes der Dimension n entsprechen.

Auf $\mathbb{Z}^{p_1+\ldots+p_k}$ kann man ebenfalls eine quadratische Form $\overline{q}$ definieren (siehe Kapitel 5). Für ein Tupel von Kompositionen einer Zahl nimmt die quadratische Form $\overline{q}$ denselben Wert an wie die quadratische Form q für den zugehörigen Dimensionsvektor von Unterraumdarstellungen.

Eine allgemeine Fragestellung ist, unter welchen Bedingungen es für eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ mit einer Gruppe G auf einer Menge X nur endlich viele Bahnen gibt. Bisher konnte dies nur in wenigen Fällen geklärt werden. Die Lösung für den Fall $G = GL(V)$ und $X = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$ wurde durch Magyar, Weyman und Zelevinsky in [9] gegeben. Dazu wird folgende Definition eingeführt: Ein k-Tupel $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$ von Kompositionen einer Zahl heißt *von endlichem Typ*, wenn die Gruppe $GL(V)$ nur endlich viele Bahnen in $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$ hat. Ein Tupel von Kompositionen einer Zahl ist genau dann von endlichem Typ, wenn der zugehörige Dimensionsvektor unterraumendlich ist (vgl. Kapitel 2).

Das Thema dieser Arbeit ist (wie in [9]) die Klassifikation der Tupel von Kompositionen einer Zahl, die von endlichem Typ sind, und damit die Klassifikation der unterraumendlichen Dimensionsvektoren. Es wird ein vollständiger Beweis für die Klassifikation der Tupel von Kompositionen einer Zahl, die von endlichem Typ sind, geliefert.

Zunächst kann man sich bei der Klassifikation der Tupel auf Tupel von *strikten* Kompositionen beschränken:

Ist eine Komposition $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ einer Zahl mit $a_j = 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, p\}$ und eine Fahne $F = \big(\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_p = V\big) \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ gegeben, so gilt $V_{j-1} = V_j$. Also kann man die Fahne auch als Element in $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}'}(V)$ mit

$$\mathbf{a}' := (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p)$$

auffassen, indem man V_j in der Kette der Unterräume streicht.

Weiterhin muß man nur *Tripel* von strikten Kompositionen betrachten. Denn ist ein Köcher mit vier oder mehr Armen gegeben, so gibt es zu einem Dimensionsvektor $\mathbf{d}$ von Unterraumdarstellungen des Köchers unendlich viele Isomorphieklassen, wenn er an mindestens vier Armen strikt aufsteigend ist. Das liegt daran, daß man in diesem Fall den gegebenen Dimensionsvektor als eine Summe von

$$\mathbf{d_1} := \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \mid & & \\ 1 & - & 2 & - & 1 \\ & & \mid & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

und einem weiteren Dimensionsvektor $\mathbf{d_2}$ von Unterraumdarstellungen schreiben kann. (Gegebenenfalls ist $\mathbf{d_1}$ durch Nullen zu ergänzen.) Da es zu $\mathbf{d_1}$ unendlich viele Isomorphieklassen von Unterraumdarstellungen gibt, gibt es auch zu $\mathbf{d}$ unendlich viele Isomorphieklassen von Unterraumdarstellungen (vgl. Kapitel 7). Ist eine einzelne Komposition $\mathbf{a}$ einer Zahl n bzw. ein Paar $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ von Kompositionen einer Zahl n gegeben, so kann man daraus durch Bildung von $((n), (n), \mathbf{a})$ bzw. $((n), \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ein Tripel von Kompositionen von n erzeugen. Das Tripel ist genau dann von endlichem Typ, wenn $(\mathbf{a})$ bzw. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ von endlichem Typ ist.

Eine explizite Beschreibung der Tripel von strikten Kompositionen einer Zahl, die von endlichem Typ sind, liefert der folgende Satz (vgl. [9], S. 2), dessen Beweis in Kapitel 8 gegeben wird.

Satz. *Ein Tripel $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ strikter Kompositionen einer Zahl n mit $\ell(\mathbf{a}) = p \leq \ell(\mathbf{b}) = q \leq \ell(\mathbf{c}) = r$ ist von endlichem Typ genau dann, wenn es einer der folgenden Bedingungen genügt:*

$(A_{q,r})$	$(p, q, r) = (1, q, r),\ 1 \leq q \leq r$
(D_{r+2})	$(p, q, r) = (2, 2, r),\ 2 \leq r$
(E_6)	$(p, q, r) = (2, 3, 3)$
(E_7)	$(p, q, r) = (2, 3, 4)$
(E_8)	$(p, q, r) = (2, 3, 5)$
$(E^{(a)}_{r+3})$	$(p, q, r) = (2, 3, r),\ 3 \leq r,\ \min(\mathbf{a}) = 2$
$(E^{(b)}_{r+3})$	$(p, q, r) = (2, 3, r),\ 3 \leq r,\ \min(\mathbf{b}) = 1$
$(S_{q,r})$	$(p, q, r) = (2, q, r),\ 2 \leq q \leq r,\ \min(\mathbf{a}) = 1$

Die ersten Fälle in diesem Satz beschreiben die Situation, daß der zugehörige Köcher ein Dynkin-Köcher, also von der Form $\mathbb{A}_{q,r}$, $\mathbb{D}_{r+2}$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ oder $\mathbb{E}_8$ ist. Da es in diesen Fällen nur endlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren Darstellungen gibt, muß das Tripel von endlichem Typ sein. In den anderen Fällen wird durch die Bedingungen an die Länge der Arme und die Dimensionssprünge entlang der Arme sichergestellt, daß man bei einer Unterraumdarstellung mit einem Dimensionsvektor dieser Form keine Unterraumdarstellung mit einem der kritischen Dimensionsvektoren von $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$ oder $\tilde{\mathbb{E}}_8$ abspalten kann, zu denen es unendlich viele Isomorphieklassen von Unterraumdarstellungen gibt (vgl. [3]). Zu zeigen ist dann noch, daß die Tripel von Kompositionen in den Fällen $(E^{(a)}_{r+3})$, $(E^{(b)}_{r+3})$ und $(S_{q,r})$ tatsächlich von endlichem Typ sind. Dies geschieht mit Hilfe der quadratischen Form $\overline{q}$, die in diesen Fällen positiv ist.

1 Grundlagen und Notationen

1.1 Notationen

In der gesamten Arbeit sei vorausgesetzt, daß K ein algebraisch abgeschlossener Körper und V ein Vektorraum der Dimension n über dem Körper K ist.

Mit $\mathbb{N}$ wird die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen und mit $\mathbb{N}_0$ die Menge $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichnet.

Die Komposition zweier Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ wird mit $g \circ f$ bezeichnet.

Die Vektoren in den auftretenden Vektorräumen werden als Spaltenvektoren geschrieben. Darstellende Matrizen zu linearen Abbildungen werden von links an die Vektoren multipliziert. Sind U, V und W Vektorräume über einem Körper K und haben die linearen Abbildungen $f : U \to V$ und $g : V \to W$ die darstellenden Matrizen A und B bzgl. fest gewählter Basen von U, V und W, so hat die Komposition $g \circ f : U \to W$ die darstellende Matrix BA bzgl. der Basen von U und W.

Für $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$ wird der Ausdruck

$$\min_{1 \leq j \leq p} a_j$$

zur Abkürzung mit $\min(\mathbf{a})$ bezeichnet.

1.2 Fahnenvarietäten und Unterraumdarstellungen

Im folgenden sei $Q = Q_{p_1,\ldots,p_k}$ ein sternförmiger Köcher mit k Armen:

$$\begin{tikzcd}
\overset{(1,1)}{\bullet} \arrow[r] & \overset{(1,2)}{\bullet} & \cdots & \overset{(1,p_1-1)}{\bullet} \arrow[ddr] & \\
\overset{(2,1)}{\bullet} \arrow[r] & \overset{(2,2)}{\bullet} & \cdots & \overset{(2,p_2-1)}{\bullet} \arrow[dr] & \\
 & & & & \bullet \; (1,p_1) = (2,p_2) = \cdots = (k,p_k) \\
 & & \vdots & & \\
\underset{(k,1)}{\bullet} \arrow[r] & \underset{(k,2)}{\bullet} & \cdots & \underset{(k,p_k-1)}{\bullet} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Im folgenden seien $\mathbf{a_i} \in \mathbb{N}^{p_i}$ für $i = 1, \ldots, k$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^p$ gegeben.

Wir definieren nun eine Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$ in die Kategorie $\operatorname{rep} Q$ der Darstellungen des Köchers Q auf folgende Weise:

Ein Element $F \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$ hat die Form

$$F = \big((0 \subseteq V_{11} \subseteq \cdots \subseteq V_{1,p_1} = V), \ldots, (0 \subseteq V_{k1} \subseteq \cdots \subseteq V_{k,p_k} = V)\big).$$

Diesem wird die folgende Darstellung $\mathcal{F}(F)$ zugeordnet, wobei die Abbildungen $\iota_{i,j_i} : V_{i,j_i} \to V_{i,j_i+1}$ durch die Inklusionsabbildungen der Vektorräume gegeben sind:

$$\begin{tikzcd}
V_{11} \arrow[r] & V_{12} \cdots & V_{1,p_1-1} \arrow[dr] & \\
V_{21} \arrow[r] & V_{22} \cdots & V_{2,p_2-1} \arrow[r] & V = V_{1,p_1} = V_{2,p_2} = \ldots = V_{k,p_k}. \\
 & \vdots & & \\
V_{k1} \arrow[r] & V_{k2} \cdots & V_{k,p_k-1} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Diese Darstellung ist eine Unterraumdarstellung. Umgekehrt erhält man auch für jede Unterraumdarstellung eines Köchers $Q_{p_1,\ldots,p_k}$ ein k-Tupel von Fahnen eines Vektorraumes.

2 Bahnen in Fahnenvarietäten und Isomorphie von Unterraumdarstellungen

Satz 2.1. *Zwei Tupel von Fahnen liegen genau dann in einer Bahn unter der Gruppenoperation von $GL(V)$, wenn die dazugehörigen Unterraumdarstellungen isomorph sind.*

Beweis. Seien

$$F_1 = \big((0 \subseteq V_{11} \subseteq \cdots \subseteq V_{1,p_1} = V), \ldots, (0 \subseteq V_{k1} \subseteq \cdots \subseteq V_{k,p_k} = V)\big)$$

und

$$F_2 = \big((0 \subseteq W_{11} \subseteq \cdots \subseteq W_{1,p_1} = V), \ldots, (0 \subseteq W_{k1} \subseteq \cdots \subseteq W_{k,p_k} = V)\big)$$

zwei Elemente in $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$, die in einer Bahn der Gruppenoperation der $GL(V)$ liegen. Dann existiert ein $g \in GL(V)$, so daß für alle $j_i = 1, \ldots, p_i$ und alle $i = 1, \ldots, k$ die Beziehung

$$W_{i,j_i} = g(V_{i,j_i})$$

gilt.

Alle Diagramme

$$\begin{tikzcd} V_{i,j_i} \arrow[r, "\iota_{i,j_i}"] \arrow[d, "g"'] & V_{i,j_i+1} \arrow[d, "g"'] \\ g(V_{i,j_i}) \arrow[r, "\iota'_{i,j_i}"'] & g(V_{i,j_i+1}) \end{tikzcd}$$

sind kommutativ, weil für alle $v \in V_{i,j_i}$, für alle $j_i = 1, \ldots, p_i - 1$ und für alle $i = 1, \ldots, k$ die Gleichung

$$g(\iota_{i,j_i}(v)) = g(v) = \iota'_{i,j_i}(g(v))$$

erfüllt ist.

Seien nun umgekehrt D_1 und D_2 zwei isomorphe Unterraumdarstellungen von V. Dann existieren nach Kapitel 1.2 zwei Tupel F_1 und F_2 von Fahnen des Vektorraumes V mit der Eigenschaft, daß $D_1 = \mathcal{F}(F_1)$ und $D_2 = \mathcal{F}(F_2)$ gilt.

Da die Unterraumdarstellungen isomorph sind, existiert für jeden Punkt (i, j_i) ein Isomorphismus $\varphi_{i,j_i} : V_{i,j_i} \to V'_{i,j_i}$, so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} V_{i,j_i} \arrow[r, "\iota_{i,j_i}"] \arrow[d, "\varphi_{i,j_i}"'] & V_{i,j_i+1} \arrow[d, "\varphi_{i,j_i+1}"'] \\ V'_{i,j_i} \arrow[r, "\iota'_{i,j_i}"'] & V'_{i,j_i+1} \end{tikzcd}$$

kommutativ sind.

Für alle $v \in V_{i,j_i}$, für alle $j_i = 1, \ldots, p_i - 1$ und für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt

$$\varphi_{i,j_i+1}(v) = \varphi_{i,j_i+1}(\iota_{i,j_i}(v)) = \iota'_{i,j_i}(\varphi_{i,j_i}(v)) = \varphi_{i,j_i}(v). \tag{2.1}$$

Wählt man jetzt $g := \varphi_{i,p_i} \in GL(V)$, so gilt für alle $j_i = 1, \ldots, p_i - 1$ und für alle $i = 1, \ldots, k$ die Beziehung

$$W_{i,j_i} = \varphi_{i,j_i}(V_{i,j_i}) \overset{(2.1)}{=} g(V_{i,j_i}).$$

(Das i ist beliebig, da $V_{1,p_1} = \ldots = V_{k,p_k}$ und $W_{1,p_1} = \cdots = W_{k,p_k}$.) □

Satz 2.2. *Jede Darstellung $D = (V_l, V_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ eines sternförmigen Köchers Q, bei der die V_α für alle $\alpha \in Q_1$ injektiv sind, ist isomorph zu einer Unterraumdarstellung des Köchers.*

Beweis. Eine Darstellung eines sternförmigen Köchers mit injektiven Abbildungen ist von folgender Form:

$$\begin{tikzcd}
V_{11} \arrow[r] & V_{12} \cdots & V_{1,p_1-1} \arrow[dr] & \\
V_{21} \arrow[r] & V_{22} \cdots & V_{2,p_2-1} \arrow[r] & V = V_{1,p_1} = V_{2,p_2} = \ldots = V_{k,p_k}. \\
 & \vdots & & \\
V_{k1} \arrow[r] & V_{k2} \cdots & V_{k,p_k-1} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Da alle $\iota_{i,j_i} : V_{i,j_i} \to V_{i,j_i+1}$ für $j_i = 1, \ldots, p_i - 1$ und $i = 1, \ldots, k$ injektiv sind, gilt

$$V_{i,j_i} \cong \iota_{i,p_i-1} \circ \ldots \circ \iota_{i,j_i}(V_{i,j_i})$$

für alle $j_i = 1, \ldots, p_i - 1$ und alle $i = 1, \ldots, k$.

Wählt man als Isomorphismen an den Stellen (i, j_i) mit $j_i = 1, \ldots, p_i - 1$ und $i = 1, \ldots, k$ die Abbildungen

$$\begin{array}{rl} \varphi_{i,j_i} : & V_{i,j_i} \to \iota_{i,p_i-1} \circ \ldots \circ \iota_{i,j_i}(V_{i,j_i}) \\ & v \mapsto \iota_{i,p_i-1} \circ \ldots \circ \iota_{i,j_i}(v) \end{array}$$

und an der Stelle $(1, p_1) = \cdots = (k, p_k)$ die Abbildung

$$\begin{array}{rl} \varphi_{1,p_1} = \ldots = \varphi_{k,p_k} : & V \to V \\ & v \mapsto v, \end{array}$$

so erhält man als Bild der Darstellung eine Unterraumdarstellung, die zur gegebenen Darstellung isomorph ist, da

$$0 \subseteq \iota_{i,p_i-1} \circ \ldots \circ \iota_{i,1}(V_{i,1}) \subseteq \ldots \subseteq \iota_{i,p_i-1}(V_{i,p_i-1}) \subseteq V$$

für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt und die entstehenden Diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_{i,j_i} \arrow[r, "\iota_{i,j_i}"] \arrow[d, "\varphi_{i,j_i}"'] & V_{i,j_i+1} \arrow[d, "\varphi_{i,j_i+1}"] \\
\iota_{i,p_i-1} \circ \ldots \circ \iota_{i,j_i}(V_{i,j_i}) \arrow[r, "\text{incl.}"'] & \iota_{i,p_i-1} \circ \ldots \circ \iota_{i,j_i+1}(V_{i,j_i+1})
\end{tikzcd}$$

offensichtlich kommutativ sind. □

3 Tupel von Kompositionen einer Zahl und Dimensionsvektoren von Unterraumdarstellungen

Für ein Tupel $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$ sei

$$|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_p, \quad \|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + \cdots + a_p^2.$$

Mit $C_{p_1,\ldots,p_k}$ (bzw. $D_{p_1,\ldots,p_k}$) wird die additive (Halb-)Gruppe aller k-Tupel $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$ von Tupeln (bzw. Kompositionen) bezeichnet, für die $(\ell(\mathbf{a_1}), \ldots, \ell(\mathbf{a_k})) = (p_1, \ldots, p_k)$ und $|\mathbf{a_1}| = \ldots = |\mathbf{a_k}|$ gilt.

$D(\operatorname{rep} Q)$ bzw. $D(\operatorname{rep}_{\text{inj}} Q)$ seien die additiven Halbgruppen der Dimensionsvektoren von Darstellungen bzw. Unterraumdarstellungen von Q.

Die Tupel von Kompositionen seien im folgenden in der Reihenfolge

$$((1,1), \ldots, (1,p_1)), \ldots, ((k,1), \ldots, (k,p_k))$$

und die Dimensionsvektoren der Unterraumdarstellungen in der Reihenfolge

$$((1,1), \ldots, (1,p_1-1)), \ldots, ((k,1), \ldots, (k,p_k-1)), (k,p_k)$$

durchnumeriert.

Ein Dimensionsvektor $\mathbf{d} = ((d_{11}, \ldots, d_{1,p_1-1}), \ldots, (d_{k1}, \ldots, d_{k,p_k-1}), d_{k,p_k})$ entspricht also

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
d_{11} \arrow[r] & d_{12} \cdots & d_{1,p_1-1} \arrow[dr] & \\
d_{21} \arrow[r] & d_{22} \cdots & d_{2,p_2-1} \arrow[r] & d_{k,p_k} \\
 & \vdots & & \\
d_{k1} \arrow[r] & d_{k2} \cdots & d_{k,p_k-1} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Satz 3.1. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}
\sigma : \quad & C_{p_1,\ldots,p_k} \to \mathbb{Z}^{(p_1-1)+\ldots+(p_k-1)+1} \\
& ((a_{11}, \ldots, a_{1,j_1}, \ldots, a_{1,p_1}), \ldots, (a_{k1}, \ldots, a_{k,j_k}, \ldots, a_{k,p_k})) \\
& \mapsto ((a_{11}, \ldots, \sum_{j=1}^{j_1} a_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{p_1-1} a_{1j}), \ldots, (a_{k1}, \ldots, \sum_{j=1}^{j_k} a_{kj}, \ldots, \sum_{j=1}^{p_k-1} a_{kj}), \sum_{j=1}^{p_k} a_{kj})
\end{aligned}$$

ist bijektiv und hat folgende Eigenschaften:

- *σ ist additiv, d. h.*

$$\sigma((\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) + (\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k})) = \sigma(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) + \sigma(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k}) \tag{3.1}$$

für alle $(\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_k}), (\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k}) \in C_{p_1,\ldots,p_k}$.

- $$(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) \in D_{p_1,\ldots,p_k} \Leftrightarrow \sigma(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) \in D(\mathrm{rep}_{\mathrm{inj}}\, Q) \tag{3.2}$$

Beweis. Die Umkehrabbildung wird durch

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}: \quad & \mathbb{Z}^{(p_1-1)+\ldots+(p_k-1)+1} \to C_{p_1,\ldots,p_k} \\ & ((d_{11}, \ldots, d_{1,p_1-1}), \ldots, (d_{k1}, \ldots, d_{k,p_k-1}), d_{k,p_k}) \\ & \mapsto ((d_{11}, \ldots, d_{1,p_1-1} - d_{1,p_1-2}, d_{k,p_k} - d_{1,p_1-1}), \ldots, \\ & (d_{k1}, \ldots, d_{k,p_k-1} - d_{k,p_k-2}, d_{k,p_k} - d_{k,p_k-1})) \end{aligned}$$

gegeben.

(3.1) ist erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} & \sigma((\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) + (\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k})) = \sigma(\mathbf{a_1} + \mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{a_k} + \mathbf{b_k}) \\ = \; & ((a_{11} + b_{11}, \ldots, \sum_{j=1}^{p_1-1}(a_{1j} + b_{1j})), \ldots, (a_{k1} + b_{k1}, \ldots, \sum_{j=1}^{p_k-1}(a_{kj} + b_{kj})), \\ & \sum_{j=1}^{p_k}(a_{kj} + b_{kj})) \\ = \; & ((a_{11}, \ldots, \sum_{j=1}^{p_1-1} a_{1j}), \ldots, (a_{kj}, \ldots, \sum_{j=1}^{p_k-1} a_{kj}), \sum_{j=1}^{p_k} a_{kj}) \\ + \; & ((b_{11}, \ldots, \sum_{j=1}^{p_1-1} b_{1j}), \ldots, (b_{kj}, \ldots, \sum_{j=1}^{p_k-1} b_{kj}), \sum_{j=1}^{p_k} b_{kj}) \\ = \; & \sigma(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) + \sigma(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k}) \end{aligned}$$

(3.2) ist erfüllt, weil die Dimensionsvektoren von Unterraumdarstellungen entlang der Arme aufsteigend sind und alle Einträge in Tupeln von Kompositionen in $\mathbb{N}_0$ liegen. □

Mit $\mathbf{a_{red}}$ wird die *reduzierte* Komposition einer Zahl bezeichnet. Das ist die Komposition die man durch Entfernen der Komponenten a_j aus $\mathbf{a}$ mit $a_j = 0$ unter Beibehaltung der Reihenfolge der übrigen Komponenten erhält.
$N_{p,q,r}$ sei die Menge $\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in D_{p,q,r} | (\mathbf{a_{red}}, \mathbf{b_{red}}, \mathbf{c_{red}}) = ((1^3), (1^3), (1^3))$ oder $((2^2), (1^4), (1^4))$ oder $((3^2), (2^3), (1^6))\}$.

Bemerkung. Die Tripel von reduzierten Kompositionen, die in $N_{p,q,r}$ liegen, entsprechen den kritischen Dimensionsvektoren von $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$ und $\tilde{\mathbb{E}}_8$. Zu diesen gibt es unendlich viele Isomorphieklassen von Unterraumdarstellungen (vgl. [3]).

Definition 3.1. Ein Tupel $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$ strikter Kompositionen einer Zahl heißt *von endlichem Typ*, wenn die Gruppe $GL(V)$ nur endlich viele Bahnen in $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \cdots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$ hat.

Nach Satz 2.1 und (3.2) ist das äquivalent dazu, daß der zugehörige Dimensionsvektor unterraumendlich ist.

4 Dimensionsformeln für $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \cdots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$

4.1 Berechnung der Dimension von $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$

Das folgende Lemma findet man z. B. in [2], S. 69. Hier wird ein kurzer Beweis für die Behauptung gegeben.

Lemma 4.1. *Für einen topologischen Raum* $(X, \mathcal{X})$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. X *ist irreduzibel, d. h., für je zwei abgeschlossene Teilmengen* $A_1, A_2 \subsetneqq X$ *gilt*
$$A_1 \cup A_2 \neq X.$$
2. *Jede offene Teilmenge* $O \neq \emptyset$ *ist dicht in* X.
3. *Für je zwei offene Teilmengen* $O_1, O_2 \neq \emptyset$ *gilt*
$$O_1 \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Beweis. Zu zeigen ist nur die Äquivalenz von 2. und 3., da 1. die zu 3. duale Aussage ist.

3. $\Rightarrow$ 2. (mit Kontraposition):
Wenn 2. nicht erfüllt ist, gibt es eine offene Menge $\emptyset \neq O \in \mathcal{X}$ mit $\overline{O} \subsetneqq X$.
Dann gilt $\emptyset \neq (X \backslash \overline{O}) \in \mathcal{X}$, da $\overline{O}$ abgeschlossen ist.
Es gilt $(X \backslash \overline{O}) \cap O \subseteq (X \backslash O) \cap O = \emptyset$.
Es existieren also zwei nicht-leere, offene Mengen $O_1 := O$ und $O_2 := (X \backslash \overline{O})$ mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

2. $\Rightarrow$ 3.:
Für alle $\emptyset \neq O \in \mathcal{X}$ gelte $\overline{O} = X$.
Seien $\emptyset \neq O_1, O_2 \in \mathcal{X}$. Dann gilt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{X}$, und somit $\overline{O_1 \cap O_2} = X$. Daraus folgt, daß $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. □

Definition 4.1. Die *Zariski-Topologie* ist die Topologie auf K^n, die man erhält, wenn man als abgeschlossene Mengen die Mengen wählt, die man als gemeinsame Nullstellen von endlich vielen Polynomen in $K[X_1, \ldots, X_n]$ schreiben kann.

Abgeschlossene Mengen bzgl. der Zariski-Topologie sind also die algebraischen Mengen.

Ist ein m-dimensionaler Vektorraum W über K gegeben, so ist W isomorph zu K^m, und der Polynomring $\mathcal{P}(W)$ ist isomorph zu $K[X_1, \ldots, X_m]$ (vgl. [5], S. 579). Die Zariski-Topologie auf dem Vektorraum W wird dann durch die Zariski-Topologie auf K^m gegeben.

Im folgenden sei für die auftretenden Räume als Topologie die Zariski-Topologie gegeben. Offene (bzw. abgeschlossene) Mengen sind diejenigen, die bzgl. der Zariski-Topologie offen (bzw. abgeschlossen) sind.

Lemma 4.2. $\mathrm{End}(V)$ *ist irreduzibel, denn* $\mathrm{End}(V)$ *ist als Vektorraum isomorph zu* K^{n^2}.

Lemma 4.3. $GL(V)$ *ist offen in* $\mathrm{End}(V)$.

Beweis. Zu zeigen ist, daß $\mathrm{End}(V)\backslash GL(V)$ abgeschlossen ist.

Es gilt
$$\mathrm{End}(V)\backslash GL(V) = \{M \in \mathrm{End}(V) |\det M = 0\} = \det{}^{-1}(0).$$

Da die Determinante ein Polynom in n^2 Variablen ist, ist $\mathrm{End}(V)\backslash GL(V)$ abgeschlossen. □

Nach Lemma 4.1 und Lemma 4.2 ist $GL(V)$ dicht in $\mathrm{End}(V)$ und hat daher die gleiche Dimension wie $\mathrm{End}(V)$. Es gilt
$$\dim GL(V) = n^2. \tag{4.1}$$

Definition 4.2. Die *Grassmannsche Mannigfaltigkeit* der m-dimensionalen Unterräume eines n-dimensionalen Vektorraumes V über K wird mit $\mathrm{Grass}_m(V)$ bezeichnet.

Definition 4.3. Eine lokal abgeschlossene Teilmenge eines projektiven Raumes heißt *quasiprojektive Varietät.*
Eine quasiprojektive Varietät, die zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines projektiven Raumes isomorph ist, heißt *projektive Varietät.*

Nach [5], S. 483ff. ist $\mathrm{Grass}_m(V)$ eine projektive Varietät. Nach [5], S. 606f. sind Produkte von projektiven Varietäten wieder projektive Varietäten.

Die Menge
$$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$$
ist eine abgeschlossene Teilmenge von
$$\begin{gathered}(\mathrm{Grass}_{a_{11}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Grass}_{a_{11}+\ldots+a_{1,p_1}}(V)) \times \ldots \\ \times(\mathrm{Grass}_{a_{k1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Grass}_{a_{k1}+\ldots+a_{k,p_k}}(V)),\end{gathered}$$
also eine (quasi-)projektive Varietät.

Das nächste Lemma gibt die Formel zur Berechnung der Dimension von $\mathrm{Grass}_m(V)$ an (vgl. auch [5], S. 484).

Lemma 4.4. *Sei V ein Vektorraum der Dimension n über K. Es gilt*
$$\dim \mathrm{Grass}_m(V) = m(n-m). \tag{4.2}$$

Genauer gilt: Eine Inklusionsabbildung $\iota : W \to V$ eines m-dimensionalen Vektorraumes W in den Vektorraum V hat bis auf Basiswechsel in W und Umnumerierung der Basiselemente in V eine darstellende Matrix der Form
$$\mathrm{I} := \left(\begin{array}{ccc} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \\ \hline \iota_{m+1,1} & \cdots & \iota_{m+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \iota_{n1} & \cdots & \iota_{nm} \end{array}\right),$$
jede solcher Matrizen beschreibt eine Inklusionsabbildung, und der affine Raum dieser Matrizen hat über K die Dimension $m(n-m)$.

Beweis. Da ι injektiv ist, gibt es in jeder darstellenden Matrix

$$\mathrm{I}' = (\iota'_{ij})_{i,j} \text{ von } \iota$$

m linear unabhängige Zeilen, denn es gilt

$$\mathrm{rk}(\mathrm{I}') = \mathrm{rk}(\iota) = \dim_K \mathrm{Im}(\iota) = m.$$

O. B. d. A. sind dies die ersten m Zeilen:

$$\begin{gathered} \iota'_{11}, \ldots, \iota'_{1m}, \\ \ldots, \\ \iota'_{m1}, \ldots, \iota'_{mm}. \end{gathered}$$

Ansonsten führe man einen Basiswechsel in V mit Umsortierung der gegebenen Basiselemente von V durch. Die Umnumerierung der Basiselemente von V entspricht einer Zeilenvertauschung in der darstellenden Matrix.

Bildet man nun

$$\Phi_W := \begin{pmatrix} \iota'_{11} & \cdots & \iota'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iota'_{m1} & \cdots & \iota'_{mm} \end{pmatrix},$$

so erhält man eine Matrix, die einen Basiswechsel in W beschreibt.

Zu zeigen ist jetzt, daß es Elemente

$$\begin{gathered} \iota_{m+1,1}, \ldots, \iota_{m+1,m}, \\ \ldots, \\ \iota_{n1}, \ldots, \iota_{nm} \end{gathered}$$

gibt mit

$$\mathrm{I} \cdot \Phi_W = \mathrm{I}'.$$

Die Gleichheit für die Zeilen 1 bis m ist erfüllt.
Für die Zeilen $m+1$ bis n erhält man für jede Zeile ein lineares Gleichungssystem

$$(\iota_{i1}, \ldots, \iota_{im}) \cdot \begin{pmatrix} \iota'_{11} & \cdots & \iota'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iota'_{m1} & \cdots & \iota'_{mm} \end{pmatrix} = (\iota'_{i1}, \ldots, \iota'_{im})$$

mit m Gleichungen und m Unbekannten, das eindeutig auflösbar ist, weil Φ_W als Matrix des Basiswechsels invertierbar ist.

Es ist klar, daß

$$\mathrm{rk}(\mathrm{I}) = m,$$

und deshalb beschreibt jede Matrix der Form I eine Inklusionsabbildung.

Der affine Raum der Matrizen der Form I läßt sich schreiben als

$$I_{n\times m} + M,$$

wobei

$$I_{n\times m} := \left(\begin{array}{ccc} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

und

$$M := \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \hline \iota_{m+1,1} & \cdots & \iota_{m+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \iota_{n1} & \cdots & \iota_{nm} \end{array} \right) \middle| \, \iota_{ij} \in K \quad \forall m+1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq m \right\}$$

ist. Da $\dim_K M = m(n-m)$, hat auch der affine Raum der Matrizen der Form I die Dimension $m(n-m)$. □

Korollar 4.1. *Es gilt*

$$\dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{j-1} a_l a_j \tag{4.3}$$

Beweis. (Induktion über die Länge p von $\mathbf{a}$)
Für $p = 1$ ist die Formel richtig, da $\mathrm{Fl}_{(a_1)}(V) = \{V\}$ und

$$\dim\{V\} = 0$$

$p \rightsquigarrow p+1$:
Es gilt

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) &\overset{IV+(4.2)}{=} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{j-1} a_l a_j + \sum_{l=1}^{p} a_l \left(\sum_{l=1}^{p+1} a_l - \sum_{l=1}^{p} a_l \right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{j-1} a_l a_j + \sum_{l=1}^{p} a_l a_{p+1} \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{j-1} a_l a_j . \end{aligned}$$

□

Lemma 4.5. *Es gilt*

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{j-1} a_l a_j = \frac{1}{2} \left(|\mathbf{a}|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \right). \tag{4.4}$$

Beweis. (Induktion über die Länge p von $\mathbf{a}$)
Für $p = 1$ ist die Formel richtig, denn es gilt

$$0 = \frac{1}{2}(a_1^2 - a_1^2).$$

$p \rightsquigarrow p+1$:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p+1}\sum_{l=1}^{j-1} a_l a_j &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j-1} a_l a_j + a_{p+1}\sum_{l=1}^{p} a_l \\
&\overset{IV}{=} \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{p} a_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{p} a_j^2\right) + a_{p+1}\sum_{l=1}^{p} a_l \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{p} a_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{p} a_j^2 + 2\sum_{l=1}^{p} a_l a_{p+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{p} a_j\right)^2 + 2\sum_{l=1}^{p} a_l a_{p+1} + a_{p+1}^2 - \left(\sum_{j=1}^{p} a_j^2 + a_{p+1}^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{p+1} a_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{p+1} a_j^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{a}|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\right).
\end{aligned}$$

□

4.2 Existenz einer dichten Bahn in $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$

Nach [2], S. 292 gilt

Satz 4.1. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus zwischen quasiprojektiven Varietäten, X irreduzibel und*

$$m := \dim X - \dim(\overline{f(X)}).$$

Dann gilt

$$\dim(f^{-1}(q)) \geq m$$

für alle $q \in f(X)$.

Weiterhin gibt es eine Menge $U \subseteq f(X)$, die offen und dicht ist in $\overline{f(X)}$, so daß

$$\dim(f^{-1}(q)) = m$$

für alle $q \in U$.

Der Beweis dieses Satzes geschieht mit Hilfe der Methode der affinen Überdeckung von quasiprojektiven Varietäten (siehe [2], S. 292). Der Satz kann zunächst für affine Varietäten gezeigt werden (vgl. [2], S. 157 oder [7], S. 249) und läßt sich dann direkt auf den Fall der quasiprojektiven Varietäten übertragen.

Im folgenden sei eine Operation

$$\begin{aligned}
G \times Z &\to Z \\
(g, z) &\mapsto gz
\end{aligned}$$

einer algebraischen Gruppe G auf einer projektiven Varietät Z gegeben.

Definition 4.4. Für $z \in Z$ heißt $Gz := \{gz | g \in G\}$ die *Bahn* eines Punktes $z \in Z$. Mit $G_z := \{g \in G | gz = z\}$ wird der *Stabilisator* eines Punktes $z \in Z$ bezeichnet.

Aus Satz 4.1 kann man zwei wichtige Folgerungen ziehen.

Korollar 4.2. *Gz ist offen im Abschluß $\overline{Gz}$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \mu : \quad & G \to Z \\ & g \mapsto gz \end{aligned}$$

ist ein Morphismus zwischen quasiprojektiven Varietäten. Nach Satz 4.1 existiert eine Menge $U \subseteq Gz$, die in $\overline{Gz}$ offen und dicht ist. Da $Gz = \bigcup_{g \in G} gU$, ist auch Gz offen in $\overline{Gz}$. □

Korollar 4.3. *Für jeden Punkt $z \in Z$ gilt folgende Dimensionsformel:*

$$\dim G = \dim Gz + \dim G_z. \tag{4.5}$$

Beweis. Man betrachte wieder

$$\begin{aligned} \mu : \quad & G \to Z \\ & g \mapsto gz. \end{aligned}$$

Für $z' \in Gz$ existiert ein $g \in G$ mit $z' = gz$. Es gilt

$$\mu^{-1}(z') = gG_z,$$

und daraus folgt

$$\dim \mu^{-1}(z') = \dim G_z = \dim \mu^{-1}(z).$$

Nach Satz 4.1 gilt nun

$$\dim G = \dim Gz + \dim G_z.$$

□

Lemma 4.6. *Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *M ist offen im Abschluß $\overline{M}$.*

2. *M ist lokal abgeschlossen.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.:
Sei M offen im Abschluß $\overline{M}$. Das heißt, es gibt eine offene Menge $O \in \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft, daß $M = O \cap \overline{M}$.
Insbesondere läßt sich dann M als Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von X schreiben. Das heißt aber, daß M lokal abgeschlossen ist.

2. $\Rightarrow$ 1.:
Sei M lokal abgeschlossen. Das heißt, es existieren eine offene Teilmenge O von X und eine

abgeschlossene Teilmenge A von X mit der Eigenschaft, daß $M = O \cap A$.
Wegen dieser Eigenschaft gilt auch $M \subseteq A$, und daraus folgt, daß $M \subseteq \overline{M} \subseteq \overline{A} = A$.
Aufgrund dessen erhält man $M = M \cap \overline{M} = O \cap A \cap \overline{M} = O \cap \overline{M}$.
Es existiert also eine offene Menge $O \in \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft, daß $M = O \cap \overline{M}$, was gleichbedeutend damit ist, daß M offen in $\overline{M}$ ist. □

Aus Korollar 4.2 und Lemma 4.6 folgt, daß alle Bahnen Gz lokal abgeschlossene Teilmengen von Z sind. Insbesondere sind auch alle Bahnen $GL(V)F$ für alle $F \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$ lokal abgeschlossen.

Falls es nur endlich viele Bahnen unter der Operation von $GL(V)$ gibt, existieren eine endliche Indexmenge I und $F_i \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V)$, $i \in I$, so daß

$$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V) = \bigcup_{i \in I} GL(V)F_i, \tag{4.6}$$

gilt.

Für endlich viele lokal abgeschlossene Teilmengen Z_i , $i \in I$, von Z gilt

$$\dim \bigcup_{i \in I} Z_i = \max_{i \in I} \dim Z_i.$$

Falls es nur endlich viele Bahnen gibt, gilt nach (4.6) also auch

$$\dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V) = \max_{i \in I} \dim GL(V)F_i.$$

Daher existiert eine Bahn $GL(V)\tilde{F}$, die volle Länge hat, für die also

$$\dim GL(V)\tilde{F} = \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V) \tag{4.7}$$

gilt.

5 Die Titsform für Tupel von Kompositionen einer Zahl

Die *Titsform* $q : \mathbb{Z}^{|Q_0|} \to \mathbb{Z}$ ist für einen Köcher Q definiert durch

$$q(\mathbf{d}) := \sum_{l \in Q_0} d_l^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}$$

für $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{|Q_0|}$.

Für ein k-Tupel von Vektoren $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) \in \mathbb{Z}^{p_1 + \ldots + p_k}$ wird durch

$$\overline{q}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) := \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{a_i}\|^2 + (2-k)n^2 \right)$$

ebenfalls eine quadratische Form definiert.

Lemma 5.1. *Für ein k-Tupel $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$ von Kompositionen einer Zahl n gilt*

$$\overline{q}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) = \dim GL(V) - \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_1}}(V) - \ldots - \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_k}}(V). \tag{5.1}$$

Beweis. Da

$$\dim GL(V) = n^2$$

und

$$\dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a_i}}(V) = \frac{1}{2} \left(|\mathbf{a_i}|^2 - \|\mathbf{a_i}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(n^2 - \|\mathbf{a_i}\|^2 \right)$$

für alle $1 \leq i \leq k$ gilt, folgt sofort die Formel (5.1). □

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang der beiden quadratischen Formen. Die Form $\overline{q}$ nimmt für ein Tupel von Kompositionen einer Zahl n denselben Wert an wie die Form q für den zugehörigen Dimensionsvektor.

Satz 5.1. *Es gilt*

$$\overline{q}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) = q(\sigma(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})).$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\overline{q}(\mathbf{a_1},\dots \mathbf{a_k}) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}\|\mathbf{a_i}\|^2+(2-k)n^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}\|\mathbf{a_i}\|^2-\sum_{i=1}^{k}|\mathbf{a_i}|^2\right)+n^2\\
&\overset{(4.4)}{=} -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i}\sum_{l=1}^{j-1}a_{il}a_{ij}+n^2\\
&= -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=2}^{p_i}\sum_{l=1}^{j-1}a_{il}a_{ij}+n^2\\
&= -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i-1}\sum_{l=1}^{j}a_{il}a_{i,j+1}+n^2\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i-1}\left(\sum_{l=1}^{j}a_{il}\right)\left(\sum_{l=1}^{j}a_{il}-\sum_{l=1}^{j+1}a_{il}\right)+n^2\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i-1}\left(\sum_{l=1}^{j}a_{il}\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{p_k}a_{kj}\right)^2-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i-1}\left(\sum_{l=1}^{j}a_{il}\right)\left(\sum_{l=1}^{j+1}a_{il}\right)\\
&= q((a_{11},\dots,\sum_{j=1}^{p_1-1}a_{1j}),\dots,(a_{k1},\dots,\sum_{j=1}^{p_k-1}a_{kj}),\sum_{j=1}^{k}a_{kj})\\
&= q(\sigma(\mathbf{a_1},\dots,\mathbf{a_k}))
\end{aligned}
$$

□

6 Der Satz von Kac

Definition 6.1. Eine Darstellung $D \neq 0$ heißt *unzerlegbar*, wenn sie sich nicht als direkte Summe von zwei Darstellungen $D_1, D_2 \neq 0$ schreiben läßt, also für alle D_1, D_2 mit $D_1 \oplus D_2 = D$ entweder $D_1 = 0$ oder $D_2 = 0$ gilt.

Sind zwei Darstellungen $D = (V_l, V_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ und $D' = (V_l', V_\alpha')_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ eines Köchers Q gegeben, so sind die Vektorräume in der Darstellung $D \oplus D'$ durch $V_l \oplus V_l'$ für $l \in Q_0$ und die Abbildungen durch $V_\alpha \oplus V_\alpha'$ für $\alpha \in Q_1$ gegeben.

Jede Darstellung eines Köchers läßt sich nach Krull-Remak-Schmidt (vgl. [8], S. 441) als direkte Summe von unzerlegbaren Darstellungen des Köchers schreiben. Eine Darstellung $D = (V_l, V_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ eines Köchers Q läßt sich nämlich interpretieren als einen Modul über der Wegealgebra kQ. Hat man eine Unterraumdarstellung gegeben, so sind die unzerlegbaren direkten Summanden ebenfalls Unterraumdarstellungen, denn jede Abbildung V_α in einer Unterraumdarstellung $(V_l, V_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ist injektiv. Es gilt also $\operatorname{Ker} V_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in Q_1$. Wäre nun einer der unzerlegbaren direkten Summanden $(U_l, U_\alpha)_{l \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ keine Unterraumdarstellung, so gäbe es ein $\beta \in Q_1$ mit $\operatorname{Ker} U_\beta \neq 0$. Dann wäre aber auch $\operatorname{Ker} V_\beta \neq 0$.

Kac hat in [6] für algebraisch abgeschlossene Körper folgendes gezeigt:

Satz 6.1. *Sei ein Köcher Q mit der zugehörigen Titsform q gegeben und $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^{|Q_0|}$.*

- *Falls $q(\mathbf{d}) > 1$, gibt es keine unzerlegbare Darstellung mit dem Dimensionsvektor $\mathbf{d}$.*
- *Falls $q(\mathbf{d}) = 1$, gibt es höchstens eine Isomorphieklasse von unzerlegbaren Darstellungen mit dem Dimensionsvektor $\mathbf{d}$.*
- *Falls $q(\mathbf{d}) \leq 0$, gibt es keine oder unendlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren Darstellungen mit dem Dimensionsvektor $\mathbf{d}$.*

Korollar 6.1. *Ist $\mathbf{d}$ ein Dimensionsvektor einer unzerlegbaren Darstellung von Q, so gibt es genau eine Isomorphieklasse von unzerlegbaren Darstellungen mit dem Dimensionsvektor $\mathbf{d}$, wenn $q(\mathbf{d}) = 1$, und unendlich viele Isomorphieklassen von Darstellungen mit dem Dimensionsvektor, wenn $q(\mathbf{d}) \leq 0$.*

Da man jede Unterraumdarstellung als direkte Summe von unzerlegbaren Unterraumdarstellungen schreiben kann, kann man auch jeden Dimensionsvektor von Unterraumdarstellungen als eine Summe von Dimensionsvektoren zu unzerlegbaren Unterraumdarstellungen schreiben.

Mit (3.1) und (3.2) erhält man, daß alle $(\mathbf{a_1'}, \ldots, \mathbf{a_k'}) \in D_{p_1,\ldots,p_k}$ mit der Eigenschaft $(\mathbf{a_1} - \mathbf{a_1'}, \ldots, \mathbf{a_k} - \mathbf{a_k'})$ $D_{p_1,\ldots p_k}$ Tupel von Kompositionen einer Zahl sind, die zu Dimensionsvektoren von direkten Summanden von Unterraumdarstellungen zu dem Dimensionsvektor $\sigma(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$ gehören.

7 Der Fall $k \geq 4$

Definition 7.1. Ein k-Tupel $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}) \in D_{p_1,\ldots,p_k}$ von Kompositionen einer Zahl n heißt *echtes k-Tupel*, falls $\mathbf{a_i} \neq (n)$ für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt.

Satz 7.1. *Für $k \geq 4$ ist ein echtes k-Tupel $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$ von strikten Kompositionen einer Zahl nicht von endlichem Typ.*

Das ist nach Satz 2.1 und (3.2) äquivalent dazu, daß es für einen sternförmigen Köcher mit vier oder mehr Armen zu jedem Dimensionsvektor von Unterraumdarstellungen, dessen Dimensionen an jedem Arm strikt aufsteigend sind, unendlich viele Isomorphieklassen gibt.

Beweis. Für $k \geq 4$ ist ein echtes k-Tupel $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$ strikter Kompositionen von der Form

$$((1 + e_{11}, \ldots, 1 + e_{1,\ell(\mathbf{a_1})}), (1 + e_{21}, \ldots, 1 + e_{2,\ell(\mathbf{a_2})}), \ldots, (1 + e_{k1}, \ldots, 1 + e_{k,\ell(\mathbf{a_k})})),$$

wobei $e_{i,j_i} \in \mathbb{N}_0$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und alle $j_i = 1, \ldots, \ell(\mathbf{a_i})$ gilt.

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a'_1}, \ldots, \mathbf{a'_k}) \\ &= ((0, \ldots, 0, 1, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1)), (0, \ldots, 0), \\ &\ldots, (0, \ldots, 0)) \end{aligned}$$

ein Tupel, für das $(\mathbf{a_1} - \mathbf{a'_1}, \ldots, \mathbf{a_k} - \mathbf{a'_k})$ wieder ein echtes k-Tupel von Kompositionen ist, da $a_{i,j_i} - a'_{i,j_i} \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und alle $j_i = 1, \ldots, \ell(\mathbf{a_i})$ gilt.

Für das Tupel $(\mathbf{a'_1}, \ldots, \mathbf{a'_k})$ gilt

$$(\mathbf{a'_{1,red}}, \ldots, \mathbf{a'_{k,red}}) = ((1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1)),$$

was das zu dem kritischen Dimensionsvektor von $\tilde{\mathbb{D}}_4$ gehörige Tupel ist.

Unterraumdarstellungen zu dem kritischen Dimensionsvektor von $\tilde{\mathbb{D}}_4$ sind u. a. gegeben durch die folgenden Darstellungen $D(\lambda)$:

$$D(\lambda) := \begin{tikzcd} K \arrow[dr, "\binom{1}{0}"] & & K \arrow[dl, "\binom{0}{1}"'] \\ & K^2 & \\ K \arrow[ur, "\binom{1}{1}"'] & & K \arrow[ul, "\binom{1}{\lambda}"] \end{tikzcd}$$

Diese sind für verschiedene $\lambda \in K$ jeweils nicht isomorph. Sind nämlich zwei isomorphe Darstellungen $D(\lambda)$ und $D(\mu)$ der obigen Form gegeben, dann sind für Isomorphismen, die durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, (a), (b), (c) \text{ und } (d)$$

beschrieben werden, die folgenden Diagramme kommutativ:

$$\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)"] & K^2 \\ K \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "(a)"'] & K \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd} , \tag{7.1}$$

$$\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)"] & K^2 \\ K \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "(b)"'] & K \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd} , \tag{7.2}$$

$$\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)"] & K^2 \\ K \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "(c)"'] & K \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd} , \tag{7.3}$$

und

$$\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)"] & K^2 \\ K \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "(d)"'] & K \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mu \end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd} . \tag{7.4}$$

Mit (7.1) und (7.2) erhält man, daß $a_{11} = a$, $a_{21} = 0$, $a_{12} = 0$ und $a_{22} = b$ gelten muß. Wegen (7.3) muß $a = b = c$ gelten, und zuletzt erhält man aus (7.4), daß $c = d$ und $c\lambda = c\mu$ gelten muß. Da $c \neq 0$, folgt $\lambda = \mu$.

Da K algebraisch abgeschlossen ist, hat K unendlich viele Elemente. Da es zu dem kritischen Dimensionsvektor von $\tilde{\mathbb{D}}_4$ also unendlich viele Isomorphieklassen von Unterraumdarstellungen gibt, ist das Tupel $(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$ nicht von endlichem Typ. $\square$

8 Klassifikation der Tupel von Kompositionen einer Zahl, die von endlichem Typ sind

Bemerkung. Man kann in den Fällen $k = 1$ und $k = 2$ aus einer Komposition $\mathbf{a}$ bzw. einem Paar $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ von Kompositionen einer Zahl n ein Tripel von Kompositionen von n durch Bildung von $((n), (n), \mathbf{a})$ bzw. $((n), \mathbf{a}, \mathbf{b})$ erzeugen. Das Tripel ist genau dann von endlichem Typ, wenn $(\mathbf{a})$ bzw. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ von endlichem Typ ist.

Lineare, injektive Abbildungen zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen gleicher Dimension sind auch surjektiv, also bijektiv.

Es genügt also für die Klassifikation (zusammen mit Satz 7.1), nur Tripel von strikten Kompositionen zu betrachten.

Im folgenden sei Q ein sternförmiger Köcher mit drei Armen, und die Tripel $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ seien so sortiert, daß $\ell(\mathbf{a}) = p \leq \ell(\mathbf{b}) = q \leq \ell(\mathbf{c}) = r$ gilt.

Der folgende Satz gibt Bedingungen dafür an, wie man einem Tripel von strikten Kompositionen direkt ansehen kann, ob es von endlichem Typ ist.

Satz 8.1. *Ein Tripel* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *strikter Kompositionen einer Zahl* n *ist von endlichem Typ genau dann, wenn es einer der folgenden Bedingungen genügt:*

$(A_{q,r})$	$(p, q, r) = (1, q, r),\ 1 \leq q \leq r$
(D_{r+2})	$(p, q, r) = (2, 2, r),\ 2 \leq r$
(E_6)	$(p, q, r) = (2, 3, 3)$
(E_7)	$(p, q, r) = (2, 3, 4)$
(E_8)	$(p, q, r) = (2, 3, 5)$
$(E^{(a)}_{r+3})$	$(p, q, r) = (2, 3, r),\ 3 \leq r,\ \min(\mathbf{a}) = 2$
$(E^{(b)}_{r+3})$	$(p, q, r) = (2, 3, r),\ 3 \leq r,\ \min(\mathbf{b}) = 1$
$(S_{q,r})$	$(p, q, r) = (2, q, r),\ 2 \leq q \leq r,\ \min(\mathbf{a}) = 1$

Eine erste Klassifikation der Tripel von endlichem Typ liefert der folgende Satz.

Satz 8.2. *Ein Tripel* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in D_{p,q,r}$ *strikter Kompositionen einer Zahl ist von endlichem Typ genau dann, wenn* $\overline{q}(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \geq 1$ *für alle* $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$ *mit* $(\mathbf{a} - \mathbf{a}', \mathbf{b} - \mathbf{b}', \mathbf{c} - \mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$.

Nach Satz 2.1 und (3.2) ist das äquivalent dazu, daß ein Dimensionsvektor $\mathbf{d}$ *genau dann unterraumendlich ist, wenn für alle möglichen Dimensionsvektoren* $\mathbf{d}'$ *eines direkten Summanden einer Unterraumdarstellung mit Dimensionsvektor* $\mathbf{d}$ *die Ungleichung* $q(\mathbf{d}') \geq 1$ *erfüllt ist.*

Beweis. Sei $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in D_{p,q,r}$ von endlichem Typ.
Sei $S(V)$ die Untergruppe der Skalarmultiplikationen in $GL(V)$.

Für alle $s \in S(V)$ und für alle $F \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ gilt

$$sF = F.$$

Zu zeigen ist für die Behauptung, daß für alle $s \in S(V)$, alle $i = 1, \dots, k$ und alle $j_i = 1, \dots p_i$ die Beziehung

$$s(V_{i,j_i}) = V_{i,j_i}$$

gilt.

Das ist aber klar, denn mit $v \in V_{i,j_i}$ liegt auch $s(v) = \tilde{s}v$ mit $s \in S(V)$ bzw. $\tilde{s} \in K$ in V_{i,j_i}. Umgekehrt liegt jedes Element $s(v) \in s(V_{i,j_i})$ auch in V_{i,j_i}, denn v läßt sich schreiben als $v = \tilde{s}^{-1}w = s^{-1}(w)$ mit $w \in V_{i,j_i}$.

Für alle $F \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ gilt also

$$S(V) \subseteq GL(V)_F,$$

woraus folgt, daß für alle $F \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ die Gleichung

$$1 = \dim S(V) \leq \dim GL(V)_F$$

erfüllt ist.

Weil die Anzahl der Bahnen endlich ist, kann man nach (4.7) eine Bahn $GL(V)\tilde{F}$ auswählen, für die

$$\dim GL(V)\tilde{F} = \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$$

gilt, und wegen der Dimensionsformel (4.5) folgt nun

$$\begin{aligned} \dim GL(V) &\geq \dim(\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)) + 1 \\ &= \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) + \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) + \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V) + 1, \end{aligned}$$

also

$$\overline{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq 1.$$

Da alle $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ mit $(\mathbf{a} - \mathbf{a}', \mathbf{b} - \mathbf{b}', \mathbf{c} - \mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$ ebenfalls von endlichem Typ sein müssen, gilt auch

$$\overline{q}(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \geq 1.$$

Sei umgekehrt ein Tripel $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ mit der Bedingung $\overline{q}(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \geq 1$ für alle $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ mit $(\mathbf{a} - \mathbf{a}', \mathbf{b} - \mathbf{b}', \mathbf{c} - \mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$ gegeben.

Nach Satz 2.1 und (3.2) kann man anstelle von $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ den zugehörigen Dimensionsvektor $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ von Unterraumdarstellungen betrachten. Es gilt also

$$q(\sigma(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')) \geq 1$$

für alle $\sigma(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$, die Dimensionsvektoren eines direkten Summanden von Unterraumdarstellungen mit Dimensionsvektor $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ sind. Insbesondere gilt dies auch für die Dimensionsvektoren der *unzerlegbaren* direkten Summanden.

Nach Satz 6.1 gilt für alle Dimensionsvektoren $\mathbf{d}$ von unzerlegbaren Darstellungen eines Köchers

$$q(\mathbf{d}) \leq 1.$$

Daher folgt

$$q(\sigma(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')) = 1$$

für alle Dimensionsvektoren von unzerlegbaren direkten Summanden von Unterraumdarstellungen mit Dimensionsvektor $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, weshalb die unzerlegbaren direkten Summanden nach Korollar 6.1 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind.

Da es nur endlich viele Zerlegungen von $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ in Dimensionsvektoren von unzerlegbaren direkten Summanden gibt, denn die Dimension an jedem Punkt ist beschränkt, ist $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ unterraumendlich. Das heißt aber, daß $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ von endlichem Typ ist. □

Es folgt nun ein Hilfssatz, der beim Beweis von Satz 8.4 gebraucht wird.

Hilfssatz 8.3. *Sei* $\mathbf{a}$ *eine strikte Komposition von* n *und* $\ell(\mathbf{a}) = p$.

Es gelten folgende Ungleichungen:

1. $\|\mathbf{a}\|^2 \geq n$.
2. *Falls* $p = 3$, *folgt* $\|\mathbf{a}\|^2 \geq 3(n-2)$.
3. *Falls* $p = 2$ *und* $n = 2m$, *also gerade, folgt* $\|\mathbf{a}\|^2 \geq 2m^2$.
4. *Falls* $p = 2$ *und* $n = 2m+1$, *also ungerade, folgt* $\|\mathbf{a}\|^2 \geq 2m^2 + 2m + 1$.

Beweis. 1.

$$\|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + \ldots + a_p^2 \geq a_1 + \ldots + a_p = n$$

2. Es gilt

$$\|\mathbf{a}\|^2 - 3(n-2) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 3(a_1 + a_2 + a_3 - 2) = \sum_{j=1}^{3} (a_j^2 - 3a_j + 2)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (a_j - 1)(a_j - 2).$$

Die Behauptung ist erfüllt, wenn

$$(a_j - 1)(a_j - 2) \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$$

gilt.

Fall 1.

$$a_j = 1 \Rightarrow (a_j - 1)(a_j - 2) = 0$$

Fall 2.

$$a_j = 2 \Rightarrow (a_j - 1)(a_j - 2) = 0$$

Fall 3.

$$a_j \geq 3 \Rightarrow (a_j - 1)(a_j - 2) \geq 2 \cdot 1 > 0$$

3.

$$\|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 = (m-z)^2 + (m+z)^2 = 2m^2 + 2z^2 \geq 2m^2,$$

falls $z \in \mathbb{Z}$.

4.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 = (m-z)^2 + (m+1+z)^2 = 2m^2 + 2m + 2z^2 + 2z + 1 \\ \geq 2m^2 + 2m + 1,\end{aligned}$$

falls $z \in \mathbb{Z}$.

□

Durch den folgenden Satz erhält man in Verbindung mit Satz 8.2 eine zweite Klassifikation der Tripel von Kompositionen einer Zahl, die von endlichem Typ sind.

Satz 8.4. *Sei* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in D_{p,q,r}$ *ein Tripel strikter Kompositionen einer Zahl* n.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. (p, q, r) *und* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *genügen keiner der Bedingungen aus dem Satz 8.1.*
2. *Es existiert ein* $0 \neq (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$ *mit* $\overline{q}(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \leq 0$ *und* $(\mathbf{a}-\mathbf{a}', \mathbf{b}-\mathbf{b}', \mathbf{c}-\mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$.
3. *Es existiert ein* $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \in N_{p,q,r}$ *mit* $(\mathbf{a}-\mathbf{a}', \mathbf{b}-\mathbf{b}', \mathbf{c}-\mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$.

Beweis. 3. ⇒ 2.:
Wähle $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ aus 3. Für alle $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in N_{p,q,r}$ gilt

$$\overline{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned}\overline{q}((1^3), (1^3), (1^3)) &= \frac{1}{2}(3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 - 3^2) = 0, \\ \overline{q}((2^2), (1^4), (1^4)) &= \frac{1}{2}(2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2 - 4^2) = 0\end{aligned}$$

und

$$\overline{q}((3^2), (2^3), (1^6)) = \frac{1}{2}(2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 1^2 - 6^2) = 0.$$

1. ⇒ 3.:
Falls die Bedingungen im Satz 8.1 nicht erfüllt sind, muß eine der folgenden Bedingungen gelten:

(a) $(p, q, r) = (2, 3, r)$, $6 \leq r$, $\min(\mathbf{a}) \geq 3$, $\min(\mathbf{b}) \geq 2$

(b) $(p, q, r) = (2, q, r)$, $4 \leq q \leq r$, $\min(\mathbf{a}) \geq 2$

(c) $(p, q, r) = (p, q, r)$, $3 \leq p \leq q \leq r$

Ein Tripel mit der Bedingung (a) ist von der Form

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ((3 + e_{11}, 3 + e_{12}), (2 + e_{21}, 2 + e_{22}, 2 + e_{23}), (1 + e_{31}, \ldots, 1 + e_{3r})),$$

wobei $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, e_{23} \in \mathbb{N}_0$ und $e_{3j} \in \mathbb{N}_0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ gilt.

Offensichtlich ist

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = ((3,3), (2,2,2), (0, \ldots, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$$

ein Tripel, für das $(\mathbf{a}-\mathbf{a}', \mathbf{b}-\mathbf{b}', \mathbf{c}-\mathbf{c}')$ wieder in $D_{p,q,r}$ liegt, da $a_l - a'_l \geq 0$ für alle $l = 1,2$, $b_i - b'_i \geq 0$ für alle $i = 1,2,3$ und $c_j - c'_j \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ gilt.

Für das Tripel $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ gilt

$$(\mathbf{a}'_{\mathbf{red}}, \mathbf{b}'_{\mathbf{red}}, \mathbf{c}'_{\mathbf{red}}) = ((3,3), (2,2,2), (1,1,1,1,1,1)),$$

also

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \in N_{p,q,r}.$$

Ein Tripel mit der Bedingung (b) ist von der Form

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ((2+e_{11}, 2+e_{12}), (1+e_{21}, \ldots, 1+e_{2q}), (1+e_{31}, \ldots, 1+e_{3r})),$$

wobei $e_{11}, e_{12} \in \mathbb{N}_0$, $e_{2i} \in \mathbb{N}_0$ für alle $i = 1, \ldots, q$ und $e_{3j} \in \mathbb{N}_0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ gilt.

Offensichtlich ist

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = ((2,2), (0, \ldots, 0, 1, 1, 1, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1, 1, 1))$$

ein Tripel, für das $(\mathbf{a}-\mathbf{a}', \mathbf{b}-\mathbf{b}', \mathbf{c}-\mathbf{c}')$ wieder in $D_{p,q,r}$ liegt, da $a_l - a'_l \geq 0$ für alle $l = 1,2$, $b_i - b'_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, q$ und $c_j - c'_j \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ gilt.
Für das Tripel $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ gilt

$$(\mathbf{a}'_{\mathbf{red}}, \mathbf{b}'_{\mathbf{red}}, \mathbf{c}'_{\mathbf{red}}) = ((2,2), (1,1,1,1), (1,1,1,1)),$$

also

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \in N_{p,q,r}.$$

Ein Tripel mit der Bedingung (c) ist von der Form

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ((1+e_{11}, \ldots, 1+e_{1p}), (1+e_{21}, \ldots, 1+e_{2q}), (1+e_{31}, \ldots, 1+e_{3r})),$$

wobei $e_{1l} \in \mathbb{N}_0$ für alle $l = 1, \ldots, p$, $e_{2i} \in \mathbb{N}_0$ für alle $i = 1, \ldots, q$ und $e_{3j} \in \mathbb{N}_0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ gilt.

Offensichtlich ist

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = ((0, \ldots, 0, 1, 1, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1, 1))$$

ein Tripel, für das $(\mathbf{a}-\mathbf{a}', \mathbf{b}-\mathbf{b}', \mathbf{c}-\mathbf{c}')$ wieder in $D_{p,q,r}$ liegt, da $a_l - a'_l \geq 0$ für alle $l = 1, \ldots, p$, $b_i - b'_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, q$ und $c_j - c'_j \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ gilt.

Für das Tripel $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ gilt

$$(\mathbf{a}'_{\mathbf{red}}, \mathbf{b}'_{\mathbf{red}}, \mathbf{c}'_{\mathbf{red}}) = ((1,1,1), (1,1,1), (1,1,1)),$$

also

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \in N_{p,q,r}.$$

2. $\Rightarrow$ 1. (durch Kontraposition):
Alle Tripel $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$ mit der Bedingung $(\mathbf{a} - \mathbf{a}', \mathbf{b} - \mathbf{b}', \mathbf{c} - \mathbf{c}') \in D_{p,q,r}$, wobei $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ zu einer der im Satz 8.1 angegebenen Klassen gehört, gehören wieder zu den im Satz 8.1 angegebenen Klassen. (Sonst würde eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) aus dem zweiten Beweisschritt gelten, was im Widerspruch zu der Einschränkung der Länge der Arme des Köchers bzw. der Dimensionssprünge entlang der Arme wäre.)

Daher reicht es zu zeigen, daß $\overline{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq 1$ für alle $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ aus einer der angegebenen Klassen gilt.

Fall 1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ gehört zu der Klasse $(A_{q,r})$, (D_{r+2}), (E_6), (E_7) oder (E_8).
Dann ist die Titsform q und damit auch $\overline{q}$ positiv (siehe [4], Théorème auf S. 148). Es gilt also $\overline{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq 1$ für alle $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ aus den Klassen $(A_{q,r})$, (D_{r+2}), (E_6), (E_7) oder (E_8).

Fall 2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ gehört zu der Klasse $(E^{(a)}_{r+3})$, also $(p, q, r) = (2, 3, r)$, $3 \leq r$, $\min(\mathbf{a}) = 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - n^2) \\
&\geq \frac{1}{2}(2^2 + (n-2)^2 + 3(n-2) + n - n^2) \\
&= \frac{1}{2}(8 - 4n + 4n - 6) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Verwendet wurden bei der Abschätzung $\min(\mathbf{a}) = 2$, Hilfssatz 8.3, Teil 2 und Teil 1.

Fall 3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ gehört zu der Klasse $(E^{(b)}_{r+3})$, also $(p, q, r) = (2, 3, r)$, $3 \leq r$, $\min(\mathbf{b}) = 1$.
Bildet man $\mathbf{b}'$ durch Entfernung einer Komponente von $\mathbf{b}$, die gleich 1 ist, so gilt

$$\|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{b}'\|^2 + 1.$$

Für den Fall, daß $n = 2m$ gerade ist, gilt

$$\begin{aligned}
\overline{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}'\|^2 + 1 + \|\mathbf{c}\|^2 - n^2) \\
&\geq \frac{1}{2}(2m^2 + 2m^2 - 2m + 1 + 1 + 2m - n^2) \\
&= \frac{1}{2}(4m^2 + 2 - n^2) \\
&= \frac{1}{2}((2m)^2 + 2 - n^2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Verwendet wurden bei der Abschätzung Hilfssatz 8.3, Teil 3, Teil 4 und Teil 1.

Für den Fall, daß $n = 2m + 1$ ungerade ist, gilt

$$\begin{aligned}
\overline{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}'\|^2 + 1 + \|\mathbf{c}\|^2 - n^2) \\
&\geq \frac{1}{2}(2m^2 + 2m + 1 + 2m^2 + 1 + 2m + 1 - n^2) \\
&= \frac{1}{2}(4m^2 + 4m + 3 - n^2) \\
&= \frac{1}{2}((2m+1)^2 + 2 - n^2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Verwendet wurden bei der Abschätzung Hilfssatz 8.3, Teil 4, Teil 3 und Teil 1.

Fall 4. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ gehört zu der Klasse $(S_{q,r})$, also $(p, q, r) = (2, q, r)$, $2 \leq q \leq r$, $\min(\mathbf{a}) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - n^2) \\
&\geq \frac{1}{2}(1^2 + (n-1)^2 + n + n - n^2) \\
&= \frac{1}{2}(1 - n^2 - 2n + 1 + 2n - n^2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Verwendet wurden bei der Abschätzung $\min(\mathbf{a}) = 1$ und Hilfssatz 8.3, Teil 1.

□

Satz 8.1 folgt direkt aus Satz 8.2 und Satz 8.4.

Bemerkung. Es ist wichtig, daß hier nur die Dimensionsvektoren von *Unterraumdarstellungen* klassifiziert werden. Zum Beispiel hat $((2),(1),(1),(1),2)$ als Dimensionsvektor von *beliebigen* Darstellungen unendlich viele Isomorphieklassen, weil $((2),(1),(1),(1),2) = ((1),(1),(1),(1),2) + ((1),(0),(0),(0),0)$ und es (wie in Kapitel 7 gezeigt) unendlich viele Isomorphieklassen von Darstellungen zu dem Dimensionsvektor $((1),(1),(1),(1),2)$ gibt, als Dimensionsvektor von Unterraumdarstellungen aber nur endlich viele Isomorphieklassen. Zu dem Dimensionsvektor $((1),(0),(0),(0),0)$ gibt es nämlich keine Unterraumdarstellung.

Literatur

[1] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, V. A. Ponomarev, Coxeter functions and Gabriels theorem, *Russian Math. Surveys* **28**, S. 17–32 (1973)

[2] M. Brodmann, Algebraische Geometrie - Eine Einführung, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin (1989)

[3] V. Dlab, C. M. Ringel, Indecomposable representations of graphs and algebras, *Memoirs of the American Mathematical Society* **6**, No. 173 (1976)

[4] P. Gabriel, Représentations indécomposables, Séminaire Bourbaki, *Lecture Notes in Mathematics* **431**, Exposé 444, S. 143–169 (1975)

[5] R. Goodman, N. R. Wallach, Representations and Invariants of the Classical Groups, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **68**, Cambridge University Press (1998)

[6] V. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math.* **56**, S. 57–92 (1980)

[7] H. Kraft, Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden (1985)

[8] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley Publishing Co., Inc. (1965)

[9] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, Multiple Flag Varieties of finite Type, *Prépublication de l'Institut Fourier, Université de Grenoble I* **413** (1998)